ГИА

ГЕОМЕТРИЯ

Рекомендовано Российской академией образования
РАО

2011

Готовимся к экзаменам ГИА

9 класс

Дрофа

Готовимся к экзаменам ГИА

ГИА 2011

ГЕОМЕТРИЯ

И. И. Баврин

9 класс

МОСКВА · ДРОФА · 2011

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Б13

Баврин, И. И.

Б13 Геометрия. 9 класс / И. И. Баврин. — М. : Дрофа, 2011. — 154, [6] с. : ил. — (Готовимся к экзаменам. ГИА).

ISBN 978-5-358-07840-6

Книга поможет самостоятельно подготовиться к сдаче ГИА по геометрии, а также будет полезна учителям, готовящим школьников к экзамену.

В пособии повторяется, обобщается и систематизируется весь материал по курсу геометрии 7—9 классов; предлагаются вопросы и задания на повторение; приводятся задачи с решениями ГИА, а также аналогичные им задачи для самостоятельного решения.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-358-07840-6

ПОВТОРЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

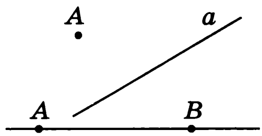
Геометрия — наука о свойствах геометрических фигур. К числу геометрических фигур относятся, например, треугольник, квадрат, круг, сфера и т. д.

Слово «геометрия» греческое, в переводе на русский язык означает «землемерие».

Школьная геометрия состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии.

Планиметрия — это раздел геометрии, в котором изучаются геометрические фигуры на плоскости. *Стереометрия* — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая*. Точка не имеет размеров. Точки обозначаются прописными (заглавными) латинскими буквами: A, B, C, ... Прямую можно мысленно продолжить в обе стороны безгранично. Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, ... Прямую можно обозначать также двумя буквами, соответствующими точкам, лежащим на ней. На рисунке 1 изображены точка A, прямые a и AB. Свойства геометрической фигуры выражаются в виде предложений.



Точка A
Прямые a, AB

Рис. 1

Рассуждение, устанавливающее какое-либо свойство, называют *доказательством*. Доказываемое свойство называют *теоремой*. При доказательстве теоремы мы опираемся на ранее установленные свойства. Некоторые из них, в свою очередь, являются теоремами, некоторые же считаются в геометрии основными и принимаются без доказательства.

Последние называют *аксиомами*. Мы не будем приводить всех аксиом, а ограничимся некоторыми из них.

Аксиома 1. *Для любой прямой существуют точки, принадлежащие прямой, и точки, не принадлежащие прямой.*

Если A — точка и a — прямая, то либо A принадлежит a, либо A не принадлежит a. В первом случае говорят, что прямая a проходит через точку A, во втором случае — прямая a не проходит через точку A.

Аксиома 2. *Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.*

Отсюда следует, что две различные прямые имеют не более одной общей точки.

Говорят, что две прямые пересекаются, если они имеют только одну общую точку.

Аксиома 3. *Если две точки прямой принадлежат некоторой плоскости, то прямая принадлежит этой плоскости.*

Предложение, которое вытекает (получается) из теоремы или аксиомы, называют *следствием*. Например, из аксиомы 2, как уже отмечалось, вытекает, что две различные прямые имеют не более одной общей точки.

Некоторые понятия в геометрии мы принимаем за начальные, их содержание можно выяснить только из опыта. К таким понятиям относятся, например, точка и прямая. Все остальные понятия мы выясняем, опираясь на начальные. Такие объяснения называют *определениями*. Каждое определение опирается либо непосредственно на начальные понятия, либо на понятия, определенные прежде.

1. ОТРЕЗОК, ЛУЧ, УГОЛ

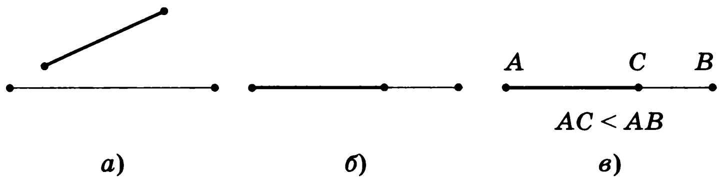
1.1. Отрезок

Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками A и B, включая эти точки (рис. 2).

Отрезок AB

Рис. 2

Точки, ограничивающие отрезок, называются его *концами*. Отрезок со-



Сравнение отрезков

Рис. 3

держит точки A и B и все точки, лежащие между ними. Обозначается отрезок AB или BA.

Два отрезка называют равными, если они могут быть наложены один на другой так, что их концы совпадут. На рисунке 3, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 3, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 3, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB, поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC < AB$).

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется *серединой* отрезка. На рисунке 4 точка C — середина отрезка AB.

$AC = CB$

Точка C — середина отрезка AB

Рис. 4

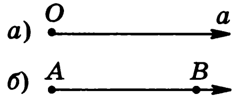
Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрезок, равный данному, используют циркуль.

1.2. Луч и полуплоскость

Лучи дополнительные

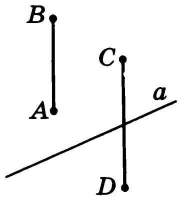
Рис. 5

Если провести прямую и отметить на ней точку O (рис. 5), то она разделит прямую на две части, каждая из которых называется *лучом*, исходящим из точки O (эти лучи называются *дополнительными*). Точка O называется началом луча. Луч обозначается строчными латинскими буквами (например, луч a на рис. 6, a) либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало



Лучи a, AB

Рис. 6



Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости

Рис. 7

луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч AB на рис. 6, *б*).

Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой a (границей полуплоскости). Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой a (рис. 7).

1.3. Угол

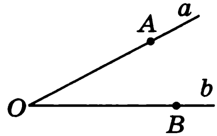
Углом называется фигура, которая состоит из двух различных лучей с общим началом. Эта начальная точка называется *вершиной* угла, а лучи — *сторонами* угла. Если стороны угла являются дополнительными лучами одной прямой, то угол называется *развернутым* (рис. 8).

Слово «угол» иногда заменяют значком $\angle$. Угол можно обозначить тремя способами: $\angle AOB$, $\angle O$, $\angle ab$ (рис. 9).

Говорят, что луч с началом в вершине угла AOB проходит между сторонами этого угла, если он пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла (рис. 10). В случае развернутого угла будем считать, что любой луч с началом в вершине угла, отличный от его сторон, проходит между сторонами угла.

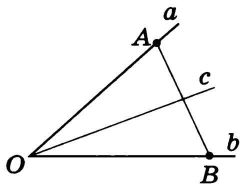
Угол развернутый

Рис. 8



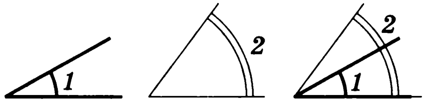
Угол AOB

Рис. 9



Луч c проходит между сторонами угла AOB

Рис. 10



а) *б*)

Рис. 11

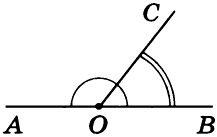
Два угла считаются равными, если при наложении они могут совместиться.

На рисунке 11, *а* изображены неразвернутые углы *1* и *2*. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 11, *б*). Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 11, *б* угол *1* составляет часть угла *2*, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

Неразвернутый угол составляет часть развернутого (рис. 12, угол COB составляет часть угла AOB), поэтому развернутый угол больше неразвернутого угла. Любые два развернутых угла, очевидно, равны.

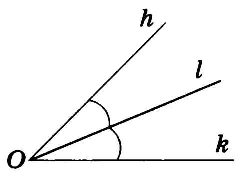
Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется биссектрисой угла.

На рисунке 13 луч l — биссектриса угла hk.



Неразвернутый угол COB составляет часть развернутого угла AOB

Рис. 12



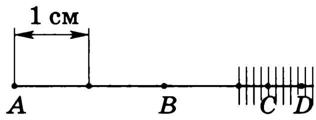
l — биссектриса угла O

Рис. 13

1.4. Измерение отрезков

На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины.

Измерить отрезок — это значит сравнить его с некоторым отрезком, принятым за единицу измерения (его называют также масштабным отрезком).



$AB = 2$ см; $AC = 3{,}4$ см

Рис. 14

Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 14 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно два раза. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.

Может оказаться, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 14 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см. Но возможно, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 14, в котором сантиметр укладывается три раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается восемь раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближенно равна 3,8 см. Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со все большей точностью. На практике, однако, пользуются приближенными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок.

Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.

Это число показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и ее части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. *равные отрезки имеют равные длины*. Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или ее часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. *меньший отрезок имеет меньшую длину*.

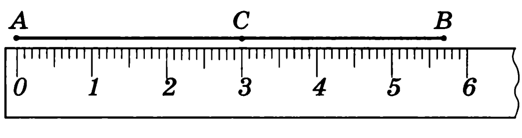
На рисунке 15 изображен отрезок AB. Точка C делит его на два отрезка: AC и CB. Мы видим, что $AC = 3$ см, $CB = 2{,}7$ см, $AB = 5{,}7$ см. Таким образом, $AC + CB = AB$. Также и во всех случаях, когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.

Длина отрезка называется также *расстоянием* между концами этого отрезка.

■**Пример 1.1.** Точка C — середина отрезка AB. Найти длину отрезка AC, если длина отрезка AB равна 32 см.

Решение. Имеем: $AC + CB = AB$ или $AC + CB = 32$. Так как C — середина отрезка AB, то $AC = CB$ и, значит, $2AC = 32$, откуда $AC = 16$ (см).

■**Пример 1.2.** Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC. Найти AC, CB, AO и OB, если $AB = 2$ см.



$AC + CB = AB$

Рис. 15

Решение. Так как C — середина отрезка AB, то, как и в предыдущем примере, $AC = CB = \frac{1}{2}AB$, или $AC = CB = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (см). Так как точка O — середина отрезка $AC = 1$ см, то $AO = OC = 0{,}5$ см. Наконец, $OB = OC + CB = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$ (см).

■ **Пример 1.3.** Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

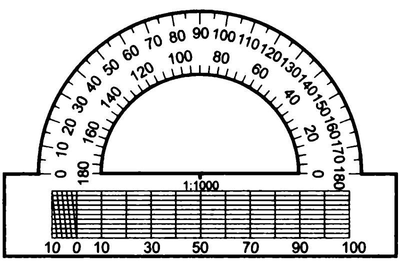
Решение. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB + BC$) равна 7 см. Поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

1.5. Измерение углов

Измерение углов основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают *градус* — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

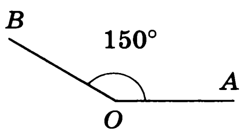
Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется *градусной мерой угла*. Для измерения углов используется транспортир (рис. 16).

На рисунке 17 изображен угол AOB, градусная мера которого равна 150°. Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен 150°» — и пишут: $\angle AOB = 150°$.



Транспортир

Рис. 16



$\angle AOB = 150°$

Рис. 17

$\frac{1}{60}$ часть градуса называется *минутой*, а $\frac{1}{60}$ часть минуты — *секундой*. Минуты обозначают знаком «$'$», а секунды — знаком «$''$». Например, угол в 68 градусов, 32 минуты и 27 секунд обозначается так: $68°32'27''$.

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. *равные углы имеют равные градусные меры*. Если же один угол меньше другого, то в нем градус (или его часть) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. *меньший угол имеет меньшую градусную меру*.

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла, то *развернутый угол равен* 180°. *Неразвернутый угол меньше* 180°, так как он меньше развернутого.

На рисунке 18 изображены лучи с началом в точке O. Луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Мы видим, что

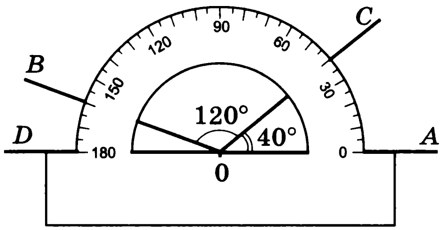
$$\angle AOC = 40°, \angle COB = 120°, \angle AOB = 160°.$$

Таким образом,

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

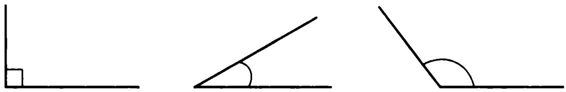
Ясно, что и во всех других случаях,

когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.



$$\angle AOC = 40°, \quad \angle COB = 120°, \quad \angle AOB = 160°$$

Рис. 18



Прямой угол Острый угол Тупой угол

а) *б*) *в*)

Рис. 19

Угол называется:

прямым, если он равен 90° (рис. 19, *а*);

острым, если он меньше 90°, т. е. меньше прямого угла (рис. 19, *б*);

тупым, если он больше 90°, но меньше 180°, т. е. больше прямого, но меньше развернутого угла (рис. 19, *в*).

■**Пример 1.4.** Луч l — биссектриса угла hk, равного 50°. Найти градусные меры углов hl и lk.

Решение. Так как l — биссектриса угла hk, то градусные меры каждого из углов hl и lk равны. Обозначим градусную меру одного из них через x. Тогда $2x = 50°$, откуда $x = 25°$.

Итак, градусные меры каждого из углов hl и lk равны 25° и 25°.

■**Пример 1.5.** Луч OC делит угол AOB на два угла. Найти угол AOC, если $\angle AOB = 155°$ и угол AOC на 15° больше угла COB.

Решение. Обозначим градусную меру угла AOC через x. Тогда градусная мера угла COB будет $x - 15°$. Теперь согласно условию

$$x + x - 15° = 155°, \text{ или } 2x = 170°,$$

откуда $x = 85°$.

■**Пример 1.6.** *М*ежду сторонами угла cd, равного 120°, проходит луч a. Найти углы ca и ad, если их градусные меры относятся как 4 : 2.

Решение. Луч a проходит между сторонами угла cd, значит, $\angle ca + \angle ad = \angle cd$.

Так как градусные меры $\angle ca$ и $\angle ad$ относятся как 4 : 2, то

$$\angle ca = \frac{120°}{6} \cdot 4 = 80°, \quad \angle ad = \frac{120°}{6} \cdot 2 = 40°.$$

1.6. Смежные и вертикальные углы. Перпендикулярные прямые

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными лучами. На рисунке 20 углы AOB и BOC смежные.

Теорема 1.1. ***Сумма смежных углов равна* 180°.**

Доказательство. Луч OB (см. рис. 20) проходит между сторонами развернутого угла. Поэтому

$$\angle AOB + \angle BOC = 180°.$$

Из теоремы 1.1 следует, что если два угла равны, то смежные с ними углы равны.

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого. Углы AOB и COD, BOD и AOC, образованные при пересечении двух прямых, являются вертикальными (рис. 21).

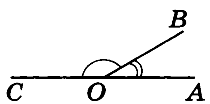
Теорема 1.2. ***Вертикальные углы равны.***

Доказательство. Рассмотрим вертикальные углы AOB и COD (см. рис. 21). Угол BOD является смежным для каждого из углов AOB и COD. По теореме 1.1

$$\angle AOB + \angle BOD = 180°, \ \angle COD + \angle BOD = 180°.$$

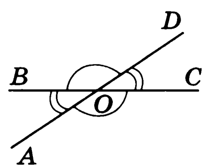
Отсюда заключаем, что $\angle AOB = \angle COD$.

Следствие 1.1. *Угол, смежный с прямым углом, есть прямой угол.*



Сумма смежных углов равна 180°

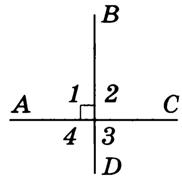
Рис. 20



Вертикальные углы равны

Рис. 21

Рассмотрим две пересекающиеся прямые AC и BD (рис. 22). Они образуют четыре угла. Если один из них прямой (угол *1* на рис. 22), то остальные углы также прямые (углы *1* и *2*, *1* и *4* — смежные, углы *1* и *3* — вертикальные). В этом случае говорят, что эти прямые пересекаются под прямым углом и называются *перпендикулярными* (или *взаимно перпендикулярными*). Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$.



Прямые AC и BD перпендикулярные

Рис. 22

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная к этому отрезку и проходящая через его середину.

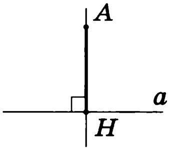
Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней (рис. 23). Соединим точку A отрезком с точкой H прямой a. Отрезок AH называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a*, если прямые AH и a перпендикулярны. Точка H называется *основанием перпендикуляра*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. ***Из всякой точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.***

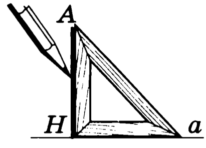
Для проведения на чертеже перпендикуляра из точки к прямой используют чертежный угольник (рис. 24).

Замечание. Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что дано. Эта часть называется *условием теоремы*. В другой части гово-



AH — перпендикуляр к прямой

Рис. 23



Чертежный угольник

Рис. 24

рится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется *заключением теоремы*. Например, условие теоремы 1.2 — углы вертикальные; заключение — эти углы равны.

Всякую теорему можно подробно выразить словами так, что ее условие будет начинаться словом «если», а заключение — словом «то». Например, теорему 1.2 можно подробно высказать так: «Если два угла вертикальные, то они равны».

■**Пример 1.7.** Один из смежных углов равен 44°. Чему равен другой?

Решение. Обозначим градусную меру другого угла через x, тогда согласно теореме 1.1

$$44° + x = 180°.$$

Решая полученное уравнение, находим, что $x = 136°$. Следовательно, другой угол равен 136°.

■**Пример 1.8.** Пусть на рисунке 21 угол COD равен 45°. Чему равны углы AOB и AOC?

Решение. Углы COD и AOB вертикальные, следовательно, по теореме 1.2 они равны, т. е. $\angle AOB = 45°$. Угол AOC смежный с углом COD, значит, по теореме 1.1

$$\angle AOC = 180° - \angle COD = 180° - 45° = 135°.$$

■**Пример 1.9.** Найти смежные углы, если один из них в 3 раза больше другого.

Решение. Обозначим градусную меру меньшего угла через x. Тогда градусная мера большего угла будет $3x$.

Так как сумма смежных углов равна 180° (теорема 1.1), то

$$x + 3x = 180°,$$

откуда $x = 45°$.

Значит, смежные углы равны 45° и 135°.

■**Пример 1.10.** Сумма двух вертикальных углов равна 100°. Найти величину каждого из четырех углов.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 21. Вертикальные углы COD и AOB равны (теорема 1.2), значит, равны и их градусные меры. Поэтому $\angle COD = \angle AOB = 50°$

(их сумма по условию 100°). Угол BOD (также и угол AOC) смежный с углом COD, и, значит, по теореме 1.1 $\angle BOD = \angle AOC = 180° - 50° = 130°$.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое отрезок с концами A и B. Как он обозначается?
2. Какие отрезки называются равными?
3. Объясните, как сравнить два отрезка.
4. Какая точка называется серединой отрезка?
5. Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи? Какие лучи называются дополнительными?
6. Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла. Как обозначается угол?
7. Какой угол называется развернутым?
8. Какие углы считаются равными?
9. Объясните, как сравнить два угла.
10. Какой луч называется биссектрисой угла?
11. Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB, если известны длины отрезков AC и CB?
12. Что такое градусная мера угла?
13. Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти градусную меру угла AOB, если известны градусные меры углов AOC и COB?
14. Какой угол называется острым? прямым? тупым?
15. Какие углы называются смежными?
16. Докажите, что сумма смежных углов равна 180°.
17. Какие углы называются вертикальными?
18. Докажите, что вертикальные углы равны.
19. Какие прямые называются перпендикулярными?
20. Что называется серединным перпендикуляром к отрезку?
21. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной прямой.
22. Сформулируйте теорему о перпендикуляре, проведенном из данной точки к данной прямой.

Упражнения

1. Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB = 3$ дм, $BC = 5$ дм.

2. Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 2{,}7$ см, $AC = 5{,}2$ см.

3. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 11$ см, $BC = 12{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

4. Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

5. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите $\angle AOB$, если $\angle AOC = 44°$, $\angle COB = 76°$.

6. Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 75°$, а угол AOC на $15°$ меньше угла BOC.

7. Луч OC является биссектрисой неразвернутого угла AOB. Может ли угол AOC быть прямым или тупым?

8. Найдите угол, смежный с углом ABC, если: 1) $\angle ABC = 110°$; 2) $\angle ABC = 80°$; 3) $\angle ABC = 16°$.

9. Один из смежных углов больше другого на $31°$. Вычислите эти углы.

10. На прямой AB взята точка C и из нее проведен луч CD так, что $\angle ACD$ в 4 раза больше $\angle BCD$. Найдите эти углы.

11. Один из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, равен $90°$. Чему равны остальные углы?

12. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, равен $54°$. Найдите остальные углы.

13. Сумма двух вертикальных углов равна $80°$. Найдите каждый из полученных четырех углов.

2. ТРЕУГОЛЬНИКИ

2.1. Треугольник и его элементы

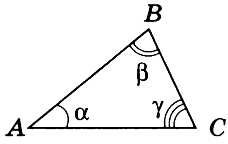
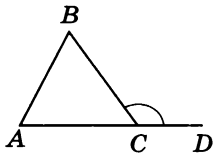


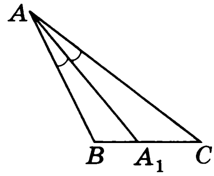
Рис. 25

Пусть A, B, C — три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Фигура, состоящая из трех отрезков AB, BC, AC (рис. 25), называется *треугольником* ABC (обозначается: $\triangle ABC$). Треугольником также называют часть плоскости, ограниченную отрезками AB, BC, AC (плоский треугольник). Точки A, B, C — *вершины*, отрезки AB, BC, AC — *стороны*



$\angle BCD$ — внешний угол треугольника ABC

Рис. 26



AA_1 — биссектриса треугольника ABC

Рис. 27

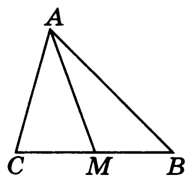
треугольника. Сумма длин трех сторон треугольника называется его *периметром*.

Углом (или внутренним углом) треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный лучами AB и AC. Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C.

Углы CAB, ABC, BCA треугольника ABC часто обозначают одной буквой (A, B, C соответственно) или греческими буквами α, β, γ (при этом внутри углов рисуют дуги, см. рис. 25). Говорят, что угол A *противолежит* стороне BC или сторона BC противолежит углу A; так же угол B и сторона AC, угол C и сторона AB противолежат (друг другу).

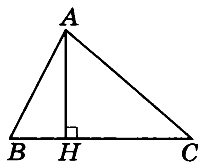
Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется *внешним* углом этого треугольника. Таков, например, угол BCD (рис. 26). При каждом угле треугольника можно построить по два внешних угла (продолжив одну или другую сторону угла). Эти два угла равны как углы вертикальные.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны, называется биссектрисой треугольника (рис. 27).



AM — медиана треугольника ABC

Рис. 28



AH — высота треугольника ABC

Рис. 29

Любой треугольник имеет три биссектрисы.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется медианой треугольника (рис. 28).

Любой треугольник имеет три медианы.

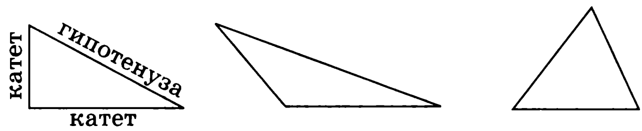
Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противолежащую сторону, называется высотой треугольника (рис. 29).

Любой треугольник имеет три высоты.

Если один из углов треугольника прямой, то треугольник *прямоугольный* (рис. 30, *а*); если один из углов тупой — *тупоугольный* (рис. 30, *б*); если все три угла острые — *остроугольный* (рис. 30, *в*).

В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, две другие стороны — *катетами*.

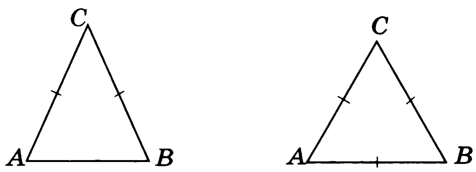
Треугольник, две стороны которого равны, называется *равнобедренным* ($AC = BC$ на рис. 31, *а*). Третья сторона — *основание*, равные стороны — *боковые* стороны.



Треугольник:

а) прямоугольный *б*) тупоугольный *в*) остроугольный

Рис. 30



Треугольник:

а) равнобедренный *б*) равносторонний

Рис. 31

Треугольник, три стороны которого равны ($AC = BC = AB$ на рис. 31, *б*), называется *равносторонним*.

■**Пример 2.1.** Периметр равнобедренного треугольника равен 50 м, боковая сторона — 15 м. Найти основание.

Решение. Обозначим основание через x. Тогда периметр треугольника составит

$$x + 15 + 15.$$

По условию эта сумма равна 50 м, т. е.

$$x + 30 = 50,$$

откуда $x = 20$.

Итак, основание равно 20 м.

■**Пример 2.2.** Периметр равнобедренного треугольника равен 70 м. Боковая сторона больше основания на 5 м. Найти стороны треугольника.

Решение. Воспользуемся рисунком 31, *а*. Обозначим AB через x, тогда $BC = AC$ через $x + 5$.

Тогда периметр треугольника составит

$$(x + 5) + (x + 5) + x.$$

По условию эта сумма равна 70, т. е.

$$3x + 10 = 70, \text{ или } x = 20.$$

Следовательно, стороны треугольника 20 см, 25 см и 25 см.

■**Пример 2.3.** Треугольник, периметр которого равен 24 см, делится высотой на два треугольника, периметры которых равны 12 см и 20 см. Найти высоту треугольника.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 29. Обозначим периметры треугольников ABC, ABH и ACH соответственно через P, P_1 и P_2. Из рисунка 29 видно, что

$$P_1 + P_2 = P + 2AH,$$

или

$$12 + 20 = 24 + 2AH,$$

откуда $AH = 4$.

2.2. Признаки равенства треугольников

Два треугольника называются *равными*, если их можно совместить наложением. На рисунке 32 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников.

Таким образом, если два треугольника равны, то *элементы* (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника. Отметим, что

в равных треугольниках против соответственно равных сторон (т. е. совмещающихся при наложении) **лежат равные углы**, и обратно: **против соответственно равных углов лежат равные стороны.**

Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображенных на рисунке 32, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1. Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ будем обозначать так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, сравнивая некоторые их элементы.

Теорема 2.1. Первый признак равенства треугольников. ***Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и***

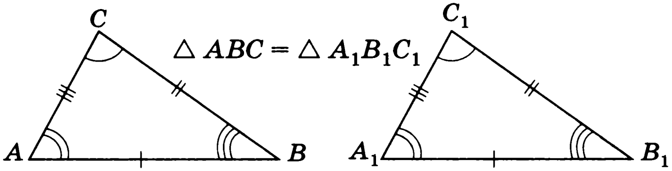


Рис. 32

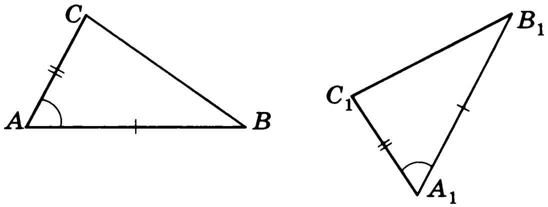


Рис. 33

углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 33).

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (см. рис. 33). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны.

Аналогично методом наложения доказывается теорема 2.2.

Теорема 2.2. Второй признак равенства треугольников. ***Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны*** (рис. 34).

■**Пример 2.4.** В треугольниках ABC и DEF (рис. 35) $\angle A = \angle E$, $AB = 20$ см, $AC = 18$ см, $DE = 18$ см, $EF = 20$ см.

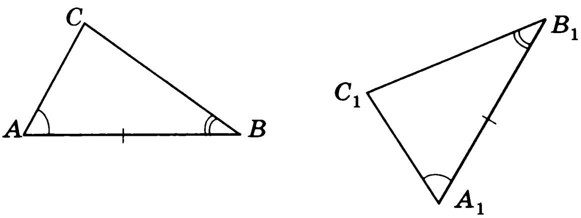


Рис. 34

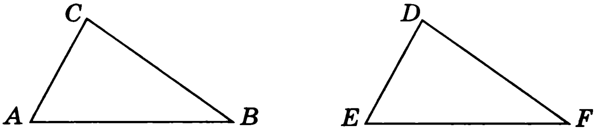


Рис. 35

Сравнить треугольники ABC и DEF. Какой угол в треугольнике DEF равен углу B?

Решение. Данные треугольники равны по первому признаку. Угол F треугольника DEF равен углу B треугольника ABC, так как эти углы лежат против соответственно равных сторон DE и AC.

■**Пример 2.5.** Отрезки AB и CD (рис. 36) пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок AC равен 6 м?

Решение. Треугольники AOC и BOD равны (по первому признаку): $\angle AOC = \angle BOD$ (вертикальные), $AO = OB$, $CO = OD$ (по условию).

Из равенства этих треугольников следует равенство их сторон, т. е. $AC = BD$. Но так как по условию $AC = 6$ м, то и $BD = 6$ м.

■**Пример 2.6.** В треугольниках ABC и DEF (см. рис. 35) $AB = EF$, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$. Сравнить эти треугольники. Какие стороны в треугольнике DEF равны соответственно сторонам BC и CA?

Решение. Треугольники ABC и DEF равны по второму признаку. Стороны DF и DE треугольника DEF равны соответственно сторонам BC и CA треугольника ABC, так как стороны DF и BC (DE и CA) лежат против равных углов E и A (F и B).

■**Пример 2.7.** На рисунке 37 углы DAB и CBA, CAB и DBA равны, $CA = 13$ м. Найти DB.

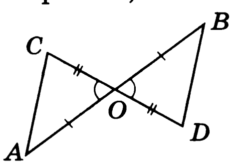


Рис. 36

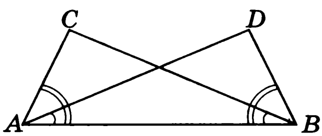


Рис. 37

Решение. Треугольники ACB и ADB имеют одну общую сторону AB и по два равных угла, которые прилежат к этой стороне. Следовательно, треугольники ACB и ADB равны (по второму признаку).

Из равенства этих треугольников следует равенство сторон BD и AC, т. е. $BD = 13$ м.

Замечание. На основе теоремы 2.1 устанавливается теорема 2.3.

Теорема 2.3. ***Сумма любых двух внутренних углов треугольника меньше* 180°.**

Из последней теоремы вытекает теорема 2.4.

Теорема 2.4. ***Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.***

2.3. Свойства равнобедренного треугольника. Третий признак равенства треугольников

Свойства равнобедренного треугольника выражают следующие теоремы.

Теорема 2.5. ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

Теорема 2.6. ***В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.***

Теорема 2.7. ***В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.***

Теорема 2.8. ***В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является биссектрисой и медианой.***

Докажем одну из них, например теорему 2.5.

Доказательство. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 38). Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle B = \angle C$. Теорема доказана.

С использованием теоремы 2.5 устанавливается следующая теорема.

Теорема 2.9. Третий признак равенства треугольников. ***Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны*** (рис. 39).

■**Пример 2.8.** Доказать, что точка плоскости, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Решение. Пусть точка M равноудалена от концов отрезка AB (рис. 40), т. е. $AM = BM$. Тогда $\triangle AMB$ равнобедренный. Проведем через точку M и середину O отрезка AB прямую p. Отрезок MO по построению есть медиана равнобедренного треугольника AMB, а следовательно (теорема 2.7), и высота, т. е. прямая MO, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

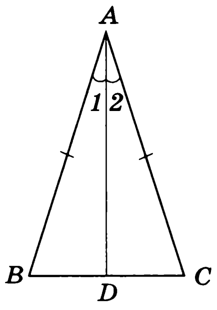


Рис. 38

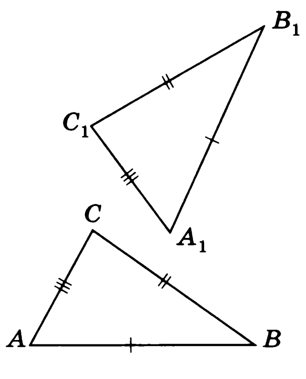


Рис. 39

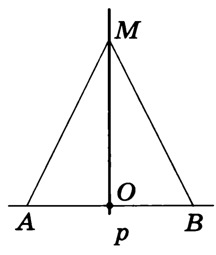


Рис. 40

■**Пример 2.9.** Доказать, что каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.

Решение. Пусть p — серединный перпендикуляр к отрезку AB и точка O — середина отрезка AB (см. рис. 40).

Рассмотрим произвольную точку M, лежащую на прямой p. Проведем отрезки AM и BM. Треугольники AOM и BOM равны, так как у них углы при вершине O прямые, катет OM общий, а катет OA равен катету OB по условию. Из равенства треугольников AOM и BOM следует, что $AM = BM$.

Замечание. Предложения, установленные в примерах 2.8 и 2.9, выражают свойства серединного перпендикуляра к отрезку. Из этих предложений следует, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

■**Пример 2.10.** В треугольнике ABC (см. рис. 35) $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $AC = 7$ см; в треугольнике DEF $DE = 7$ см, $EF = 10$ см, $FD = 9$ см. Сравнить треугольники ABC и DEF. Найти соответственно равные углы.

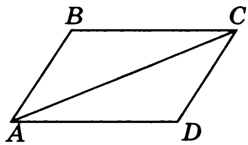


Рис. 41

Решение. Данные треугольники равны по третьему признаку. Соответственно равные углы: A и E (лежат против равных сторон BC и FD), B и F (лежат против равных сторон AC и DE), C и D (лежат против равных сторон AB и EF).

■**Пример 2.11.** На рисунке 41 $AB = DC$, $BC = AD$, $\angle B = 100°$. Найти угол D.

Решение. Рассмотрим треугольники ABC и ADC. Они равны по третьему признаку ($AB = DC$, $BC = AD$ по условию и сторона AC — общая). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle B = \angle D$, но угол B равен 100°, значит, и угол D равен 100°.

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется треугольником? Начертите треугольник и покажите его стороны, вершины и углы. Что такое периметр треугольника?
2. Какой угол называется внешним углом треугольника?
3. Какой отрезок называется биссектрисой треугольника? Сколько биссектрис имеет треугольник?
4. Какой отрезок называется медианой треугольника? Сколько медиан имеет треугольник?
5. Какой отрезок называется высотой треугольника? Сколько высот имеет треугольник?
6. Какой треугольник называется остроугольным? Какой треугольник называется тупоугольным?
7. Какой треугольник называется прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника?
8. Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?
9. Какой треугольник называется равносторонним?
10. Какие треугольники называются равными?
11. Сформулируйте и докажите первый признак равенства треугольников.
12. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.
13. Сформулируйте теорему о сумме двух внутренних углов треугольника.
14. Сформулируйте теорему о соотношении внешнего угла треугольника с его внутренним углом, не смежным с этим внешним.
15. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.
16. Сформулируйте теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.
17. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.

Упражнения

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 2 м, основание равно 0,8 м. Найдите боковую сторону.

2. Треугольник, периметр которого равен 22 см, делится медианой на два треугольника с периметрами 16 см и 12 см. Найдите длину медианы.

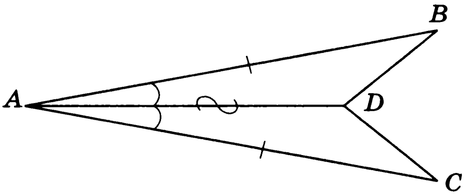


Рис. 42

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если основание меньше боковой стороны на 3 м.

4. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок DB, если отрезок AC равен 8 дм?

5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите равенство треугольников ACO и DBO, если известно, что угол ACO равен углу DBO и $BO = OC$.

6. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, равна 5 см, периметр одного из отсеченных ею треугольников равен 30 см. Найдите периметр равнобедренного треугольника.

7. Треугольники ABC и ABC_1 равнобедренные с общим основанием AB. Докажите равенство треугольников ACC_1 и BCC_1.

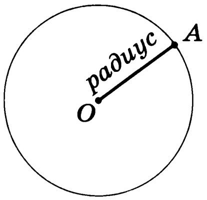
8. По данным рисунка 42: а) докажите, что $BD = CD$; б) найдите $\angle C$, если $\angle B = 53°$; в) найдите DC, если $DB = 14$ мм.

3. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

3.1. Окружность

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром окружности.

Расстояние от точек окружности до ее центра называется *радиусом* окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром (рис. 43).



O — центр окружности

Рис. 43

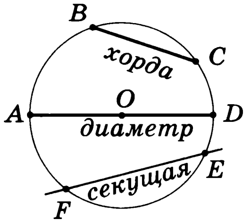


Рис. 44

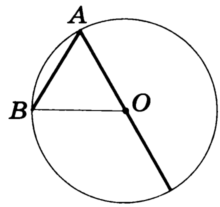


Рис. 45

Прямая, проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется *секущей*.

Отрезок, соединяющий какие-нибудь две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*. На рисунке 44 FE — секущая, BC — хорда, AD — диаметр.

■**Пример 3.1.** Из точки A окружности с центром O (рис. 45) проведены диаметр длиной 4 см и хорда AB. Найти периметр треугольника ABO, если хорда равна радиусу.

Решение. Треугольник ABO равносторонний (OA и OB — радиусы, AB — хорда, равная радиусу). Радиус окружности равен 2 см, так как длина ее диаметра по условию 4 см. Следовательно, периметр треугольника ABO равен 6 см.

3.2. Основные задачи на построение

В задачах на построение будем рассматривать построение геометрической фигуры, которое можно выполнить с помощью линейки и циркуля.

С помощью линейки можно провести:

произвольную прямую;

произвольную прямую, проходящую через данную точку;

прямую, проходящую через две данные точки.

С помощью циркуля можно описать из данного центра окружность данного радиуса.

Циркулем можно отложить отрезок на данной прямой от данной точки.

Рассмотрим основные задачи на построение.

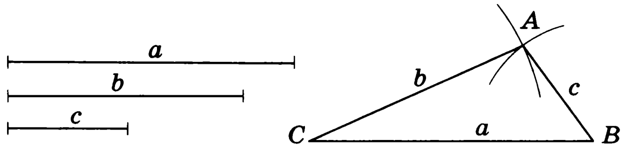


Рис. 46

□**Задача 3.1.** Построить треугольник с данными сторонами a, b, c (рис. 46).

Решение. С помощью линейки проведем произвольную прямую и возьмем на ней произвольную точку B. Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с центром B и радиусом a. Пусть C — точка ее пересечения с прямой. Раствором циркуля, равным c, описываем окружность из центра B, а раствором циркуля, равным b, — окружность из центра C. Пусть A — точка пересечения этих окружностей. Треугольник ABC имеет стороны, равные a, b, c.

Замечание. Чтобы три отрезка прямой могли служить сторонами треугольника, необходимо, чтобы больший из них был меньше суммы двух остальных ($a < b + c$).

□**Задача 3.2.** Отложить от данного луча угол, равный данному.

Решение. Данный угол с вершиной A и луч OM изображены на рисунке 47. Проведем произвольную окружность с центром в вершине A данного угла. Пусть B и C — точки пересечения окружности со сторонами угла (рис. 48, *а*). Радиусом AB проведем окружность с центром в точке O — начальной точке данного луча (рис. 48, *б*). Точку пересечения этой окружности с данным лучом обозначим C_1. Опишем окружность с центром C_1 и радиусом BC. Точка B_1 пересечения

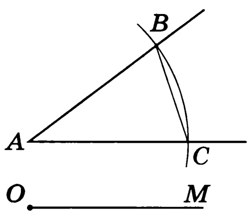


Рис. 47

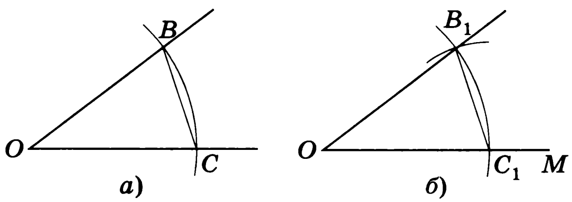


Рис. 48

двух окружностей лежит на стороне искомого угла. Это следует из равенства $\triangle ABC = \triangle OB_1C_1$ (третий признак равенства треугольников).

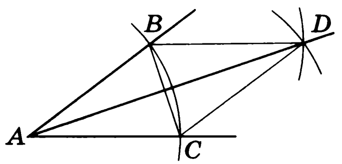
□**Задача 3.3.** Построить биссектрису данного угла (рис. 49).

Решение. Из вершины A данного угла, как из центра, проводим окружность произвольного радиуса. Пусть B и C — точки ее пересечения со сторонами угла. Из точек B и C тем же радиусом описываем окружности. Пусть D — точка их пересечения, отличная от A. Луч AD делит угол A пополам. Это следует из равенства $\triangle ABD = \triangle ACD$ (третий признак равенства треугольников).

□**Задача 3.4.** Провести серединный перпендикуляр к данному отрезку (рис. 50).

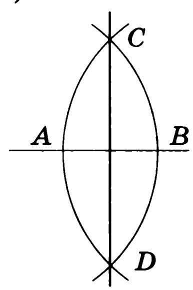
Решение. Произвольным, но одинаковым раствором циркуля $\left(\text{большим } \frac{1}{2}AB\right)$ описываем две дуги с центрами в точках A и B, которые пересекутся между собой в некоторых точках C и D. Прямая CD будет искомым перпендикуляром. Действительно, как видно из построения, каждая из точек C и D одинаково удалена от A и B; следовательно, эти точки должны лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

□**Задача 3.5.** Разделить данный отрезок пополам. Решается так же, как и задача 4 (см. рис. 50).



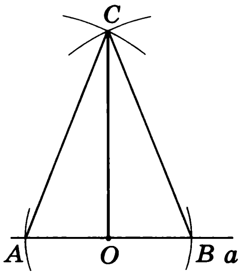
Построение биссектрисы угла

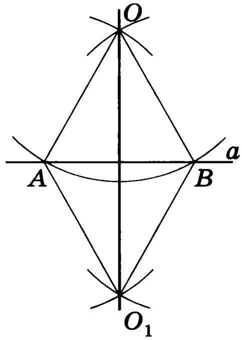
Рис. 49



Построение серединного перпендикуляра к отрезку AB

Рис. 50





Проведение перпендикулярной прямой к данной прямой

Рис. 51 Рис. 52

□**Задача 3.6.** Через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

Решение. Возможны два случая:

1) данная точка O лежит на данной прямой a (рис. 51).

Из точки O проводим произвольным радиусом окружность. Она пересекает прямую a в двух точках A и B. Из точек A и B проводим окружности радиусом AB. Пусть C — точка их пересечения. Получаем $OC \perp AB$. В самом деле, $\triangle ACB$ — равнобедренный, $CA = CB$. Отрезок CO есть медиана этого треугольника, а следовательно, и высота;

2) данная точка O не лежит на данной прямой a (рис. 52).

Из точки O проводим произвольным радиусом окружность, пересекающую прямую a в точках A и B. Из точек A и B тем же радиусом проводим окружности. Пусть O_1 — точка их пересечения, отличная от O. Получаем $OO_1 \perp AB$. В самом деле, точки O и O_1 равноудалены от концов отрезка AB и, следовательно, лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку.

Контрольные вопросы

1. Какая геометрическая фигура называется окружностью? Что называется радиусом окружности?
2. Что такое секущая, хорда окружности? Какая хорда называется диаметром?
3. Объясните, как построить треугольник по трем сторонам.

4. Объясните, как отложить от данного луча угол, равный данному углу.
5. Объясните, как построить биссектрису данного угла.
6. Объясните, как провести серединный перпендикуляр к данному отрезку.
7. Объясните, как разделить данный отрезок пополам.
8. Объясните, как через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной прямой.

Упражнения

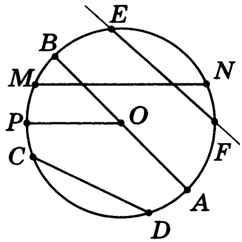


Рис. 53

1. Какие из отрезков, изображенных на рисунке 53, являются: а) хордами окружности; б) диаметрами окружности; в) радиусами окружности; г) секущими окружности?

2. Дана окружность радиуса 3 дм. Какую длину имеет наибольшая ее хорда?

3. Можно ли из точки A, лежащей на окружности радиуса $R = 3$ см, провести хорду длиной 7 см?

4. Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

5. Отрезок MK — диаметр окружности с центром O, а MP и PK — равные хорды этой окружности. Найдите $\angle POM$.

6. Найдите радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, если диаметр большей окружности делится меньшей окружностью на 3 части, равные 9 м, 12 м, 9 м.

4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

4.1. Определение параллельных прямых

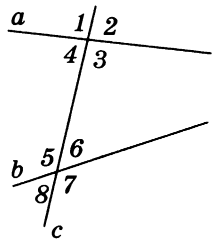
Две различные прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют ни одной общей точки. В первом случае говорят, что прямые пересекаются, во втором случае — прямые не пересекаются.

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так:

$$a \parallel b.$$

Пусть две прямые a и b пересечены третьей прямой c (рис. 54). Прямая c называется *секущей* по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух различных точках. При пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь углов, которые на рисунке 54 отмечены цифрами. Определенные пары углов имеют специальные названия:



1 и *5*, *4* и *8*, *2* и *6*, *3* и *7* — соответственные углы

Рис. 54

соответственные углы: *1* и *5*, *4* и *8*, *2* и *6*, *3* и *7*;

накрест лежащие углы: *3* и *5*, *4* и *6* (внутренние), *1* и *7*, *2* и *8* (внешние);

односторонние углы: *4* и *5*, *3* и *6* (внутренние), *1* и *8*, *2* и *7* (внешние).

4.2. Признаки параллельности двух прямых. Свойства параллельных прямых

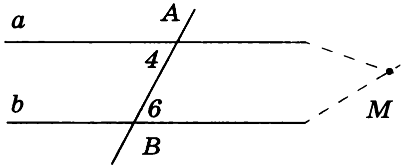
Теорема 4.1. ***Если при пересечении двух прямых секущей:***

1) ***накрест лежащие углы равны, или***

2) ***соответственные углы равны, или***

3) ***сумма односторонних углов равна*** **180°*, то прямые параллельны*** (рис. 55).

Доказательство. Ограничимся доказательством случая 1).



Признаки параллельности двух прямых

Рис. 55

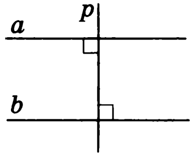


Рис. 56

Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны. Например, $\angle 4 = \angle 6$. Докажем, что $a \parallel b$.

Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке M и, следовательно, один из углов *4* или *6* будет внешним углом треугольника ABM. Пусть для определенности $\angle 4$ — внешний угол треугольника ABM, а $\angle 6$ — внутренний. Из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что $\angle 4$ больше $\angle 6$, а это противоречит условию, значит, прямые a и b не могут пересекаться, поэтому они параллельны.

Следствие 4.1. *Две различные прямые на плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны* (рис. 56).

Замечание. Способ, которым мы только что доказали случай 1) теоремы 4.1, называется *методом доказательства от противного* или приведением к нелепости. Первое название этот способ получил потому, что в начале рассуждения делается предположение, противное (противоположное) тому, что требуется доказать. Приведением к нелепости он называется вследствие того, что, рассуждая на основании сделанного предположения, мы приходим к нелепому выводу (к абсурду). Получение такого вывода заставляет нас отвергнуть сделанное вначале допущение и принять то, которое требовалось доказать.

□**Задача 4.1**. Построить прямую, проходящую через данную точку M и параллельную данной прямой a, не проходящей через точку M.

Решение. Проводим через точку M прямую p перпендикулярно прямой a (рис. 57). Затем проводим через точку M прямую b перпендикулярно прямой p. Прямая b параллельна прямой a согласно следствию из теоремы 4.1.

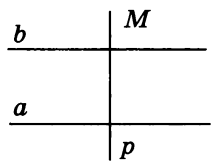


Рис. 57

Из рассмотренной задачи следует важный вывод:

через точку, не лежащую на данной прямой, всегда можно провести прямую, параллельную данной.

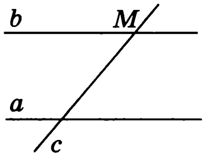


Рис. 58

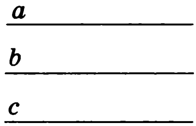


Рис. 59

Основное свойство параллельных прямых состоит в следующем.

Аксиома параллельных прямых. Через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Рассмотрим некоторые свойства параллельных прямых, которые следуют из этой аксиомы.

1) *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую* (рис. 58).

2) *Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны* (рис. 59).

Справедлива и следующая теорема.

Теорема 4.2. ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то***:
1) ***накрест лежащие углы равны***;
2) ***соответственные углы равны***;
3) ***сумма односторонних углов равна*** **180°**.

Следствие 4.2. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой (см. рис. 56).

Замечание. Теорема 4.2 называется *обратной* теореме 4.1. Заключение теоремы 4.1 является условием теоремы 4.2. А условие теоремы 4.1 является заключением теоремы 4.2. Не всякая теорема имеет обратную, т. е. если данная теорема верна, то обратная теорема может быть неверна. Поясним это на примере теоремы о вертикальных углах. Эту теорему можно сформулировать так: *если два угла вертикальные, то они равны*. Обратная ей теорема была бы такой: *если два угла равны, то они вертикальные*. А это, конечно, неверно. Два равных угла вовсе не обязаны быть вертикальными.

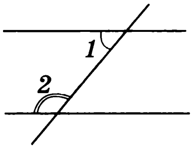


Рис. 60

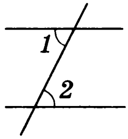


Рис. 61

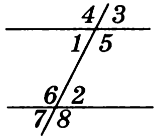


Рис. 62

■**Пример 4.1.** Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что разность двух внутренних односторонних углов равна 30°. Найти эти углы.

Решение. Пусть условию отвечает рисунок 60.

Углы *1* и *2* внутренние односторонние, их сумма равна 180°, т. е.

$$\angle 1 + \angle 2 = 180°. \qquad (1)$$

Обозначим градусную меру угла *1* через x. По условию $\angle 2 - x = 30°$, или $\angle 2 = 30° + x$.

Подставим в равенство (1) значения углов *1* и *2*, получим

$$x + 30° + x = 180°.$$

Решая это уравнение, получим $x = 75°$, т. е.

$$\angle 1 = 75°, \text{ а } \angle 2 = 180° - 75° = 105°.$$

■**Пример 4.2.** Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что сумма двух внутренних накрест лежащих углов равна 150°. Чему равны эти углы и остальные шесть?

Решение. Пусть условию задачи соответствует рисунок 61.

Углы *1* и *2* внутренние накрест лежащие, следовательно, они равны. Сумма этих углов по условию задачи равна 150°, тогда $\angle 1 = \angle 2 = 75°$.

Найдем остальные углы (рис. 62): $\angle 1 = \angle 3 = 75°$ и $\angle 2 = \angle 7 = 75°$ (вертикальные). Углы *4* и *5*, *6* и *8* равны как вертикальные, а $\angle 5 = \angle 6$ как внутренние накрест лежащие. Все перечисленные углы *4*, *5*, *6* и *8* равны между собой и равны по 105°, так как $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, а $\angle 4 = 180° - \angle 3$.

Получили четыре угла по 75°, четыре угла по 105°.

Контрольные вопросы

1. Какие прямые называются параллельными?
2. Что такое секущая по отношению к двум прямым?
3. Какие углы называются накрест лежащими?
4. Какие углы называются соответственными?
5. Объясните, какие углы называются односторонними.
6. Сформулируйте признаки параллельности прямых.
7. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных одной и той же прямой?
8. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.
9. Можно ли утверждать, что две различные прямые, параллельные третьей, параллельны между собой?
10. Сформулируйте теорему об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей.

Упражнения

1. Один из углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 72°. Найдите остальные семь углов.

2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что разность двух внутренних односторонних углов равна 40°. Найдите эти углы.

3. Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что сумма двух внутренних накрест лежащих углов равна 160°. Чему равны эти углы?

4. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой так, что один из образовавшихся углов равен 120°. Под какими углами его биссектриса пересекает вторую параллельную прямую?

5. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

5.1. Теорема о сумме углов треугольника

Теорема 5.1. ***Сумма углов треугольника равна 180°.***

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Проведем через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 63). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

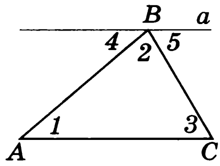


Рис. 63

$$\angle 4 = \angle 1, \angle 5 = \angle 3. \qquad (1)$$

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развернутому углу с вершиной B, т. е.

$$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°.$$

Отсюда, учитывая равенства (1), получаем:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°, \text{ или } \angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна* 90°.

Следствие 5.2. *В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен* 45°.

Следствие 5.3. *В равностороннем треугольнике каждый угол равен* 60°.

Следствие 5.4. *В любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.*

Следствие 5.5. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

Доказательство. Из равенств $\angle 4 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (рис. 64) получаем, что $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

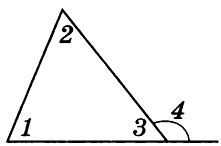


Рис. 64

■**Пример 5.1.** Два угла треугольника равны 27° и 41°. Найти третий угол и определить вид треугольника.

Решение. Так как сумма двух углов треугольника равна 68°, то по теореме о сумме углов треугольника третий угол равен $180° - 68° = 112°$ и, значит, данный треугольник тупоугольный.

■**Пример 5.2.** Какой вид имеет треугольник, в котором один угол равен сумме двух других углов?

Решение. Обозначим через x градусную меру того угла треугольника, который равен сумме двух других углов. Тогда, так как сумма углов треугольника равна 180°, то $2x = 180°$, откуда $x = 90°$, т. е. треугольник прямоугольный.

■**Пример 5.3.** Найти углы треугольника ABC, зная, что угол C на 15° больше, а угол B на 30° меньше угла A.

Решение. Обозначим градусную меру угла A через x, тогда градусная мера угла C равна $x + 15°$, а угол $B = x - 30°$ (рис. 65).

Так как сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то получаем уравнение

$$x + (x + 15°) + (x - 30°) = 180°.$$

Решая его, получаем $x = 65°$. Таким образом,

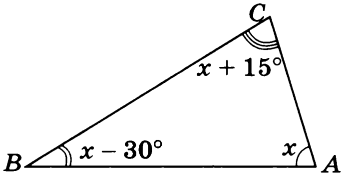


Рис. 65

$$\angle A = 65°, \quad \angle B = 35° \quad \text{и} \quad \angle C = 80°.$$

■**Пример 5.4.** В треугольнике ABC (рис. 66) $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$. Биссектриса AD этого треугольника отсекает от него треугольник ACD. Найти углы этого треугольника.

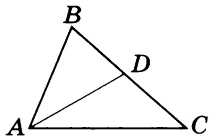


Рис. 66

Решение. $\angle DAB = 30°$, так как AD — биссектриса угла A, $\angle ADC = 30° + 80° = 110°$ как внешний угол треугольника ABD (следствие 5.5), $\angle C = 180° - (110° + 30°) = 40°$ по теореме о сумме углов треугольника ACD.

5.2. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Неравенство треугольника

Теорема 5.2. ***В треугольнике против бóльшей стороны лежит бóльший угол.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис. 67, *а*). Докажем, что

$\angle C > \angle B$. Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 67, *б*). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол *1* является частью угла C и, значит, $\angle C > \angle 1$. Угол *2* — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы *1* и *2* равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$. Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

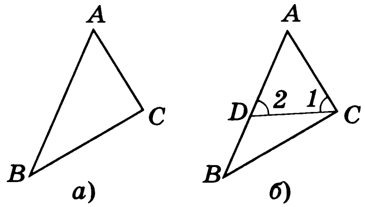


Рис. 67

Справедлива и обратная теорема (ее доказательство проводится методом от противного).

Т е о р е м а 5.3. ***В треугольнике против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона.***

Из теоремы 5.2 вытекает

С л е д с т в и е 5.6. *Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный* (признак равнобедренного треугольника).

Доказательство следствия проводится методом от противного.

Из следствия 5.6 следует, что если три угла треугольника равны, то треугольник равносторонний.

Из теоремы 5.3 получаем

С л е д с т в и е 5.7. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.*

С использованием теоремы 5.3 устанавливается следующая теорема.

Т е о р е м а 5.4. ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.***

С л е д с т в и е 5.8. *Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства:*

$$AB < AC + CB, \; AC < AB + BC, \; BC < BA + AC.$$

Каждое из этих неравенств называется *неравенством треугольника*.

■**Пример 5.5.** Сравнить углы треугольника ABC и выяснить, может ли быть угол A тупым, если $AB > BC > AC$.

Решение. Согласно теореме 5.2 имеем: $\angle C > \angle A > \angle B$. Угол A тупым быть не может, так как тогда $\angle C$ тоже тупой и, значит, $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$, что невозможно (теорема 5.1).

■**Пример 5.6.** Сравнить стороны треугольника ABC, если $\angle A > \angle B > \angle C$.

Решение. Согласно теореме 5.3 имеем: $BC > AC > AB$.

■**Пример 5.7.** Две стороны равнобедренного треугольника равны 6 и 2. Чему равна третья сторона?

Решение. Так как каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (теорема 5.4), то третья сторона может быть равной только 6.

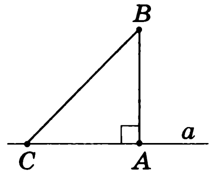
■**Пример 5.8.** Одна сторона треугольника равна 1,5, другая — 0,7. Определить третью сторону, зная, что она выражается натуральным числом.

Решение. Обозначим третью сторону треугольника через x. Тогда $x < 1,5 + 0,7 = 2,2$ (теорема 5.4). Отсюда, учитывая, что эта сторона выражается натуральным числом, следует, что $x = 2$ или $x = 1$.

5.3. Расстояние от точки до прямой

Пусть BA — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, и C — любая точка на прямой a, отличная от A. Отрезок BC называется *наклонной*, проведенной из точки B к прямой a (рис. 68). Точка C называется *основанием* наклонной, а отрезок AC — *проекцией* наклонной. Из прямоугольного треугольника BAC с прямым углом A видим, что наклонная больше перпендикуляра. В этом треугольнике наклонная является гипотенузой, а перпендикуляр — катетом.

Расстоянием от точки *B* до прямой *a*, не проходящей через точку *B*, называется длина перпендикуляра, опущенного из точки *B* на прямую *a*.



$BA \perp a$, BC — наклонная, AC — проекция

Рис. 68

Так как перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из той же точки, то расстояние от точки B до прямой a является наименьшим из расстояний от точки B до любой из точек прямой a.

■**Пример 5.9.** Из точки B вне прямой a проведена наклонная, составляющая с прямой угол в 45°. Найти расстояние от точки B до прямой a, если проекция наклонной на эту прямую равна 1 см.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 68. Треугольник BAC — прямоугольный и равнобедренный: BA — перпендикуляр, $\angle BCA = 45°$ (условие) и, значит, угол CBA тоже равен 45°, так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° (следствие 5.1). Поэтому искомое расстояние $BA = AC = 1$ см.

5.4. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Так как в прямоугольном треугольнике угол между двумя катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников вытекает следствие.

Следствие 5.9. *Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.*

Далее, из второго признака равенства треугольников вытекает следствие.

Следствие 5.10. *Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответ-*

ственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Рассмотрим еще два признака равенства прямоугольных треугольников.

Теорема 5.5. ***Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Из следствия 5.1 следует, что в таких треугольниках два других острых угла также равны, поэтому треугольники равны по второму признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

Теорема 5.6. ***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны*** (рис. 69).

■**Пример 5.10.** Доказать, что каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

Решение. Пусть l — биссектриса $\angle AOB$ (рис. 70).

Рассмотрим произвольную точку M, лежащую на луче l. Опустим из точки M перпендикуляры MC и MD на стороны угла AOB. Прямоугольные треугольники OMC и OMD равны по теореме 5.5: у них гипотенуза OM общая, а углы COM и DOM равны по условию. Отсюда следует, что $MC = MD$.

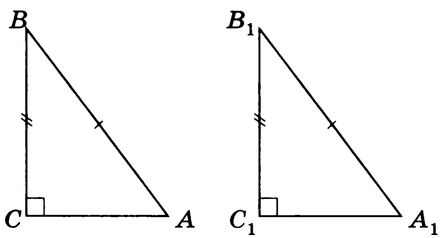


Рис. 69

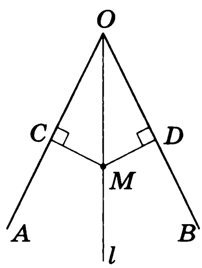


Рис. 70

■**Пример 5.11.** Доказать, что точка плоскости, равноудаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла.

Решение. Пусть точка M равноудалена от сторон угла AOB (см. рис. 70), т. е. перпендикуляры MC и MD к сторонам угла равны. Тогда $\triangle OMC = \triangle OMD$ по теореме 5.6. Отсюда $\angle COM = \angle DOM$, и, следовательно, луч OM является биссектрисой угла AOB.

Замечание. Предложения, установленные в примерах 5.10 и 5.11, выражают свойства биссектрисы угла. Из этих предложений следует, что *биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке*.

■**Пример 5.12.** Доказать, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом B, равным 30° (рис. 71). Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный AC.

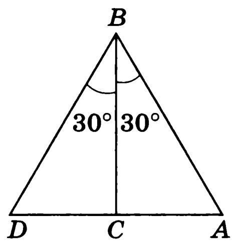


Рис. 71

Прямоугольные треугольники ACB и DCB (углы при вершине C прямые) равны по двум катетам (сторона BC общая, а $AC = CD$ по построению).

Из равенства треугольников следует, что $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle CBD = \angle CBA = 30°$, а значит, $\angle ABD = 60°$. Отсюда следует, что треугольник ABD равносторонний. Поэтому $AC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$, что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы

1. Докажите теорему о сумме углов треугольника.
2. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
3. Чему равен каждый острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника?
4. Чему равны углы равностороннего треугольника?
5. Какими могут быть углы в любом треугольнике?

6. Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.
7. Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Сформулируйте обратную теорему.
8. Сформулируйте признак равнобедренного треугольника.
9. Что такое неравенство треугольника?
10. Что называется расстоянием от точки до прямой?
11. Сформулируйте два признака равенства прямоугольных треугольников, непосредственно следующих из первого и второго признаков равенства треугольников.
12. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.
13. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Упражнения

1. В треугольнике один из углов равен 30°, другой равен 75°. Найдите третий угол треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 42°. Найдите углы при основании.

3. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 40°. Найдите угол при вершине.

4. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите внутренние углы треугольника.

5. В прямоугольном треугольнике один из двух острых углов в 2 раза больше другого. Найдите эти углы.

6. В треугольнике один из углов 50°, а разность двух других 10°. Найдите эти углы треугольника.

7. Найдите сумму внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине.

8. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен 45°. Найдите катеты, если их сумма равна 36 м.

9. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 45°. Найдите гипотенузу, если в сумме с опущенной на нее высотой она составляет 12 м.

10. Сравните стороны треугольника ABC, если $\angle A < \angle B < \angle C$.

11. Две стороны равнобедренного треугольника равны 3 и 1. Чему равна третья сторона?

12. Докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные из вершин основания, равны.

13. Докажите, что треугольник равнобедренный, если он имеет две равные высоты.

14. Из точки вне прямой проведена наклонная, составляющая с прямой угол в 45°. Найдите расстояние от этой точки до прямой, если проекция наклонной на эту прямую равна 3 см.

6. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

6.1. Определение четырехугольника

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Данные точки называются *вершинами* четырехугольника, а соединяющие их отрезки — *сторонами* четырехугольника.

Вершины четырехугольника (рис. 72) называются *соседними*, если они являются концами одной и той же его стороны. *Вершины*, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются *диагоналями*. На рисунке 72 диагоналями являются отрезки AC и BD.

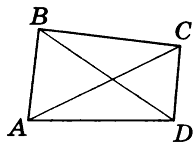


Рис. 72

Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются *смежными сторонами*. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противоположными сторонами*. Четырехугольник называется *выпуклым* (см. рис. 72), если он лежит по одну сторону относительно прямой, содержащей любую его сторону.

6.2. Параллелограмм. Расстояние между параллельными прямыми

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых (рис. 73).

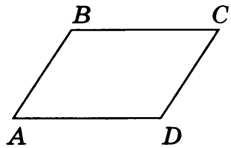


Рис. 73

Теорема 6.1. <u>О свойстве сторон и углов параллелограмма.</u> ***В параллелограмме противоположные стороны равны, противоположные углы равны и сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна* 180°.**

Доказательство. В данном параллелограмме $ABCD$ проведем диагональ AC и получим два треугольника ABC и ADC (рис. 74). Эти треугольники равны, так как $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых), а сторона AC общая. Из равенства $\triangle ABC = \triangle ADC$ следует, что $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle B = \angle D$. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, например углов A и D, равна 180° как односторонних при параллельных прямых. Теорема доказана.

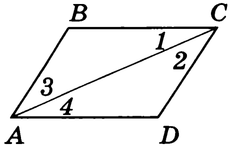


Рис. 74

Замечание. Равенство противоположных сторон параллелограмма означает, что отрезки параллельных, отсекаемых параллельными, равны.

Следствие 6.1. *Если две прямые параллельны, то все точки одной прямой находятся на одном и том же расстоянии от другой прямой.*

Доказательство. В самом деле, пусть $a \parallel b$ (рис. 75). Проведем из каких-нибудь двух точек B и C прямой b перпендикуляры BA и CD к прямой a. Так как $AB \parallel CD$, то фигура $ABCD$ — параллелограмм, и следовательно, $AB = CD$.

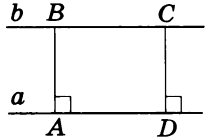


Рис. 75

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется расстояние от произвольной точки одной из прямых до другой прямой.

По доказанному оно равно длине перпендикуляра, проведенного из какой-нибудь точки одной из параллельных прямых к другой прямой.

■ **Пример 6.1.** Периметр параллелограмма равен 122 см. Одна из его сторон больше другой на 25 см. Найти стороны параллелограмма.

Решение. По теореме 6.1 противоположные стороны параллелограмма равны. Обозначим одну сторону параллелограмма через x, другую через y. Тогда по условию

$$\begin{cases} 2x + 2y = 122, \\ x - y = 25. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x = 43$, $y = 18$. Таким образом, стороны параллелограмма равны 18, 43, 18 и 43 см.

■ **Пример 6.2.** Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм с периметром 10 см. Найти диагональ BD, зная, что периметр треугольника ABD равен 8 см.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 76. Обозначим AB через x, а BC через y.

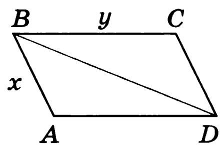


Рис. 76

По условию периметр параллелограмма равен 10 см, т. е.

$$2(x + y) = 10, \text{ или } x + y = 5.$$

Периметр треугольника ABD равен 8 см. А так как

$$AB + AD = x + y = 5,$$

то

$$BD = 8 - 5 = 3.$$

Итак, $BD = 3$ см.

■ **Пример 6.3.** Найти углы параллелограмма, зная, что один из них больше другого на 50°.

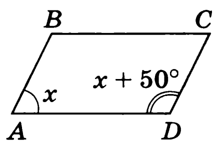


Рис. 77

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 77.

Обозначим градусную меру угла A через x. Тогда градусная мера угла D равна $x + 50°$.

Углы BAD и ADC внутренние односторонние при параллельных прямых AB и DC и секущей AD. Тогда сумма этих названных углов составит $180°$, т. е.

$$x + x + 50° = 180°, \text{ или } x = 65°.$$

Таким образом,

$$\angle A = \angle C = 65°, \text{ а } \angle B = \angle D = 115°.$$

■**Пример 6.4.** Стороны параллелограмма равны 4,5 дм и 1,2 дм. Из вершины острого угла проведена биссектриса. На какие части делит она бо́льшую сторону параллелограмма?

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 78.

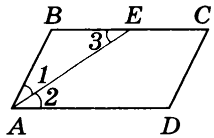


Рис. 78

AE — биссектриса острого угла параллелограмма. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

$BC \parallel AD$, AE — секущая, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$, т. е. $\angle 1 = \angle 3$. А это означает, что треугольник ABE равнобедренный, следовательно, $AB = BE = 1{,}2$ дм.

$EC = BC - BE = 3{,}3$ дм.

■**Пример 6.5.** Прямая AB параллельна прямой CD (рис. 79). Найти расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 45°$, $CD = 1{,}6$ см.

Решение. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра AC. Треугольник ACD — прямоугольный и равнобедренный (AC — перпендикуляр), $\angle ADC = 45°$ по условию, значит, и $\angle CAD = 45°$, ибо в прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна $90°$. Следовательно, $AC = CD = 1{,}6$ см.

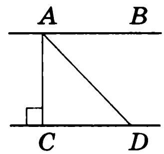


Рис. 79

Т е о р е м а 6.2. <u>Свойство диагоналей параллелограмма.</u> ***Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.***

Следующая теорема выражает признаки параллелограмма.

Т е о р е м а 6.3. ***Если в выпуклом четырехугольнике:***

1) ***противоположные стороны равны между собой, или***

2) ***две противоположные стороны равны и параллельны, или***

3) ***диагонали точкой пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.***

Доказательство проведем для одного из этих признаков, например для признака 1).

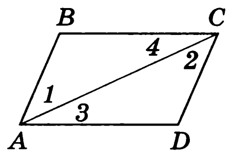


Рис. 80

Пусть $ABCD$ — четырехугольник, у которого $AB = CD$, $BC = AD$ (рис. 80). Докажем, что $ABCD$ — параллелограмм, т. е. что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Проведем диагональ AC и получим два треугольника ABC и ADC. Так как AC — общая сторона, $AB = CD$, $BC = AD$ (по условию), то $\triangle ABC = \triangle ADC$. Поэтому $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 3$, а из равенства накрест лежащих углов следует параллельность прямых: $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$.

■**Пример 6.6.** Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 81) равна 8 см. Найти длину медианы к стороне AC в треугольнике ABC.

Решение. Согласно теореме 6.2 диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому BO — медиана треугольника ABC к стороне AC и

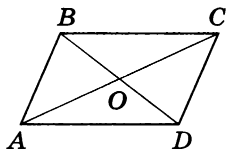


Рис. 81

$BO = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (см).

6.3. Прямоугольник, ромб, квадрат

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 82).

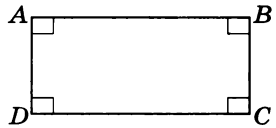


Рис. 82

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.

Теорема 6.4. ***Диагонали прямоугольника равны.***

Доказательство. Обратимся к рисунку 83, на котором изображен прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD = BA$, AD — общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $AC = BD$, что и требовалось доказать.

Справедлива и обратная теорема 6.5.

Теорема 6.5. Признак прямоугольника. ***Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.***

■**Пример 6.7.** Найти длины диагоналей прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 83), если периметр его равен 34 см, а периметр одного из треугольников, на которые диагональ AC разделила прямоугольник, равен 30 см.

Решение. Обозначим периметр прямоугольника $ABCD$ через p, а периметр треугольника ABC — через p_1. Треугольники ABC и ADC равны (третий признак равенства треугольников), значит, равны и их периметры. Имеем

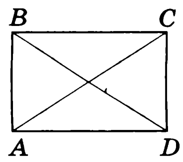


Рис. 83

$$2p_1 - p = 2AC, \text{ или } 60 - 34 = 2AC,$$

откуда $AC = 13$ см, значит (теорема 6.4), и диагональ BD равна 13 см.

■**Пример 6.8.** Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найти периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10.

Решение. Условию задачи отвечает рисунок 84.

$BE = EC$ по условию.

Треугольник ABE прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $AB = BE = 10$.

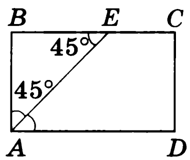


Рис. 84

$$BC = 2 \cdot BE = 2 \cdot 10 = 20.$$

Периметр прямоугольника $ABCD$ состоит из суммы всех его сторон и равен

$$2(AB + BC) = 2(10 + 20) = 60.$$

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны (рис. 85).

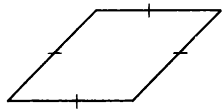


Рис. 85

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

Рассмотрим особое свойство ромба.

Теорема 6.6. ***Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.***

Доказательство. Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 86). Требуется доказать, что $AC \perp BD$ и каждая диагональ делит соответствующие углы ромба пополам. Докажем, например, что $\angle BAC = \angle DAC$.

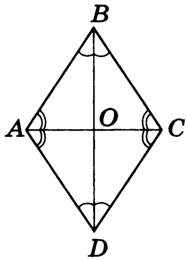


Рис. 86

По определению ромба $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Так как ромб — параллелограмм, то его диагонали точкой O делятся пополам. Следовательно, AO — медиана равнобедренного треугольника BAD, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.

■**Пример 6.9.** Определить углы ромба $ABCD$ (рис. 87) при условии, что его меньшая диагональ AC равна стороне ромба.

Решение. Так как по условию диагональ AC равна стороне ромба (а в ромбе все стороны равны), то треугольник ABC — равносторонний и, значит, $\angle ABC = 60°$. Тогда (теорема 6.1) $\angle BAD = 120°$. Наконец, по той же теореме 6.1 $\angle D = \angle B = 60°$ и $\angle BCD = \angle BAD = 120°$.

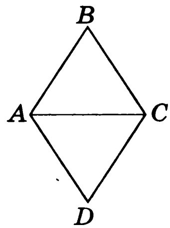


Рис. 87

■**Пример 6.10.** Сторона ромба составляет с его диагоналями два угла, из которых один больше другого на 50%. Вычислить углы ромба.

Решение. Пусть условию задачи удовлетворяет рисунок 86. Обозначим градусную меру угла ABO через x, тогда $\angle BAO = x + 0{,}5x = 1{,}5x$. В силу теоремы 6.6 треугольник AOB — прямоугольный и, значит,

$$x + 1{,}5x = 90°,$$

откуда $x = 36°$. Теперь согласно той же теореме имеем:

$$\angle ABC = 36° \cdot 2 = 72°,$$

следовательно,

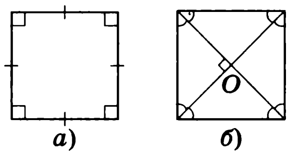
$$\angle BAD = 180° - 72° = 108°.$$

Наконец,

$$\angle ADC = \angle ABC = 72° \text{ и } \angle BCD = \angle BAD = 108°.$$

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны (рис. 88, *а*).

Квадрат является ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба. Основные свойства квадрата следующие.



Основные свойства квадрата

Рис. 88

С в о й с т в о 6.1. *Все углы квадрата прямые* (см. рис. 88, *а*).

С в о й с т в о 6.2. *Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят его углы пополам* (рис. 88, *б*).

■**Пример 6.11.** В квадрате $ABCD$ (рис. 89) расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из сторон равно 1 дм. Определить периметр квадрата.

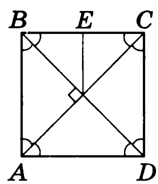


Рис. 89

Решение. В силу основных свойств квадрата треугольник BOC — прямоугольный и равнобедренный. Отсюда и из того, что по условию OE — перпендикуляр, следует, что треугольники BEO и CEO — прямоугольные, равнобедренные и равные.

Значит,

$$OE = BE = \frac{1}{2} BC,$$

откуда

$$BC = 2OE$$

и, значит,

$$BC = 2 \text{ дм}.$$

Следовательно, периметр квадрата равен 8 дм.

6.4. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника

Т е о р е м а 6.7. Теорема Фалеса[1]. ***Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.***

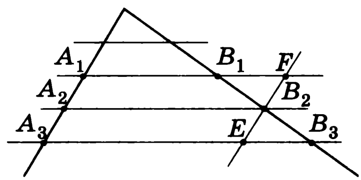


Рис. 90

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла и A_2 лежит между A_1 и A_3 (рис. 90). Пусть B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

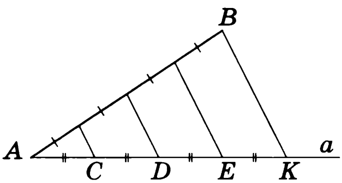
Проведем через точку B_2 прямую EF, параллельную прямой A_1A_3. По свойству параллелограмма

$$A_1A_2 = FB_2, \quad A_2A_3 = B_2E.$$

И так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $FB_2 = B_2E$.

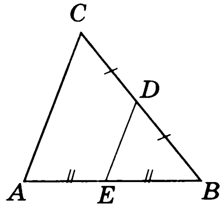
Треугольники B_2B_1F и B_2B_3E равны по второму признаку. У них $B_2F = B_2E$ по доказанному. Углы при вершине B_2 равны как вертикальные, а углы B_2FB_1 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных A_1B_1 и A_3B_3 и секущей EF. Из равенства треугольников следует равенство сторон: $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.

[1] Фалес Милетский — древнегреческий ученый, живший в VI в. до н. э.



Деление отрезка
на четыре равные части

Рис. 91



ED — средняя линия
треугольника ABC

Рис. 92

■**Пример 6.12.** Разделить данный отрезок на четыре равные части.

Решение. Пусть AB — данный отрезок (рис. 91), который надо разделить на 4 равные части.

Для этого через точку A проведем произвольную полупрямую a и отложим на ней последовательно четыре равных между собой отрезка AC, CD, DE, EK.

Соединим точки B и K отрезком. Проведем через оставшиеся точки C, D, E прямые, параллельные прямой BK, так, чтобы они пересекли отрезок AB.

Согласно теореме Фалеса отрезок AB разделится на четыре равные части.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. На рисунке 92 отрезок ED — средняя линия треугольника ABC.

С использованием теоремы Фалеса устанавливается следующая теорема.

Теорема 6.8. ***Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине.***

■**Пример 6.13.** Диагональ прямоугольника равна a. Чему равен периметр четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон прямоугольника?

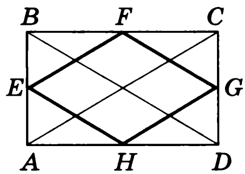


Рис. 93

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 93. Тогда EF — средняя линия треугольника ABC и, значит, по теореме 6.8

$$EF = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}.$$

Аналогично

$$HG = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, \quad EH = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}, \quad FG = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$$

и, следовательно, периметр четырехугольника $EFGH$ равен $2a$.

■**Пример 6.14.** Стороны треугольника равны 2 см, 3 см и 4 см, а вершины его — середины сторон другого треугольника. Найти периметр большого треугольника.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 94. Отрезки AB, BC, AC — средние линии треугольника DEF. Следовательно, согласно теореме 6.8

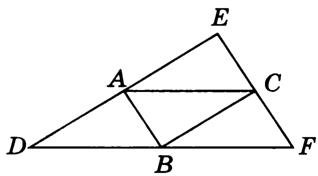


Рис. 94

$$AB = \frac{1}{2}EF, \quad BC = \frac{1}{2}DE,$$

$$AC = \frac{1}{2}DF$$

или

$$2 = \frac{1}{2}EF, \quad 3 = \frac{1}{2}DE, \quad 4 = \frac{1}{2}DF,$$

откуда

$$EF = 4, DE = 6, DF = 8$$

и, значит, периметр треугольника DEF равен 18 см.

■**Пример 6.15.** В прямоугольном треугольнике через середину его гипотенузы проведены прямые, параллельные его катетам. Найти периметр образовавшегося прямоугольника, если катеты треугольника равны 10 см и 8 см.

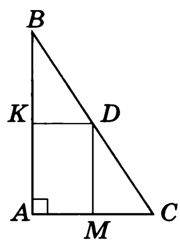


Рис. 95

Решение. В треугольнике ABC (рис. 95) $\angle A$ прямой, $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, KD и MD — средние линии треугольника ABC, откуда

$$KD = \frac{1}{2}AC = 4 \text{ см},$$

$$MD = \frac{1}{2}AB = 5 \text{ см}.$$

Периметр прямоугольника $KDMA$ равен 18 см.

6.5. Трапеция

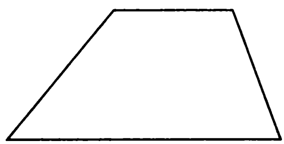
Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны (рис. 96).

Эти параллельные стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми* сторонами.

Отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон, называется *средней линией* трапеции. На рисунке 97 отрезок EF — средняя линия трапеции $ABCD$.

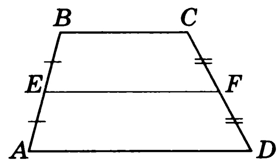
Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой* или *равнобедренной* (рис. 98, *а*).

Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной* (рис. 98, *б*).



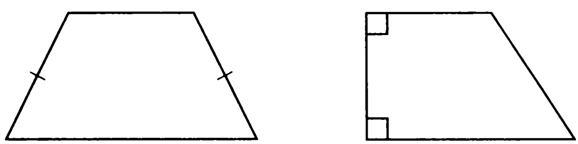
Трапеция

Рис. 96



EF — средняя линия трапеции

Рис. 97



Трапеция

а) равнобедренная *б*) прямоугольная

Рис. 98

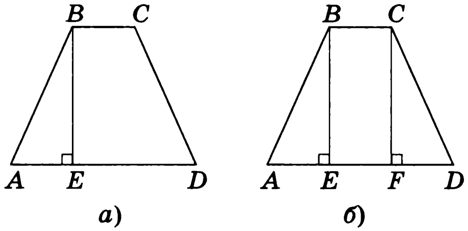


Рис. 99

С использованием теоремы 6.8 устанавливается свойство средней линии трапеции.

Теорема 6.9. ***Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.***

■**Пример 6.16.** В равнобедренной трапеции перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 10 см и 20 см. Найти меньшее основание.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 99, *а*. Проведем второй перпендикуляр из вершины второго тупого угла (рис. 99, *б*). Получили два равных прямоугольных треугольника ABE и CDF. Из равенства этих треугольников следует, что $FD = 10$ см. Значит, $EF = 20 - 10 = 10$ (см). Четырехугольник $EBCF$ — прямоугольник. Следовательно, $BC = EF = 10$ см.

■**Пример 6.17.** Средняя линия трапеции равна 7 м, а одно из оснований больше другого на 4 м. Найти основания трапеции.

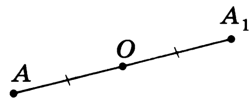
Решение. Обозначим длину меньшего основания через x. Тогда длина большего основания будет $x + 4$. Теперь согласно теореме о средней линии трапеции получаем уравнение

$$\frac{x + x + 4}{2} = 7,$$

решая которое находим $x = 5$. Следовательно, основания трапеции 5 м и 9 м.

6.6. Центральная и осевая симметрии

Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки* O, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 100). Точка O считается симметричной самой себе.



Точки A и A_1 — симметричные относительно O

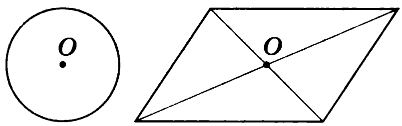
Рис. 100

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется центром симметрии фигуры.

Говорят также, что фигура *обладает центральной симметрией*. Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм (рис. 101). Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точка O на рис. 101), у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является ее центром симметрии.

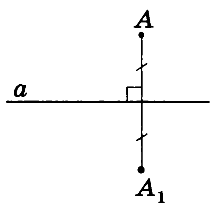
Две точки A и A_1 называются *симметричными относительно* прямой a, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 102). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Фигура называется симметричной относительно прямой a, если для каждой точки фигуры симметричная ей



Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 101



Точки A и A_1 — симметричные относительно прямой a

Рис. 102

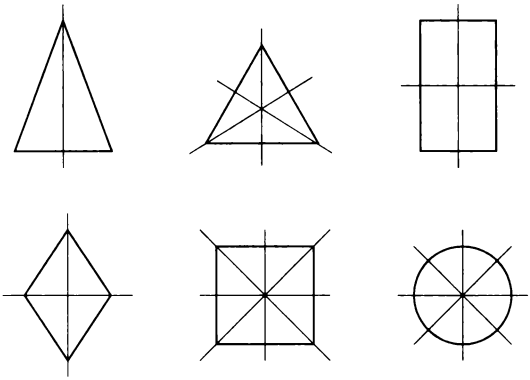


Рис. 103

точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре.

Прямая a называется *осью симметрии фигуры*. Примеры таких фигур и их оси симметрии изображены на рисунке 103. Заметим, что у окружности любая прямая, проходящая через ее центр, является осью симметрии.

6.7. Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$. Говорят, что отрезки AB и CD *пропорциональны отрезкам* A_1B_1 и C_1D_1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 3 см и 1,5 см. В самом деле,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}.$$

Понятие пропорциональности вводится и для большего числа отрезков. Так, например, три отрезка AB, CD и EF *пропорциональны* трем отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}.$$

Теорема 6.10. ***Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.***

Доказательство. Пусть стороны угла A пересекаются параллельными прямыми в точках B, C и B_1, C_1 соответственно (рис. 104). Теоремой утверждается, что

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}. \qquad (1)$$

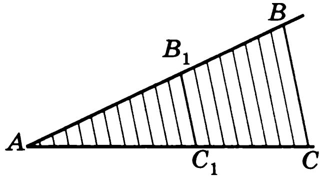


Рис. 104

Пусть существует такой отрезок длины ε, который укладывается целое число раз и на отрезке AC, и на отрезке AC_1. Пусть

$$AC = n\varepsilon, AC_1 = m\varepsilon \ (n > m). \qquad (2)$$

Разобьем отрезок AC на n равных частей (длины ε). При этом точка C_1 будет одной из точек деления. Проведем через точки деления прямые, параллельные прямой BC. По теореме Фалеса эти прямые разбивают отрезок AB на равные отрезки некоторой длины ε_1. Имеем:

$$AB = n\varepsilon_1, \quad AB_1 = m\varepsilon_1.$$

Отсюда и из (2)

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{AC_1}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Значит,

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}.$$

Однако не для любых отрезков AC и AC_1 существует такой отрезок ε, который в каждом из отрезков AC и AC_1 укладывается целое число раз без остатка. Но и в этом случае можно доказать, что равенство (1) выполняется. Теорема доказана.

■ **Пример 6.18.** Даны отрезки a, b, c. Построить отрезок

$$x = \frac{bc}{a}.$$

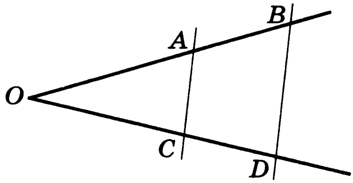
Решение. Строим любой неразвернутый угол с вершиной O (рис. 105). Откладываем на одной стороне угла отрезки $OA = a$ и $OB = b$, а на другой стороне отрезок $OC = c$. Соединяем точки A и C прямой и проводим параллельную ей прямую BD через точку B. Отрезок $OD = x$.

Действительно, по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

откуда

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}.$$



$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA}$$

Рис. 105

Примечание. Построенный отрезок x называется *четвертым пропорциональным*. Такое название связано с тем, что он является четвертым членом пропорции $a : b = c : x$.

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется четырехугольником?
2. Какие вершины четырехугольника называются соседними, какие — противолежащими?
3. Что такое диагонали четырехугольника?
4. Какие стороны четырехугольника называются смежными? Какие называются противоположными?
5. Что такое параллелограмм?
6. Сформулируйте и докажите свойство сторон и углов параллелограмма.
7. Что называется расстоянием между параллельными прямыми?
8. Сформулируйте свойство диагоналей параллелограмма.
9. Сформулируйте признаки параллелограмма.
10. Какой параллелограмм называется прямоугольником?
11. Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
12. Сформулируйте признак прямоугольника.
13. Какой параллелограмм называется ромбом? Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

14. Какой прямоугольник называется квадратом? Сформулируйте основные свойства квадрата.

15. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.

16. Какой отрезок называется средней линией треугольника? Сформулируйте теорему о средней линии треугольника.

17. Какой четырехугольник называется трапецией?

18. Как называются стороны трапеции?

19. Какая трапеция называется равнобедренной, какая — прямоугольной?

20. Какой отрезок называется средней линией трапеции? Сформулируйте теорему о средней линии трапеции.

21. Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

22. Какая фигура называется симметричной относительно данной точки?

23. Какие две точки называются симметричными относительно данной прямой?

24. Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой? Приведите примеры фигур, обладающих: а) центральной симметрией; б) осевой симметрией; в) и центральной, и осевой симметрией.

25. Что называется отношением двух отрезков? В каком случае отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?

Упражнения

1. Угол параллелограмма равен 36°. Найдите остальные углы.

2. Параллелограмм делится одной из его диагоналей на два треугольника, периметр каждого равен 6,21 м, а периметр параллелограмма равен 7,12 м. Найдите длину этой диагонали.

3. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 20 см.

4. Найдите длину диагонали прямоугольника, в котором острый угол между диагоналями равен 60°, а расстояние от точки их пересечения до большей стороны равно 1,25 м.

5. Дан ромб с углом 120° и стороной, равной 3 м. Найдите меньшую диагональ ромба.

6. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид четырехугольника, образованного этими прямыми.

7. Разделите данный отрезок на пять равных частей.

8. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см, 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

9. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 3 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 см.

10. В равнобедренной трапеции перпендикуляр, проведенный из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 6 м и 30 м. Найдите меньшее основание и среднюю линию трапеции.

11. Основания трапеции равны 4 м и 10 м. Найдите длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

12. Имеют ли центр симметрии: 1) отрезок; 2) луч; 3) квадрат?

13. Какие из следующих букв имеют центр симметрии: А, О, М, Х?

14. Сколько осей симметрии имеет: 1) отрезок; 2) прямая; 3) луч?

15. Какие из следующих букв имеют ось симметрии: А, Б, Г, Е, О?

16. Отрезок длиной в 35 см разделен на две части в отношении 3 : 4. Найдите длину каждой части отрезка.

17. Стороны угла BAC_1 пересечены параллельными прямыми BB_1 и CC_1 так, что B и C — на одной стороне угла, а B_1 и C_1 — на другой. Найдите длину отрезка AB_1, если $AB = 5$ см, $BC = 6$ см и $B_1C_1 = 9$ см.

7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

7.1. Определения

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом при вершине A, равным α (рис. 106).

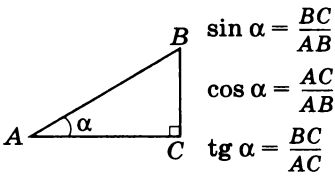


Рис. 106

Косинусом угла α (обозначается $\cos\alpha$) называется отношение прилежащего катета AC к гипотенузе AB:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}. \qquad (1)$$

Синусом угла α (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}. \qquad (2)$$

Тангенсом угла α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему катету AC:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

Косинус, синус и тангенс угла зависят только от величины угла. Поэтому $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ являются функциями угла α. Эти функции называются *тригонометрическими*.

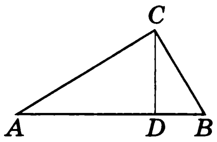
Так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета (следствие 5.7), то $\cos\alpha < 1$ и $\sin\alpha < 1$.

Для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ составлены специальные таблицы. Эти таблицы позволяют по данному углу α найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ или по значениям $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ найти соответствующий угол. Для этой цели используют также и микрокалькуляторы.

7.2. Теорема Пифагора

Теорема 7.1. Теорема Пифагора[1]. ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Доказательство. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведем высоту CD из вершины прямого угла C (рис. 107). Получили два прямоугольных треугольника. По определению косинуса угла A запишем:



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

Рис. 107

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$.

Аналогично $\cos B = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$.

Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$.

Складывая полученные равенства почленно и учитывая, что $AD + DB = AB$, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Теорема доказана.

■ **Пример 7.1.** В прямоугольнике $ACBD$ (рис. 108) стороны равны 5 см и 12 см. Чему равна диагональ AB?

Решение. Из прямоугольного треугольника ACB согласно теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

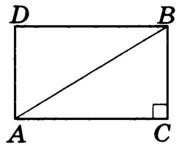


Рис. 108

или

$$AB^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

и, значит,

$$AB = 13 \text{ (см)}.$$

---

[1] Пифагор — древнегреческий ученый, живший в VI в. до н. э.

■**Пример 7.2.** Диагонали ромба $ABCD$ (рис. 109) равны 24 м и 70 м. Найти его сторону.

Решение. Как известно (теорема 6.6), диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам. Поэтому треугольник AOB (см. рис. 109) прямоугольный с катетами 12 м и 35 м и, значит, по теореме Пифагора

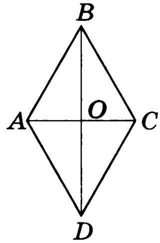


Рис. 109

$$AB = \sqrt{12^2 + 35^2} = \sqrt{144 + 1225} = \\ = \sqrt{1369} = 37 \text{ (м)}.$$

■**Пример 7.3.** Основание равнобедренного треугольника a, боковая сторона b. Найти биссектрису, проведенную из вершины, противолежащей основанию.

Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и CD — его биссектриса (рис. 110). Эта биссектриса является одновременно медианой и высотой. Поэтому $AD = \frac{1}{2}AB$ и треугольник ADC прямоугольный с прямым углом D. По теореме Пифагора

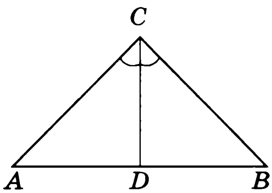


Рис. 110

$$AC^2 = AD^2 + DC^2, \quad b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + DC^2.$$

Отсюда

$$DC = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

7.3. Основные тригонометрические тождества

Используя равенства (1), (2) и (3), имеем:

$$\sin\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Итак, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Это равенство есть тождество. Оно верно для любого острого угла α.

Далее, используя теорему Пифагора (см. рис. 106), находим:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{(AB)^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1. \quad (4)$$

Итак, имеем тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Используя тождество (4), получаем:

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Таким образом:

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Аналогично выводится тождество:

$$1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Полученные тождества позволяют, зная одну из величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ или $\mathrm{tg}\,\alpha$, найти другие.

■**Пример 7.4.** Вычислить значение $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Решение. Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

■**Пример 7.5.** Вычислить значения $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Решение. Имеем

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3}.$$

7.4. Значения тригонометрических функций некоторых углов

Т е о р е м а 7.2. ***Для любого острого угла*** α

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с острым углом α при вершине A (см. рис. 106). Тогда острый угол при вершине B равен $90^\circ - \alpha$. Согласно определению

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB}, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}$$

или, с учетом формул (1) и (2),

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Теорема доказана.

■**Пример 7.6**. Найти значения $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$ и $\mathrm{tg}\, 45^\circ$.

Решение. Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник (рис. 111). В нем каждый острый угол равен 45°. Пусть его катеты равны a. По теореме Пифагора его гипотенуза равна $a\sqrt{2}$. Теперь по определению имеем:

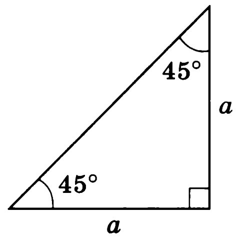


Рис. 111

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \mathrm{tg}\, 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

■**Пример 7.7**. Найти значения $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ и $\mathrm{tg}\, 30^\circ$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен 30° (рис. 112). Пусть его гипотенуза равна c. Так как катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы (при-

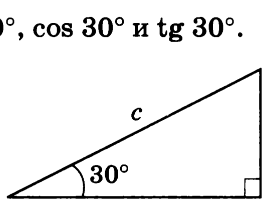


Рис. 112

мер 5.12), то $\sin 30° = \frac{c}{2 \cdot c} = \frac{1}{2}$ и, значит, с учетом примера 7.4 $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

■ **Пример 7.8.** Найти значения $\sin 60°$ и $\operatorname{tg} 60°$.

Решение. Согласно установленной выше теореме имеем:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \sqrt{3}.$$

7.5. Зависимости между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Из равенств (2), (1) и (3) получаем

$$BC = AB \sin\alpha, \ AC = AB\cos\alpha, \ BC = AC \operatorname{tg}\alpha. \qquad (5)$$

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тогда равенства (5) перепишутся в виде

$$a = c\sin\alpha, \quad b = c\cos\alpha, \quad a = b\operatorname{tg}\alpha, \qquad (6)$$

т. е. катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего (этому катету)[1] угла или на косинус прилежащего (этому катету) угла; катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего определяемому катету.

Далее из равенств (6) находим

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{b}{\cos\alpha},$$

т. е. гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего (этому катету) угла или на косинус прилежащего (этому катету) угла.

---

[1] Слова «этому катету», взятые в скобки, обычно опускаются.

7.6. Решение прямоугольных треугольников

Решить прямоугольный *треугольник* — значит вычислить все его стороны и углы по каким-либо данным, определяющим этот треугольник.

Рассмотрим основные случаи решения прямоугольного треугольника.

□**Задача 7.1.** По гипотенузе и острому углу.

Дано: Гипотенуза c и острый угол A. Найти катеты a и b, острый угол B.

Решение. Имеем: $a = c\sin A$, $b = c\cos A$, $\angle B = 90° - \angle A$.

□**Задача 7.2.** По катету и острому углу.

Дано: a и $\angle A$. Найти c, b и $\angle B$.

Решение. Имеем: $c = \dfrac{a}{\sin A}$, $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg} A}$, $\angle B = 90° - \angle A$.

□**Задача 7.3.** По гипотенузе и катету.

Дано: c и a. Найти b, $\angle A$ и $\angle B$.

Решение. Имеем: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$,

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}.$$

□**Задача 7.4.** По двум катетам.

Дано: a и b. Найти c, $\angle A$ и $\angle B$.

Решение. Имеем:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

■**Пример 7.9.**

Дано: $c = 18{,}2$, $\angle A = 32°20'$. Найти a, b и $\angle B$.

Решение. $a = 18{,}2 \cdot \sin 32°20' \approx 18{,}2 \cdot 0{,}5349 \approx 9{,}74$;
$b = 18{,}2 \cdot \cos 32°20' \approx 18{,}2 \cdot 0{,}8450 \approx 15{,}4$;
$\angle B = 90° - 32°20' = 57°40'$.

■**Пример 7.10.**
Дано: $a = 18$, $\angle A = 47°$. Найти c, b и $\angle B$.

Решение. $\angle B = 90° - 47° = 43°$; $c = \dfrac{18}{\sin 47°} \approx \dfrac{18}{0,7314} \approx$ $\approx 24,61$; $b = \dfrac{18}{\sin 47°} \approx \dfrac{18}{1,0724} \approx 18 \cdot 0,9325 \approx 16,79$.

■**Пример 7.11.**
Дано: $c = 65$, $a = 16$. Найти b, $\angle A$ и $\angle B$.

Решение.

$b = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{(65+16)(65-16)} = \sqrt{81 \cdot 49} = 9 \cdot 7 =$ $= 63$; $\sin A = \dfrac{16}{65} \approx 0,2461$, отсюда $\angle A \approx 14°15'$; $\angle B \approx 90° -$ $- 14°15' = 75°45'$.

■**Пример 7.12.**
Дано: $a = 12$, $b = 15$. Найти c, $\angle A$ и $\angle B$.

Решение. $c = \sqrt{12^2 + 15^2} = \sqrt{144 + 225} = \sqrt{369} \approx 19,2$; $\operatorname{tg} A = \dfrac{12}{15} = 0,8$, отсюда $\angle A \approx 38°39'$ и $\angle B \approx 90° - 38°39' =$ $= 51°21'$.

Контрольные вопросы

1. Что называется косинусом, синусом и тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
3. Приведите основные тригонометрические тождества.
4. Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°?
5. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол?
6. Как выражается катет прямоугольного треугольника через другой катет и острый угол?
7. В чем состоит решение прямоугольного треугольника?
8. Каковы основные случаи решения прямоугольного треугольника?

Упражнения

1. Заполните таблицу:

a	b	c	$\sin A$	$\cos A$
5	12	13		

где a, b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC ($\angle A$ противолежит катету a).

2. Заполните таблицу:

a	b	$\operatorname{tg} A$
3	4	
8	15	

где a, b — катеты ($\angle A$ противолежит катету a).

3. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого: 1) 6 см и 8 см; 2) 2,1 см и 2 см.

4. Найдите катет прямоугольного треугольника, если гипотенуза и другой катет соответственно равны 29 см и 21 см.

5. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, сумма гипотенузы и меньшего катета 45 м. Найдите гипотенузу.

6. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен 45°. Найдите катеты, если их сумма равна 36 м.

8. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

8.1. Координатная ось

Координатной осью называется прямая, на которой отмечена точка O (*начало отсчета* или *начало координат*), выбран масштаб, т. е. указан отрезок единичной длины для измерения расстояний (*единичный* или *масштабный отрезок*),

Координатная ось

Рис. 113

и задано положительное направление. Так, на рисунке 113 единичный отрезок на координатной оси Ox обозначен OE, направление от точки O к точке E считается положительным (показано стрелкой). Начало координат O делит координатную ось на два луча: *положительную полуось* (которой принадлежит точка E) и отрицательную полуось.

Координатой точки P, лежащей на оси Ox, называется число $x = \pm OP$ (где OP означает длину отрезка OP), взятое со знаком «плюс», если точка P лежит на положительной полуоси, и со знаком «минус», если эта точка лежит на отрицательной полуоси. Координату точки обычно указывают в скобках рядом с обозначением точки: $P(x)$. Между точками на числовой оси и их координатами имеется взаимно однозначное соответствие. Расстояние между двумя точками $P_1(x_1)$ и $P_2(x_2)$ на оси Ox выражается формулой

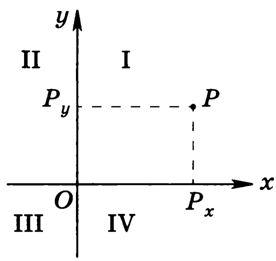
$$|P_1P_2| = |x_1 - x_2|,$$

т. е. оно равно модулю разности соответствующих координат.

8.2. Прямоугольная система координат на плоскости

Прямоугольная (или *декартова*) *система координат на плоскости* задается парой взаимно перпендикулярных координатных осей, имеющих общее начало в точке O и одинаковый масштаб (рис. 114). Оси координат на плоскости обычно обозначают Ox и Oy (оси *абсцисс* и *ординат* соответственно). Координатную плоскость обозначают xOy.

Координатные оси делят плоскость xOy на четыре *квадранта* (или *четверти*): I, II, III, IV. Пусть точка P лежит на плоскости xOy (см. рис. 114). Опустим из этой точки перпендикуляры на координатные оси; основания перпендикуляров обозначим P_x и P_y. *Абсциссой* точки P называется координата x точки P_x на оси Ox, *ординатой* — координата y точки P_y на оси Oy. Координаты точки обычно указывают в скобках рядом с обозначением точки: $P(x; y)$. Между точками на плоскости и их координатами имеется взаимно однозначное соответствие.



Прямоугольная система координат

Рис. 114

8.3. Расстояние между точками

Пусть на плоскости xOy даны две точки: A_1 с координатами x_1, y_1 и A_2 с координатами x_2, y_2. Выразим расстояние между точками A_1 и A_2 через координаты этих точек.

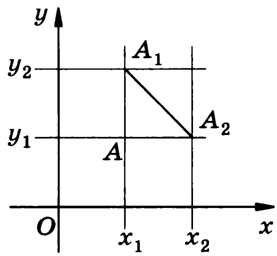


Рис. 115

Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки A_1 и A_2 прямые, параллельные осям координат, и обозначим точку их пересечения буквой A (рис. 115). Расстояние между точками A и A_1 равно $|y_1 - y_2|$, а расстояние между точками A и A_2 равно $|x_1 - x_2|$. Применяя к прямоугольному треугольнику AA_1A_2 теорему Пифагора, получим:

$A_1A_2^2 = AA_1^2 + AA_2^2$, откуда

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \qquad (1)$$

где d — расстояние между точками A_1 и A_2.

Хотя формула (1) для расстояния между точками выведена нами в предположении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, она остается верной и в других случаях. Действительно, если $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то d равно $|y_1 - y_2|$. Тот же результат дает и формула (1). Аналогично рассматривается случай, когда $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. При $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ точки A_1 и A_2 совпадают и формула (1) дает $d = 0$.

■ **Пример 8.1.** Найти расстояние между точками $A(-1; -2)$ и $B(-4; 2)$.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$d = AB = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

8.4. Координаты середины отрезка

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — две произвольные точки и $C(x; y)$ — середина отрезка AB. Найдем координаты x, y точки C. Рассмотрим сначала случай, когда отрезок AB не параллелен оси Oy, т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведем через точки A, B, C

прямые, параллельные оси Oy (рис. 116). Они пересекут ось Ox в точках $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$, $C_1(x;\ 0)$. По теореме Фалеса точка C_1 будет серединой отрезка A_1B_1.

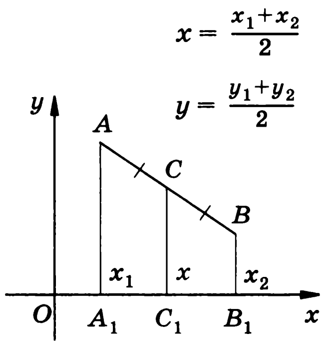


Рис. 116

Так как точка C_1 — середина отрезка A_1B_1, то $A_1C_1 = C_1B_1$. При выбранном расположении точек имеем:

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad C_1B_1 = x_2 - x$$

и, значит,

$$x - x_1 = x_2 - x,$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{2}$$

Аналогично получим:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3}$$

Примечание. Формулы (2) и (3) верны при любом расположении точек A и B.

■**Пример 8.2.** Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $A(1;\ 0)$, $C\ (3;\ 2)$. Найти координаты точки пересечения диагоналей.

Решение. Точка пересечения диагоналей является серединой каждой из них. Поэтому она является серединой отрезка AC и имеет координаты

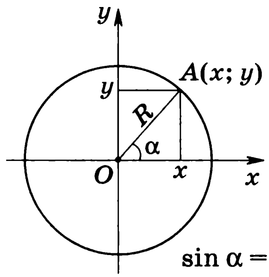
$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{0+2}{2} = 1.$$

8.5. Определение тригонометрических функций для любого угла от 0 до 180°

До сих пор значения синуса, косинуса и тангенса были определены только для острых углов. Теперь мы определим их для любого угла от 0 до 180°. Возьмем окружность на плоскости xOy с центром в начале координат и радиусом R

(рис. 117). Пусть α — острый угол, который образует радиус OA с положительной полуосью Ox. Пусть x и y — координаты точки A. Значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ для острого угла α выражаются через координаты точки A, а именно:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\quad \cos\alpha = \frac{x}{R},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$



$\sin\alpha = \frac{y}{R}$

$\cos\alpha = \frac{x}{R}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

Рис. 117

Определим теперь значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ *для любого угла* α. (Для $\operatorname{tg}\alpha$ угол $\alpha = 90°$ исключается.)

Имеем:

$$\sin 90° = \frac{R}{R} = 1,\ \cos 90° = \frac{0}{R} = 0,$$

$$\sin 180° = \frac{0}{R} = 0,\ \cos 180° = -\frac{R}{R} = -1.$$

Считая, что совпадающие лучи образуют угол 0°, будем иметь:

$$\sin 0° = 0,\quad \cos 0° = 1,\quad \operatorname{tg} 0° = 0.$$

Теорема 8.1. ***Для любого угла* α, $0° < \alpha < 180°$,**

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

***Для угла* $\alpha \neq 90°$ $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.**

Доказательство. Треугольники OAB и OA_1B_1 равны по гипотенузе и острому углу (рис. 118). Из равенства треугольников следует, что $AB = A_1B_1$, т. е. $y = y_1$, $OB = OB_1$, следовательно, $x = -x_1$. Поэтому

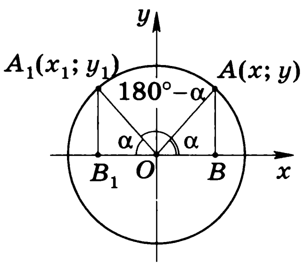


Рис. 118

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

Разделив почленно равенство $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ на равенство $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, получаем:

$$\mathrm{tg}\,(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Теорема доказана.

■**Пример 8.3.** Вычислить: 1) $\sin 135°$; 2) $\cos 135°$; 3) $\mathrm{tg}\, 150°$.

Решение. Согласно только что доказанной теореме:
1) $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45°$;
2) $\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45°$;
3) $\mathrm{tg}\, 150° = \mathrm{tg}(180° - 30°) = -\mathrm{tg}\, 30°$.

Но $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Следовательно,

$$\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{tg}\, 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется координатной осью?
2. Что называется координатой точки, лежащей на оси Ox?
3. Объясните, как вводится прямоугольная система координат на плоскости.
4. Приведите формулу для вычисления расстояния между двумя точками по их координатам.
5. Напишите формулы координат середины отрезка.
6. Дайте определения синуса, косинуса и тангенса для любого угла от 0 до 180°.
7. Докажите, что для любого угла α, $0° < \alpha < 180°$, $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$.

Упражнения

1. Найдите расстояние от точки (–3; 4) до оси: 1) Ox; 2) Oy.

2. Найдите расстояние между точками $A(-1; -2)$ и $B(-4; 2)$.

3. Найдите координаты середины отрезка AB, если $A(1; -2)$, $B(5; 6)$.

4. Вычислите синусы углов: 1) 120°; 2) 150°.

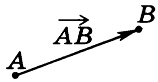
5. Вычислите косинусы углов: 1) 120°; 2) 150°.

6. Вычислите тангенсы углов: 1) 135°; 2) 120°.

9. ВЕКТОРЫ

9.1. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок, имеющий определенную длину, т. е. отрезок определенной длины, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая — за конец. Если A — начало вектора и B — его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или $\overline{AB}$). Обычно векторы обозначают одной малой латинской буквой со стрелкой (или с чертой) либо выделяют жирным шрифтом: $\vec{a}$, $\overline{a}$, $\boldsymbol{a}$. Вектор изображается отрезком со стрелкой на конце (рис. 119).



Вектор $\overrightarrow{AB}$

Рис. 119

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ называется его абсолютной величиной или *модулем* и обозначается символом $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор $\vec{a}$, у которого $|\vec{a}| = 1$, называется *единичным*.

Вектор называется *нулевым* (обозначается $\vec{0}$ или $\mathbf{0}$), если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

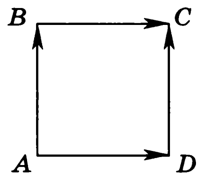
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. В этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$. Все нулевые векторы считаются равными.

Из определения равенства векторов непосредственно следует, что, каковы бы ни были вектор $\vec{a}$ и точка P, существует, и притом единственный, вектор $\overrightarrow{PQ}$ с началом в точке P, равный вектору $\vec{a}$. В самом деле, существует лишь одна прямая, проходящая через точку P и параллельная той прямой, на которой лежит вектор $\vec{a}$. На указанной прямой существует единственная точка Q такая, что отрезок PQ имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, и направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$. Таким образом, вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку плоскости.

■**Пример 9.1.** Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 120). На основании определения равенства векторов можно записать $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, но $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DC}$, хотя $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DC}|$.

■**Пример 9.2.** Какой вид имеет четырехугольник $ABCD$, если известно, что $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$?



$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DC}|$

Рис. 120

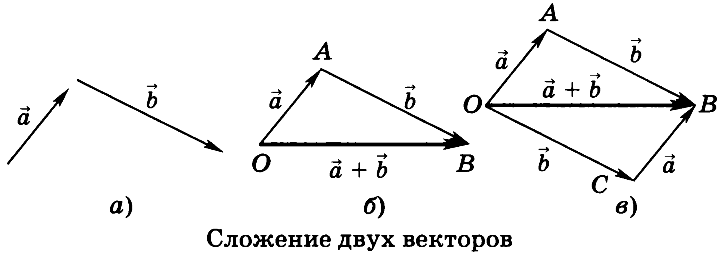
Решение. Из равенства $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ следует, что стороны AD и BC в четырехугольнике равны и параллельны и, значит (теорема 6.3), он параллелограмм.

Два коллинеарных вектора (отличные от нулевых векторов), имеющие равные модули, но противоположно направленные, называются *противоположными*.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$. Для вектора $\overrightarrow{AB}$ противоположным является вектор $\overrightarrow{BA}$.

9.2. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора (рис. 121, *а*). Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Затем от точки A от-



Сложение двух векторов

Рис. 121

ложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом второго (рис. 121, *б*), называется *суммой* этих векторов и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ (*правило треугольника*).

Ту же самую сумму векторов можно получить иным способом. Отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ (рис. 121, *в*). Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмм $OABC$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, служащий диагональю этого параллелограмма, проведенной из вершины O, является, очевидно, суммой векторов $\vec{a} + \vec{b}$ (*правило параллелограмма*). Из рисунка 121, *в* непосредственно следует, что сумма двух векторов обладает переместительным свойством:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Действительно, каждый из векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$ равен одному и тому же вектору $\overrightarrow{OB}$.

■**Пример 9.3.** В треугольнике ABC $AB = 3$, $BC = 4$, $\angle B = 90°$. Найти: а) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$.

Решение. а) Имеем: $|\overrightarrow{AB}| = AB$, $|\overrightarrow{BC}| = BC$ и, значит, $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = 7$.

б) Так как $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, то $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Теперь, применяя теорему Пифагора, находим

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

т. е. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 5$.

Понятие суммы векторов можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых векторов.

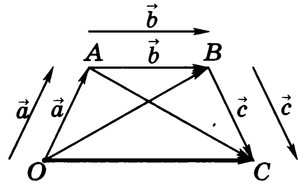
Пусть, например, даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 122). Построив сначала сумму векторов $\vec{a} + \vec{b}$, а затем прибавив к этой сумме вектор $\vec{c}$, получим вектор $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. На рисунке 122

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{AB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b},\ \overrightarrow{BC} = \vec{c}$$

и

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Из рисунка 122 видно, что тот же вектор $\overrightarrow{OC}$ мы получим, если к вектору $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ прибавим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b} + \vec{c}$. Таким образом,



Сложение трех векторов

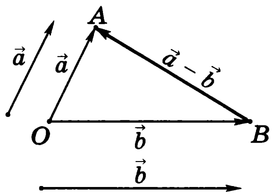
Рис. 122

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

т. е. сумма векторов обладает сочетательным свойством. Поэтому сумму трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ записывают просто $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Таким образом, если $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Из определения суммы двух векторов вытекает правило построения вектора-разности (рис. 123). Откладываем векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ из общей точки O. Вектор $\overrightarrow{BA}$, соединяющий концы уменьшаемого вектора $\vec{a}$ и вычитаемого вектора $\vec{b}$ и направленный от вычитаемого к уменьшаемому, является разностью $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Действительно, по правилу сложения векторов



Вычитание векторов

Рис. 123

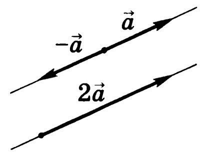
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}, \quad \text{или} \quad \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

■**Пример 9.4.** Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найти: а) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

Решение. а) Так как $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$, а $|\overrightarrow{CA}| = a$, то $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = a$.

б) Так как $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, а $|\overrightarrow{CB}| = a$, то $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$.

Произведением вектора $\vec{a}$ (обозначается $\lambda\vec{a}$ или $\vec{a}\lambda$) на действительное число λ называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\lambda||\vec{a}|$, и то же направление, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и направление, противоположное направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Так, например, $2\vec{a}$ есть вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, а длину, вдвое бóльшую, чем вектор $\vec{a}$ (рис. 124).



Умножение вектора на число

Рис. 124

В случае, когда $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, произведение $\lambda\vec{a}$ представляет собой нулевой вектор. Противоположный вектор $-\vec{a}$ можно рассматривать как результат умножения вектора $\vec{a}$ на $\lambda = -1$ (см. рис. 124):

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

Очевидно, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

■**Пример 9.5.** Доказать, что если O, A, B и C — произвольные точки, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$.

Решение. Сумма векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OC}$, вектор $\overrightarrow{CO}$ — противоположный вектору $\overrightarrow{OC}$. Поэтому

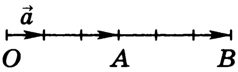
$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}.$$

Пусть дан вектор $\vec{a}$. Рассмотрим единичный вектор $\overrightarrow{a_0}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и одинаково с ним направленный. Из определения умножения вектора на число следует, что

$$\vec{a} = |\vec{a}|\overrightarrow{a_0},$$

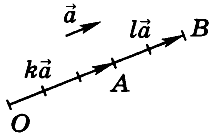
т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления. Далее из того же определения следует, что если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, где $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и обратно, из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Таким образом, получаем следующую теорему.



$$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} = 2(3\vec{a});$$
$$\overrightarrow{OB} = 6\vec{a} = (2 \cdot 3)\vec{a}$$

Рис. 125



$$\overrightarrow{OA} = k\vec{a};\ \overrightarrow{AB} = l\vec{a};\ \overrightarrow{OB} = (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

Рис. 126

Теорема 9.1. ***Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство***

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами.

Свойства. Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы следующие равенства.

9.1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (*сочетательный закон*).

9.2. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (*первый распределительный закон*).

9.3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (*второй распределительный закон*).

Рисунок 125 иллюстрирует сочетательный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k = 2$, $l = 3$.

Рисунок 126 иллюстрирует первый распределительный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k = 3$, $l = 2$.

Примечание. Рассмотренные свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например, выражение

$$\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$$

можно преобразовать так:

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c}.$$

■ **Пример 9.6.** Коллинеарны ли векторы $2\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

Решение. Имеем $2\vec{a} = -2(-\vec{a})$. Значит, данные векторы коллинеарны.

■**Пример 9.7.** Дан треугольник ABC. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Решение. а) Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ — противоположные, поэтому $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

б) По правилу треугольника $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$.

Но $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, поэтому

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}.$$

в) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{b}.$

9.3. Координаты вектора

Обозначим через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ единичные векторы, отложенные от точки O в положительных направлениях на осях Ox и Oy прямоугольной системы координат (рис. 127).

Пусть $\vec{a}$ — любой вектор на плоскости xOy. Тогда вектор $\vec{a}$ можно представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (1)$$

и притом единственным образом.

Если вектор $\vec{a}$ представлен в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, то говорят, что $\vec{a}$ разложен по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Векторы $\vec{a}_x = x\vec{i}$ и $\vec{a}_y = y\vec{j}$ называют *составляющими вектора $\vec{a}$ по осям Ox и Oy*. Коэффициенты x и y разложения вектора $\vec{a}$ по единичным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называют *координатами* вектора $\vec{a}$ в данной системе координат и записывают $\vec{a}\,\{x; y\}$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

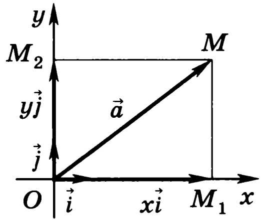


Рис. 127

Из единственности представления (1) следует, что равные векторы имеют равные соответствующие координаты, и обратно, если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

Пусть дана точка $M(x; y)$. Тогда

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

где x и y — координаты точки M, т. е. $\vec{r}\,\{x; y\}$, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Теорема 9.2. ***Каждая координата суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна сумме соответствующих координат этих векторов; каждая координата произведения вектора $\vec{a}$ на число k равна произведению соответствующей координаты этого вектора на число k.***

Доказательство. Пусть

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Пользуясь свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим

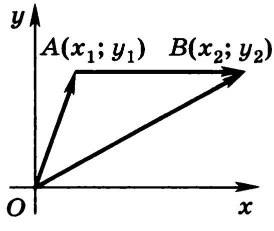
$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Аналогично доказывается:

$$k\vec{a} = k(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (kx_1)\vec{i} + (ky_1)\vec{j}.$$

Значит, координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $x_1 + x_2$ и $y_1 + y_2$, координаты вектора $k\vec{a}$ равны kx_1 и ky_1. Теорема доказана.

Следствие 9.1. *Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, равны разностям соответствующих координат точек A и B.*



$\overrightarrow{AB}\,\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$

Рис. 128

Доказательство. Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 128). Так как $\overrightarrow{OA}\,\{x_1; y_1\}$, $\overrightarrow{OB}\,\{x_2; y_2\}$, то по теореме 9.2

$$\overrightarrow{AB}\,\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}.$$

■**Пример 9.8.** Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}\,\{3; 2\}$, $\vec{b}\,\{-3; 1\}$.

Решение. Согласно полученной теореме 9.2

$$x = 3 - 3 \cdot (-3) = 12,\ y = 2 - 3 \cdot 1 = -1.$$

■**Пример 9.9.** Найти координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если $A(1; 3)$ и $B(5; 8)$.

Решение. Согласно следствию 9.1

$$x = 5 - 1 = 4,\ y = 8 - 3 = 5.$$

9.4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$ (обозначается $\vec{a}\vec{b}$) называется число $x_1x_2 + y_1y_2$. Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$. Очевидно, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что для любых векторов $\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$, $\vec{c}\,\{x_3; y_3\}$

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

Действительно, левая часть равенства есть $(x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3$, а правая $x_1x_3 + y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3$. Очевидно, они равны.

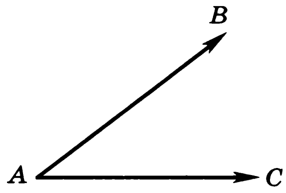


Рис. 129

Углом между ненулевыми векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC (рис. 129). Углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Теорема 9.3. ***Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.***

Из этой теоремы получаем следствия.

Следствие 9.2. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Следствие 9.3. Если скалярное произведение отличных от нуля векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

■**Пример 9.10.** Даны векторы $\vec{a}\{1;\ 0\}$ и $\vec{b}\{1;\ 1\}$. Найти такое число λ, чтобы вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

Решение. Имеем: $\vec{a}(\vec{a} + \lambda\vec{b}) = 0$, $\vec{a}^2 + \lambda\,(\vec{a}\vec{b}) = 0$. Отсюда

$$\lambda = -\frac{\vec{a}^2}{\vec{a}\vec{b}} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Что называется абсолютной величиной вектора?
3. Какой вектор называется единичным?
4. Какой вектор называется нулевым?
5. Какие векторы называются коллинеарными?
6. Дайте определение равных векторов.
7. Какие векторы называются противоположными?
8. Какой вектор называется суммой двух векторов?
9. Какой вектор называется разностью двух векторов?
10. Какой вектор называется произведением данного вектора и данного действительного числа?
11. В чем состоит разложение вектора по осям Ox и Oy?
12. Что называют координатами вектора?
13. Сформулируйте правила нахождения координат суммы и разности векторов, а также произведения вектора на число по заданным координатам векторов.
14. Что такое скалярное произведение двух векторов?
15. Как определяется угол между векторами?
16. Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?

Упражнения

1. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Найдите длины векторов: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{AC}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Равны ли векторы: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; 4) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{OC}$?

3. $ABCD$ — параллелограмм. Докажите равенство $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

4. Коллинеарны ли векторы $3\vec{a} - 2\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$?

5. Дан вектор $\vec{a}\ \{3k;\ 4k\}$, где $k > 0$. Выразите длину вектора $\vec{a}$ через k.

6. Даны векторы $\vec{a}\ \{3;\ 4\}$, $\vec{b}\ \{-1;\ 2\}$. Найдите координаты векторов: 1) $\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $3\vec{a} - \vec{b}$.

7. Найдите координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если $A\ (2;\ 7)$ и $B\ (-2;\ 7)$.

8. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}\ \{4;\ 1\}$ и $\vec{b}\ \{2;\ -8\}$.

10. ПОДОБИЕ

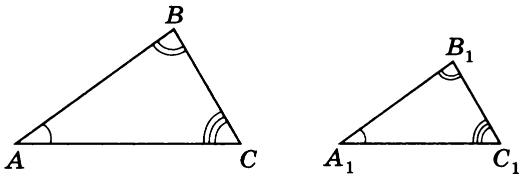
10.1. Определение подобных треугольников

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 130) называются *подобными*, если

$$\angle A = \angle A_1,\ \ \angle B = \angle B_1,\ \ \angle C = \angle C_1$$[1]

и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1},$$



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 130

[1] В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 называются *сходственными*.

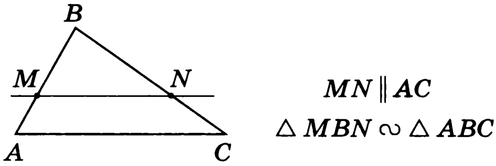


Рис. 131

т. е. углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника и стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то пишут $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

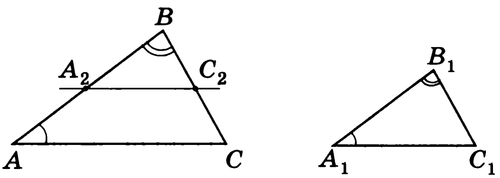
ЛЕММА 10.1[1]. ***Прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному*** (рис. 131).

Доказательство леммы проводится с помощью теоремы 6.10 о пропорциональных отрезках.

10.2. Признаки подобия треугольников

Теорема 10.1. Первый признак подобия треугольников. ***Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.***

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — треугольники, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, и, следовательно, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 132).



$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1 \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

Рис. 132

[1] *Леммой* называется вспомогательная теорема, которая излагается для того, чтобы при ее помощи доказать следующую за ней теорему.

Отложим на BA от точки B отрезок BA_2, равный отрезку A_1B_1, и через точку A_2 проведем прямую, параллельную прямой AC. Эта прямая пересечет BC в некоторой точке C_2. Треугольники $A_1B_1C_1$ и A_2BC_2 равны: $A_1B_1 = A_2B$ по построению, $\angle B = \angle B_1$ по условию и $\angle A_1 = \angle A_2$, так как $\angle A_1 = \angle A$ по условию и $\angle A = \angle A_2$ как соответственные углы. По лемме 10.1 о подобных треугольниках имеем: $\triangle A_2BC_2 \sim \triangle ABC$, и значит, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

По аналогичной схеме устанавливаются теоремы 10.2 и 10.3.

Теорема 10.2. Второй признак подобия треугольников. ***Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то треугольники подобны.***

Теорема 10.3. Третий признак подобия треугольников. ***Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.***

Из теоремы 10.1 вытекает следующее.

Следствие 10.1. *В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны сходственным высотам, т. е. тем высотам, которые опущены на сходственные стороны.*

■**Пример 10.1.** Подобны ли два равносторонних треугольника?

Решение. Так как в равностороннем треугольнике каждый внутренний угол равен 60° (следствие 5.3), то два равносторонних треугольника подобны по первому признаку.

■**Пример 10.2.** В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найти неизвестные стороны треугольников.

Решение. Треугольники, определенные условием задачи, подобны по первому признаку подобия.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \quad (1)$$

Подставив в равенство (1) данные из условия задачи, получим:

$$\frac{5}{10} = \frac{7}{B_1C_1} = \frac{AC}{8}. \quad (2)$$

Из равенства (2) составим две пропорции

$$\frac{5}{10} = \frac{7}{B_1C_1}, \quad \frac{5}{10} = \frac{AC}{8},$$

откуда $B_1C_1 = 14$ (м), $AC = 4$ (м).

■ **Пример 10.3.** Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны AB и BC треугольника ABC в 2,5 раза больше сторон A_1B_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Найти AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 133.

Из условия задачи:

1) $\angle B = \angle B_1$;

2) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = 2{,}5$;

3) $AC + A_1C_1 = 4{,}2$ м.

Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Из подобия этих треугольников следует

$$\frac{AC}{A_1C_1} = 2{,}5, \text{ или } AC = 2{,}5 \cdot A_1C_1.$$

Так как $AC = 2{,}5 \cdot A_1C_1$, то $AC + A_1C_1 = 2{,}5 \cdot A_1C_1 + A_1C_1 = 4{,}2$, откуда $A_1C_1 = 1{,}2$ (м), $AC = 3$ (м).

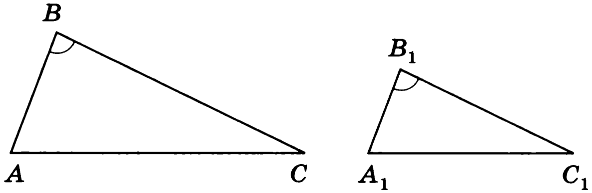


Рис. 133

■**Пример 10.4.** Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см, $A_1B_1 = 4{,}5$ см, $B_1C_1 = 7{,}5$ см, $A_1C_1 = 10{,}5$ см?

Решение. Имеем:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{1}{1{,}5}, \quad \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{1}{1{,}5},$$

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{7}{10{,}5} = \frac{1}{1{,}5}.$$

Следовательно, треугольники подобны по третьему признаку.

■**Пример 10.5.** Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведем среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (рис. 134).

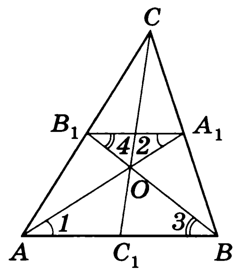


Рис. 134

Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны:

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O.

Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Замечание. Ранее отмечалось, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. На основе последнего утверждения устанавливается, что и высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Эти три точки и точка пересечения медиан называются *замечательными точками треугольника*.

10.3. Подобие произвольных фигур. Преобразование фигур

■Понятие подобия можно ввести не только для треугольников, но и для произвольных фигур. Фигуры F и F_1 называются *подобными*, если каждой точке фигуры F можно сопоставить точку фигуры F_1 так, что для любых двух точек M и N фигуры F и сопоставленных им точек M_1 и N_1 фигуры F_1 выполняется условие $\frac{M_1N_1}{MN} = k$, где k — одно и то же положительное число для всех точек. При этом предполагается, что каждая точка фигуры F_1 оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры F. Число k называется *коэффициентом подобия* фигур F и F_1.

На рисунке 135 представлен способ построения фигуры F_1, подобной данной фигуре F. Каждой точке M фигуры F сопоставляется точка M_1 плоскости так, что точки M и M_1 лежат на луче с началом в некоторой фиксированной точке O, причем $OM_1 = k \cdot OM$ (на рис. 135 $k = 3$). В результате такого сопоставления получается фигура F_1, подобная фигуре F.

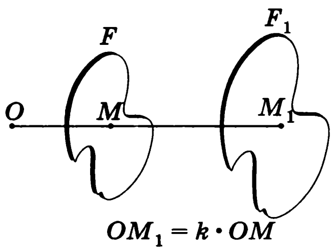


Рис. 135

Этот способ построения фигуры F_1, подобной фигуре F, называется *центрально-подобным* преобразованием фигуры F в фигуру F_1 или *гомотетией*, а фигуры F и F_1 — *центрально-подобными* или *гомотетичными*.

Можно доказать, что для треугольников общее определение подобия равносильно определению, данному в п. 10.1.

Примерами подобных четырехугольников являются любые два квадрата (рис. 136, *а*), а также два прямоугольника,

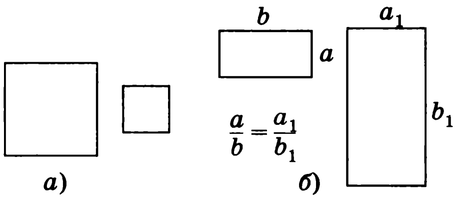


Рис. 136

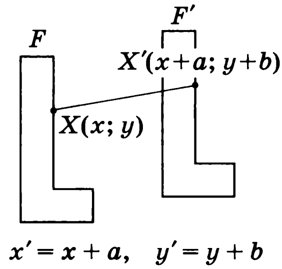


Рис. 137

у которых две смежные стороны одного пропорциональны двум смежным сторонам другого (рис. 136, *б*).

Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. Говорят, что эта фигура получена преобразованием из данной.

Гомотетия и рассмотренные ранее центральная симметрия и осевая симметрия — примеры преобразований фигур.

Рассмотрим еще один пример преобразования фигуры — параллельный перенос.

Преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка $X(x; y)$ переходит в точку $X'(x + a; y + b)$, a и b постоянные, называется *параллельным переносом* (рис. 137). Параллельный перенос задается формулами

$$x' = x + a, y' = y + b.$$

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при параллельном переносе.

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

Заметим также, что при параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

■**Пример 10.6.** При параллельном переносе точка (1; 1) переходит в точку (–1; 0). В какую точку переходит начало координат?

Решение. Любой параллельный перенос задается формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$. Так как точка (1; 1) переходит в точку $(-1;\ 0)$, то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Отсюда $a = -2$, $b = -1$. Таким образом, параллельный перенос, переводящий точку $(1;\ 1)$ в $(-1;\ 0)$, задается формулами $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Подставляя в эти формулы координаты начала ($x = 0$; $y = 0$), получим: $x' = -2$, $y' = -1$.

Итак, начало координат переходит в точку $(-2;\ -1)$.

Контрольные вопросы

1. Какие треугольники называются подобными?
2. Сформулируйте и докажите первый признак подобия треугольников.
3. Сформулируйте второй признак подобия треугольников.
4. Сформулируйте третий признак подобия треугольников.
5. Какие четыре точки называют замечательными точками треугольника?
6. Какие две фигуры называются подобными?
7. Что называется коэффициентом подобия?
8. Что называется гомотетией?
9. Какие фигуры называются гомотетичными?
10. Что такое параллельный перенос?

Упражнения

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Найдите длины сторон A_1B_1 и B_1C_1, если $AB = 3{,}5$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 5$ см, $A_1C_1 = 4$ см.

2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 42$ см, $BC = 63$ см, $AC = 36$ см, $A_1B_1 = 28$ см, $B_1C_1 = 42$ см, $A_1C_1 = 24$ см. Подобны ли эти треугольники?

3. В треугольнике ABC сторона $AB = 16$ см, $AC = 24$ см; в треугольнике $A_1B_1C_1$ сторона $A_1B_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Будут ли эти треугольники подобны, если $\angle A = \angle A_1$?

4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = 4$ см, $A_1B_1 = 3$ см, $\angle A = \angle A_1 = 48°$, $\angle B = \angle B_1 = 78°$. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

5. Параллельный перенос задается формулами $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. В какие точки при этом параллельном переносе переходят точки: 1) $(0;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$; 3) $(0;\ 2)$?

11. ОКРУЖНОСТЬ

11.1. Касательная к окружности

Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касательной*. При этом данная точка окружности называется *точкой касания*. На рисунке 138 прямая a проведена через точку A окружности перпендикулярно к радиусу OA. Прямая a является касательной к окружности. Точка A является точкой касания. Можно сказать также, что окружность касается прямой a в точке A.

Теорема 11.1. ***Касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.***

Доказательство. Пусть a — касательная к окружности в точке A (рис. 139). Допустим, что касательная a и окружность имеют, кроме точки A, общую точку B, отличную от A. Треугольник AOB равнобедренный (OA и OB — радиусы окружности) и, значит, $\angle A = \angle B$. Но угол A — прямой, следовательно, и угол B — прямой, что невозможно. Теорема доказана.

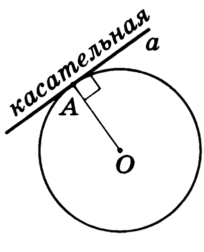


Рис. 138

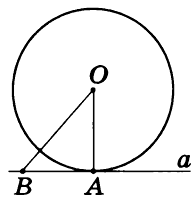
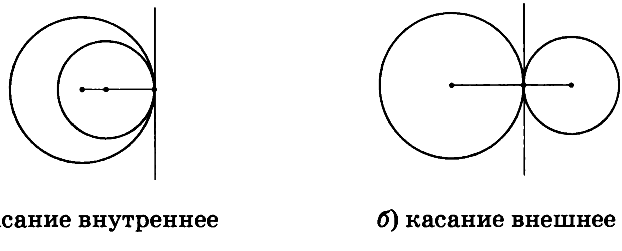


Рис. 139



а) касание внутреннее

б) касание внешнее

Рис. 140

Говорят, что две окружности, имеющие общую точку, *касаются* в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную (рис. 140). Касание окружностей называется *внутренним*, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной (рис. 140, *а*). Касание окружностей называется *внешним*, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной (рис. 140, *б*).

■ **Пример 11.1.** Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

Решение. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Поэтому центр искомой окружности лежит на перпендикуляре к данной прямой, проходящем через данную точку, и находится от данной точки на расстоянии, равном радиусу. Задача имеет два решения — две окружности, симметричные друг другу относительно данной прямой (рис. 141).

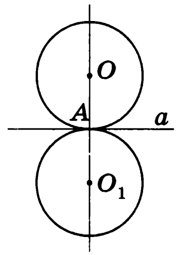


Рис. 141

■ **Пример 11.2.** Две окружности диаметром 4 и 8 см касаются внешним образом. Чему равно расстояние между центрами этих окружностей?

Решение. Радиусы окружностей перпендикулярны их общей касательной (см. рис. 140, *б*). Поэтому искомое расстояние равно сумме их радиусов, т. е. $2 + 4 = 6$ (см).

11.2. Центральные и вписанные углы

Угол разбивает плоскость на две части. Каждая из частей называется *плоским* углом. На рисунке 142 заштрихован один из плоских углов со сторонами a и b. Плоские углы с общими сторонами называются *дополнительными*.

Если плоский угол является частью полуплоскости, то его градусной мерой называется градусная ме-

Угол разбивает плоскость на две части

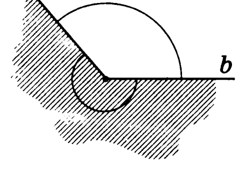


Рис. 142

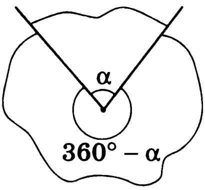


Рис. 143

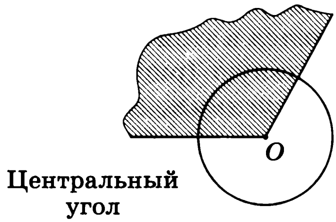
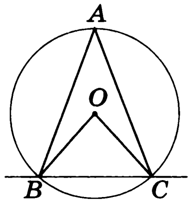


Рис. 144



$\angle BOC$ — центральный
$\angle BAC$ — вписанный в окружность

Рис. 145

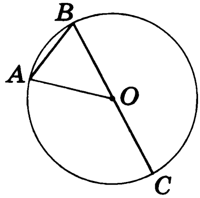
ра обычного угла с теми же сторонами. Если плоский угол содержит полуплоскость, то его градусная мера принимается равной $360° - \alpha$, где α — градусная мера дополнительного плоского угла (рис. 143).

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой окружности*, соответствующей этому центральному углу (рис. 144). *Градусной мерой дуги* окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным в окружность*. Угол BAC на рисунке 145 вписан в окружность. Его вершина A лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках B и C. Говорят также, что угол A опирается на хорду BC. Прямая BC разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующий той из этих дуг, которая не содержит точку A, называется *центральным углом, соответствующим данному вписанному углу*.

Теорема 11.2. ***Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.***

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда одна из сторон угла проходит через центр окружности (рис. 146). Треугольник AOB равнобедренный, так как у него стороны OA и OB равны как радиусы. Поэтому углы A и B треугольника равны. А так как их сумма равна внешнему углу треугольника при вершине O, то угол B треугольника равен половине угла AOC, что и требовалось доказать.



$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$

Рис. 146

■**Пример 11.3.** Точки A, B, C лежат на окружности с центром O; угол ABC равен 66°. Найти центральный угол, соответствующий углу ABC.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 146. Угол ABC вписан в окружность. Поэтому согласно теореме о вписанном угле $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$ или $\angle AOC = 2\angle ABC$. Но $\angle ABC = 66°$ и, значит, $\angle AOC = 132°$.

■**Пример 11.4.** Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности 10 см?

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 147, где $\angle ABC = 30°$.

Так как вписанный угол ABC равен $\frac{1}{2} \angle AOC$, то $\angle AOC = 60°$. Следовательно, треугольник AOC равносторонний, и, значит, хорда AC равна радиусу данной окружности. А так как диаметр равен 10 см, то радиус равен 5 см.

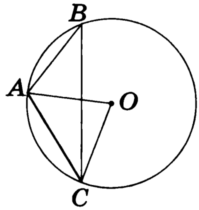


Рис. 147

С л е д с т в и е 11.1. *Вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой AB, равны* (рис. 148).

В частности, *углы, опирающиеся на диаметр, прямые*.

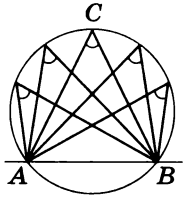


Рис. 148

11.3. Вписанная и описанная окружности

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема 11.3. ***Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.***

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр вписанной в него окружности, D, E и F — точки касания окружности со сторонами (рис. 149). Прямоугольные треугольники AOD и AOE равны по гипотенузе и катету. У них гипотенуза AO общая, а катеты OD и OE равны как радиусы. Из равенства треугольников следует равенство углов OAD и OAE. А это значит, что точка O лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины A. Точно так же доказывается, что точка O лежит на двух других биссектрисах треугольника. Теорема доказана.

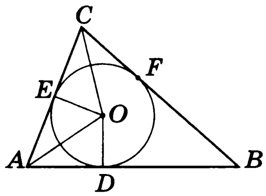


Рис. 149

В случае описанной окружности имеет место следующая теорема.

Теорема 11.4. ***Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника*** (рис. 150).

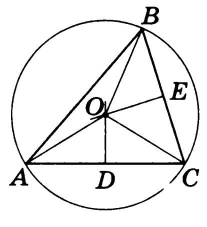


Рис. 150

■**Пример 11.5.** Найти радиус окружности r, вписанной в равносторонний треугольник ABC со стороной a.

Решение. В силу теоремы 2.6 в равностороннем треугольнике каждая биссектриса является одновременно медианой и высотой. Поэтому центр O вписанной окружности лежит в точке пересечения медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины (пример 10.5). Из прямоугольного треугольника ACD (рис. 151) согласно теореме Пифагора имеем:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \text{ или } CD^2 = AC^2 - AD^2,$$

откуда

$$CD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

и, значит,

$$CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Поэтому } r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

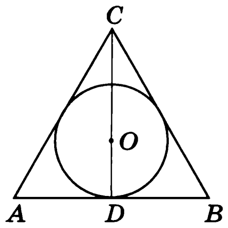


Рис. 151

■**Пример 11.6.** В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 16 см. Вычислить радиус описанной окружности.

Решение. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы, откуда радиус описанной окружности $R = \frac{1}{2}AB$ (рис. 152). По теореме Пифагора

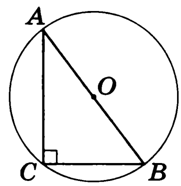


Рис. 152

$$AB^2 = AC^2 + CB^2, \text{ или}$$
$$AB^2 = 16^2 + 12^2 = 400,$$

откуда $AB = \sqrt{400} = 20$ и, значит, $R = 10$ (см).

11.4. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

□**Задача 11.1.** Доказать, что если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке S, то

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Доказательство. Докажем сначала, что треугольники ASD и CSB подобны (рис. 153). Вписанные углы DCB и DAB равны по следствию 11.1. Углы ASD и BSC равны как вертикальные. Из равенства указанных углов следует, что треугольники ASD и CSB подобны.

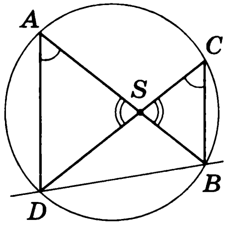


Рис. 153

Из подобия треугольников следует пропорция

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

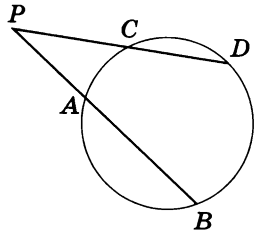


Рис. 154

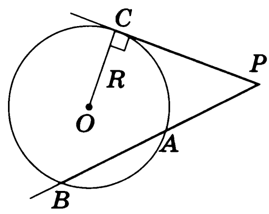


Рис. 155

Отсюда

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается:

1) если из точки P (рис. 154), лежащей вне окружности, проведены к ней две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно, то

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP;$$

2) если из точки P (рис. 155), лежащей вне окружности, проведены к ней секущая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная PC, то

$$PA \cdot PB = PC^2.$$

■**Пример 11.7.** Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найти ED, если $AE = 5$ см, $BE = 2$ см, $CE = 2{,}5$ см.

Решение. Имеем: $AE \cdot BE = ED \cdot CE$ (задача), или $5 \cdot 2 =$ $= 2{,}5 \cdot ED$, откуда $ED = \dfrac{10}{2{,}5} = \dfrac{100}{25} = 4$ (см).

■**Пример 11.8.** Из точки A, лежащей вне окружности, проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47 м, а внешний 9 м; внутренний отрезок второй секущей на 72 м больше внешнего ее отрезка. Найти внешний отрезок второй секущей.

Решение. Обозначим через x длину внешнего отрезка второй секущей. Тогда согласно условию задачи длина внутреннего отрезка второй секущей будет $x + 72$. Теперь согласно утверждению 1) имеем:

$$x(x + x + 72) = 9(9 + 47),$$

или

$$x(2x + 72) = 9 \cdot 56.$$

Решая это уравнение, находим $x = 6$.

■**Пример 11.9.** Из точки P проведены к окружности касательная $PC = 12$ м и секущая $PB = 16$ м. Найти внешнюю часть секущей AP.

Решение. Обозначим через x длину внешнего отрезка секущей. Тогда согласно утверждению 2) имеем:

$$x \cdot 16 = 12^2,$$

откуда

$$x = 9.$$

Контрольные вопросы

1. Какая прямая называется касательной к окружности?
2. Что значит: окружности касаются в данной точке?
3. Какое касание окружностей называется внутренним, какое — внешним?
4. Что называется плоским углом?
5. Какой угол называется центральным?
6. Какой угол называется вписанным в окружность?
7. Докажите, что вписанный в окружность угол равен половине соответствующего центрального угла.
8. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
9. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.
10. Какая окружность называется описанной около треугольника?
11. Где лежит центр окружности, описанной около треугольника?

Упражнения

1. Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются. Найдите расстояние между центрами окружностей в случаях внешнего и внутреннего касания.

2. Найдите дополнительные плоские углы, зная, что один из них в 5 раз больше другого.

3. Точки M, K, P лежат на окружности с центром O; угол MKP равен 33°. Найдите центральный угол, соответствующий углу MKP.

4. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50°, угол ACD равен 80°. Найдите угол CAD.

5. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 6 м. Найдите гипотенузу.

6. Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 5 см и 6 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

7. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, боковая сторона — 2 см. Найдите радиус описанной окружности.

8. Две хорды окружности пересекаются в точке M. Отрезки одной хорды равны 3 м и 12 м. Отрезки второй хорды равны между собой. Найдите отрезки второй хорды.

9. Из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие. Внутренний отрезок первой секущей равен 78 см, а внешний — 6 см. Внешний отрезок второй секущей равен 9 см. Найдите внутренний отрезок второй секущей.

10. Из точки P к окружности проведены касательная PC (C — точка касания) и секущая. Внешняя часть секущей равна 9 дм, а внутренняя — 7 дм. Найдите отрезок PC касательной.

12. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Будем обозначать стороны треугольника через a, b, c, а противолежащие им углы через α, β, γ.

12.1. Теорема синусов и теорема косинусов

Теорема 12.1. Теорема синусов. ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

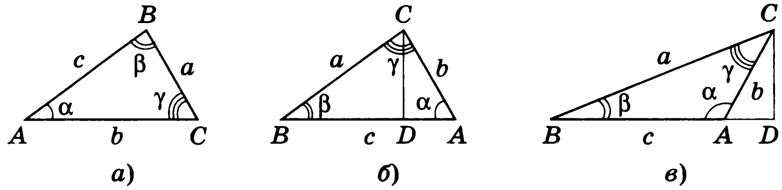


Рис. 156

Доказательство. Пусть ABC — треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами α, β, γ (рис. 156, *а*). Докажем, что

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Опустим из вершины C высоту CD. Из прямоугольного треугольника ACD, если угол α острый, получаем: $CD = b\sin\alpha$ (рис. 156, *б*). Если угол α тупой, то $CD = b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$ (рис. 156, *в*). Так же из треугольника BCD получаем: $CD = \alpha\sin\beta$. Итак, $\alpha\sin\beta = b\sin\alpha$. Отсюда

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Для доказательства надо провести высоту треугольника из вершины A. Теорема доказана.

Следствие 12.1. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, *где* R — *радиус окружности, описанной около треугольника* ABC.

Справедлива и следующая теорема.

Теорема 12.2. Теорема косинусов. ***Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними. Например,***

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.}$$

■**Пример 12.1.** В треугольнике ABC угол α равен 30°, угол β равен 30°. Найти отношение $a : c$.

Решение. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (1)$$

Используя теорему о сумме внутренних углов треугольника, имеем

$$\gamma = 180° - (30° + 30°) = 120°.$$

Так как

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

то $\dfrac{a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, или $a : c = 1 : \sqrt{3}$.

■**Пример 12.2.** В треугольнике две стороны 20 м и 21 м, а синус острого угла α между ними равен 0,6. Найти третью сторону a.

Решение. Угол α острый, следовательно, $\cos\alpha > 0$. Найдем его, используя тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8.$$

Теперь по теореме косинусов имеем:

$$a^2 = 20^2 + 21^2 - 2 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 0{,}8 = 169,$$

откуда $a = 13$ м.

■**Пример 12.3.** Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 157). Применим теорему косинусов к треугольникам ABC и ABD. Получим

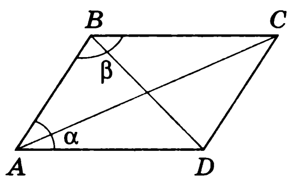


Рис. 157

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta;$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha.$$

Так как $\beta = 180° - \alpha$, то, складывая эти равенства и замечая, что $\cos\beta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $AB = CD$, $BC = AD$, получим

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

12.2. Решение треугольников

Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон и углов треугольника по известным его углам и сторонам.

■**Пример 12.4.** В треугольнике даны сторона $a = 5$ и два угла $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$. Найти третий угол и остальные две стороны.

Решение. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то третий угол α находим:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°.$$

Зная сторону и все три угла, по теореме синусов находим две остальные стороны:

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 105°} \approx 5 \cdot \frac{0{,}500}{0{,}966} \approx 2{,}59;$$

$$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{\sin 45°}{\sin 105°} \approx 5 \cdot \frac{0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66.$$

■**Пример 12.5.** В треугольнике даны две стороны $a = 12$, $b = 8$ и угол между ними $\gamma = 60°$. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение. Третью сторону находим по теореме косинусов

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} =$$

$$= \sqrt{144 + 64 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 0{,}500} = \sqrt{112} \approx 10{,}6.$$

Теперь, имея три стороны, по теореме косинусов находим косинус одного из неизвестных углов, например $\cos\alpha$ и сам угол α и, значит, угол β:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0{,}189,$$

откуда $\alpha \approx 79°$, $\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 180° - 79° - 60° = 41°$.

■**Пример 12.6.** В треугольнике даны две стороны $a = 6$, $b = 8$ и угол $\alpha = 30°$. Найти остальные два угла и третью сторону.

Решение. По теореме синусов имеем:

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{8}{6}\cdot\sin 30° = \frac{8}{6}\cdot\frac{1}{2} \approx 0{,}667.$$

Этому значению синуса соответствуют два угла: $\beta_1 \approx 42°$ и $\beta_2 \approx 138°$.

Рассмотрим сначала угол $\beta_1 \approx 42°$. По нему находим третий угол $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta \approx 108°$ и по теореме синусов третью сторону:

$$c = \frac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha} \approx 6\cdot\frac{\sin 108°}{\sin 30°} \approx 6\cdot\frac{0{,}951}{0{,}500} \approx 11{,}4.$$

Аналогично по углу $\beta_2 \approx 138°$ находим $\gamma_2 \approx 12°$ и $c_2 \approx 2{,}49$.

Примечание. Видим, что эта задача в отличие от предыдущих имеет два решения. При других числовых данных, например при $\alpha \geqslant 90°$, задача может иметь лишь одно решение или вовсе не иметь.

■**Пример 12.7.** Даны три стороны треугольника: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Найти его углы.

Решение. Углы находятся по теореме косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} = 0{,}875,$$

откуда $\alpha \approx 29°$.

Аналогично находится $\cos\beta = 0{,}688$, откуда $\beta \approx 47°$ и $\gamma \approx 180° - 47° - 29° = 104°$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте и докажите теорему синусов.
2. Сформулируйте теорему косинусов.
3. В чем состоит решение треугольников?
4. Каковы основные случаи решения треугольников?

Упражнения

1. В треугольнике ABC угол A равен 30°, угол B равен 30°. Найдите отношение: 1) $\frac{BC}{AB}$; 2) $\frac{BC}{AC}$; 3) $\frac{AC}{AB}$.

2. Стороны треугольника 5 м, 6 м, 7 м. Найдите косинусы углов треугольника.

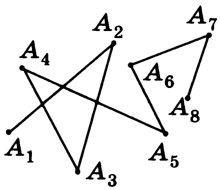
3. В треугольнике две стороны 20 м и 21 м, а синус тупого угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.

4. В треугольнике ABC стороны AB = 5,1 м, BC = 6,2 м, AC = 7,3 м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

13. МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

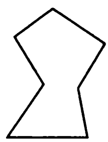
13.1. Ломаная

Пусть на плоскости имеется конечная последовательность отрезков; у каждого отрезка один из концов назовем *началом*. Если начало второго отрезка совпадает с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д., то совокупность (объединение) этих отрезков называется *ломаной* (при этом предполагается, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой). Отрезки, составляющие ломаную, — ***звенья***, концы отрезков — ***вершины*** ломаной (ломаная $A_1A_2 \ldots A_8$ на рис. 158, *а*). Ломаная называется ***простой***, если она не имеет самопересечений; ***замкнутой***, если конец последнего отрезка совпадает с началом первого отрезка (рис. 158, *б*).



Ломаная

а)



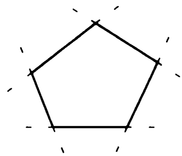
Простая замкнутая ломаная

б)

Рис. 158

13.2. Многоугольник

Многоугольник — это простая замкнутая ломаная. Звенья ломаной — *стороны*, вершины ломаной — *вершины многоугольника*. Многоугольник с n сторонами называется *n-угольником*. Многоугольником также называется часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной (плоский многоугольник). *Периметр* многоугольника — сумма длин его сторон.



Многоугольник выпуклый

Рис. 159

Многоугольник называется *выпуклым* (рис. 159), если он лежит по одну сторону относительно прямой, содержащей любую его сторону.

Углы (*внутренние*) выпуклого многоугольника — это углы, образованные соседними сторонами. Число углов многоугольника равно числу сторон и числу вершин. Среди углов *невыпуклого многоугольника* имеется хотя бы один угол, больший 180°.

Теорема 13.1. ***Сумма углов выпуклого n-угольника равна***

$$(n-2)180^\circ.$$

Доказательство. Соединим диагоналями вершину A_1 выпуклого n-угольника (рис. 160) с другими вершинами. Получим $n-2$ треугольника, сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ равна $(n-2) \cdot 180^\circ$.

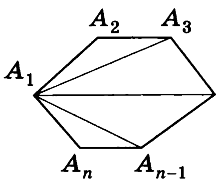


Рис. 160

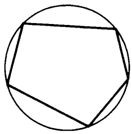
Теорема доказана.

■**Пример 13.1.** Найти сумму углов выпуклого семиугольника.

Решение. По доказанной теореме искомая сумма равна

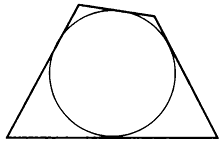
$$(7-2)180^\circ = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ.$$

■**Пример 13.2.** Найти углы выпуклого пятиугольника, если они пропорциональны числам 1, 3, 5, 7, 11.



Окружность описана около многоугольника

а)



Окружность вписана в многоугольник

б)

Рис. 161

Решение. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна

$$(5-2)\cdot 180° = 3\cdot 180° = 540°.$$

Приняв за x меньший из углов, составим уравнение:

$$x + 3x + 5x + 7x + 11x = 540,$$

откуда $x = 20$. Таким образом, углы пятиугольника равны 20°, 60°, 100°, 140°, 220°.

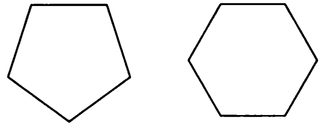
Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности. В этом случае также говорят: «Окружность описана около многоугольника» (рис. 161, *а*).

Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности. В этом случае также говорят: «Окружность вписана в многоугольник» (рис. 161, *б*).

13.3. Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Примеры правильных многоугольников: правильный (или равносторонний) треугольник, квадрат, правильные пятиугольник, шестиугольник и т. д. На рисунке 162 изображены правильные пятиугольник и шестиугольник.



Правильные пятиугольник и шестиугольник

Рис. 162

8 — 3531

Так как сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $(n - 2)180°$, то каждый внутренний угол правильного n-угольника равен

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

■**Пример 13.3.** Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен 135°?

Решение. По условию задачи составим уравнение

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180 = 135,$$

или

$$(n-2)180 = 135n,$$

откуда $45n = 360$ и, значит, $n = 8$.

Для выпуклых правильных многоугольников справедлива следующая теорема.

Теорема 13.2. ***Если выпуклый многоугольник правильный, то:***

1) ***около него можно описать окружность;***

2) ***в него можно вписать окружность, причем центры описанной и вписанной окружностей совпадают.***

Эта точка называется *центром правильного многоугольника.*

Приведем формулы для радиуса R описанной окружности и радиуса r вписанной окружности для правильного n-угольника со стороной a:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}, \qquad (1)$$

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}. \qquad (2)$$

■**Пример 13.4.** Для правильного (равностороннего) треугольника $\left(n = 3,\ \frac{180°}{3} = 60°\right)$

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}};\quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

■**Пример 13.5.** Для правильного четырехугольника, т. е. квадрата $\left(n = 4,\ \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ\right)$,

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}};\quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,45^\circ} = \frac{a}{2}.$$

■**Пример 13.6.** Для правильного шестиугольника $\left(n = 6,\ \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ\right)$

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a;\quad r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (2) получаем:

$$a = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n} \qquad (4)$$

и

$$a = 2r \cdot \mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}. \qquad (5)$$

■**Пример 13.7.** Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна 3. Найти сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

Решение. Согласно примеру 13.4

$$R = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Если a — сторона квадрата, вписанного в ту же окружность, то согласно формуле (4)

$$a = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}.$$

13.4. Длина окружности

Наглядное представление о длине окружности получается следующим образом. Представим себе нить в форме окружности. Разрежем ее и растянем за концы. Длина полученного отрезка и есть длина окружности. Как найти длину окружности, зная ее радиус? При неограниченном увеличении числа сторон вписанного в окружность правильного многоугольника его периметр неограниченно приближается к *длине окружности* (рис. 163). Это используется при доказательстве следующей теоремы.

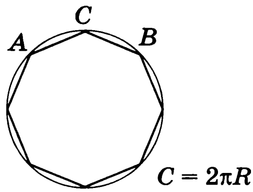


Рис. 163

Теорема 13.3. ***Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от окружности, т. е. одно и то же для любых двух окружностей.***

Отношение длины окружности к ее диаметру принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»):

$$\frac{C}{2R} = \pi, \qquad (6)$$

где C — длина окружности, R — ее радиус.

Число π иррациональное, его приближенное значение $\pi \approx 3{,}1416$.

Из равенства (6) имеем

$$C = 2\pi R, \qquad (7)$$

т. е. длина окружности радиуса R вычисляется по формуле (7). Например, длина окружности радиуса 12 м равна $2\pi \cdot 12 = 24\pi$ м.

■**Пример 13.8.** На сколько изменится длина окружности, если радиус увеличится на 1 м?

Решение. Пусть радиус первоначальной окружности был R_1, тогда длина этой окружности $C = 2\pi R_1$.

По условию радиус первоначальной окружности увеличивается на 1 м, т. е. $R_2 = (R_1 + 1)$, тогда длина новой окружности

$$C_2 = 2\pi R_2 = 2\pi(R_1 + 1).$$

Найдем разность:

$$C_2 - C_1 = 2\pi(R_1 + 1) - 2\pi R_1 = 2\pi.$$

Итак, $C_2 - C_1 = 2\pi \approx 6{,}28$ (м).

■**Пример 13.9.** Точки M и N делят окружность на две дуги, разность градусных мер которых равна 90°. Чему равны градусные меры каждой из дуг?

Решение. Сумма градусных мер дуг равна 360°, а разность равна 90°. Обозначим градусные меры этих дуг x и y. Имеем:

$$\begin{cases} x + y = 360, \\ x - y = 90. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x = 225°$, $y = 135°$.

■**Пример 13.10.** Сторона квадрата равна 4 см. Вычислить длину окружности: 1) вписанной в него; 2) описанной около него.

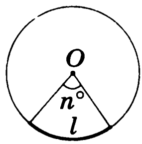
Решение. 1) Радиус вписанной в квадрат окружности равен 2 см, тогда длина окружности равна $C = 2\pi R$, т. е. $C = 4\pi$ см.

2) Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Поэтому $R = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, а длина окружности равна $C = 4\sqrt{2}\,\pi$ см.

13.5. Длина дуги окружности. Радианная мера угла

Найдем длину дуги окружности радиуса R, отвечающей центральному углу в $n°$ (рис. 164). Развернутому углу соответствует длина полуокружности πR. Следовательно, углу в 1° соответствует дуга длины $\frac{\pi R}{180}$, а углу в $n°$ соответствует дуга длины

$$l = \frac{\pi R}{180} n. \qquad (8)$$



$l = \frac{\pi R}{180} n$

Рис. 164

Например, длина дуги окружности радиуса 12 м, отвечающей центральному углу в 30°, есть

$$l = \frac{12\pi}{180} \cdot 30 = 2\pi \approx 6 \text{ (м)}.$$

■**Пример 13.11.** По данной хорде k найти длину ее дуги, если она соответствует центральному углу в 60° (рис. 165).

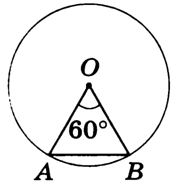


Рис. 165

Решение. Так как $AO = BO = R$ (R — радиус окружности) и $\angle AOB = 60°$, то треугольник AOB равносторонний: $R = AB = k$. Теперь согласно формуле (8) имеем:

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot 60 = \frac{\pi k}{3}.$$

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности. Из формулы для длины дуги окружности следует, что

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} n,$$

т. е. **радианная мера угла получается из градусной умножением на** $\frac{\pi}{180}$. В частности, радианная мера угла 180° равна π, радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$.

Единицей радианной меры углов является *радиан*. Угол в один радиан — это центральный угол, у которого длина дуги равна радиусу (рис. 166). Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

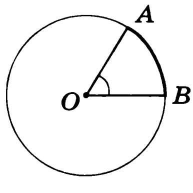


Рис. 166

■**Пример 13.12.** Найти радианные меры углов параллелограмма $ABCD$, если $\angle A = 36°$.

Решение. Радианная мера угла A равна $36° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{5}$, а радианная мера угла B равна $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$, так как в параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° (теорема 6.1). Наконец, радианные меры углов C и D соответственно равны $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{4\pi}{5}$ (в параллелограмме противоположные углы равны).

Контрольные вопросы

1. Что такое ломаная?
2. Что такое многоугольник?
3. Какой многоугольник называется выпуклым?
4. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?
5. Какой многоугольник называется вписанным в окружность?
6. Какой многоугольник называется описанным около окружности?
7. Какой многоугольник называется правильным?
8. Приведите формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника.
9. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей для правильного треугольника, четырехугольника (квадрата), шестиугольника.
10. По какой формуле вычисляется длина окружности?
11. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?
12. Что такое радианная мера угла?
13. Чему равны радианные меры развернутого и прямого углов?

Упражнения

1. Чему равна сумма внутренних углов выпуклого: 1) четырехугольника; 2) пятиугольника; 3) шестиугольника?

2. Сколько сторон имеет многоугольник, у которого сумма внутренних углов равна 1260°?

3. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 2, 4.

4. Может ли сумма внутренних углов многоугольника равняться 740°?

5. Чему равен каждый внутренний угол правильного: 1) восьмиугольника; 2) десятиугольника?

6. Диаметр окружности равен 10 см. Найдите сторону правильного четырехугольника, описанного около этой окружности.

7. Найдите отношение сторон правильного вписанного в окружность шестиугольника и квадрата, описанного около той же окружности.

8. Отношение числа сторон двух правильных многоугольников равно 2 : 3, а отношение пары внутренних углов этих многоугольников равно 6 : 7. Определите число сторон каждого многоугольника.

9. Найдите длину окружности махового колеса, радиус которого равен 150 см.

10. Радиус окружности увеличен на 5 см. Как изменилась длина окружности?

11. Окружность разделена двумя точками на две дуги. Найдите градусную меру каждой дуги, если одна из них в девять раз больше другой.

12. Найдите длину дуги окружности радиуса 3 см, если градусная мера дуги равна: 1) 30°; 2) 60°; 3) 90°.

13. По данной хорде k найдите длину ее дуги, если она соответствует центральному углу 90°.

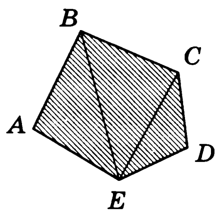
14. Найдите радианную меру углов: 1) 30°; 2) 135°; 3) 120°.

15. Найдите радианную меру углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

14. ПЛОЩАДИ ПЛОСКИХ ФИГУР

14.1. Понятие площади

Геометрическая фигура называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число плоских треугольников. Примером простой фигуры является выпуклый плоский многоугольник (рис. 167). В данном параграфе рассматриваются только плоские многоугольники.



Выпуклый плоский многоугольник

Рис. 167

Дадим определение площади для простых фигур.

Площадь простой фигуры — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами.

С в о й с т в о 14.1. *Равные фигуры имеют равные площади.*

Свойство 14.2. ***Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей.***

Свойство 14.3. *Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.*

Фигуры, имеющие равные площади, принято называть *равновеликими*.

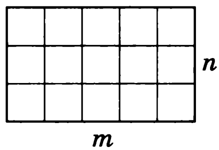
14.2. Площадь прямоугольника

Условимся одну из сторон параллелограмма называть его *основанием*, а перпендикуляр, опущенный на эту сторону из какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма, — *высотой*.

В прямоугольнике за высоту можно взять сторону, перпендикулярную к той, которая принята за основание. В трапеции высота — общий перпендикуляр между основаниями. Основание и высота прямоугольника называются его *измерениями*.

Теорема 14.1. ***Площадь прямоугольника равна произведению его измерений.***

Доказательство. 1. Пусть измерения прямоугольника — натуральные числа m и n. Разобьем прямоугольник на единичные квадраты (как показано на рис. 168, где измерения прямоугольника 5 и 3 единиц). Очевидно, на прямоугольнике уложится mn единичных квадратов. По второму свойству площадей площадь прямоугольника будет равна mn квадратных единиц.



$S = mn$

Рис. 168

2. Пусть измерения прямоугольника — рациональные числа a и b. Приведем дроби a и b к общему знаменателю. Пусть $a = \dfrac{m}{q}$ и $b = \dfrac{n}{q}$, где m, n и q — натуральные числа. Разобьем теперь прямоугольник на такие единичные квадраты, что длина стороны каждого из них равна $\dfrac{1}{q}$ части еди-

ницы длины. Прямоугольник будет содержать mn таких квадратов. Так как площадь квадрата со стороной $\frac{1}{q}$ равна $\frac{1}{q^2}$ части прежнего единичного квадрата, то площадь S прямоугольника равна

$$S = mn \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{m}{q} \cdot \frac{n}{q} = ab.$$

Теорема доказана для случая, когда измерения прямоугольника — рациональные числа. Можно доказать, что эта теорема верна и в том случае, когда хотя бы одно измерение есть иррациональное число.

■**Пример 14.1.** Сравнить площадь прямоугольника со сторонами 48 см и 27 см с площадью квадрата со стороной 36 см.

Решение. Искомые площади прямоугольника и квадрата равны: $48 \cdot 27 = 1296$ (см^2) и $36^2 = 1296$ (см^2) соответственно, т. е. площади этих фигур одинаковы.

■**Пример 14.2.** Найти площадь квадрата по его диагонали, равной 4 м.

Решение. Обозначим сторону квадрата через x. По теореме Пифагора

$$x^2 + x^2 = 4^2, \quad \text{или} \quad 2x^2 = 16,$$

откуда $x^2 = 8$, т. е. площадь квадрата равна 8 м^2.

■**Пример 14.3.** Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить на 50%, а высоту уменьшить на 50%?

Решение. Если основание прямоугольника принять за x, а высоту за y, то его площадь будет равна $S = xy$.

Основание увеличили на 50%, т. е. оно стало $1{,}5x$. Высоту уменьшили на 50%, т. е. она стала $0{,}5y$. Поэтому

$$S_1 = 1{,}5x \cdot 0{,}5y = 0{,}75xy.$$

Следовательно, площадь прямоугольника уменьшится на 25%.

14.3. Площадь параллелограмма

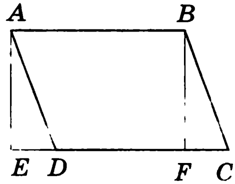
Теорема 14.2. ***Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.***

Доказательство. Опустим перпендикуляры AE и BF из вершин A и B параллелограмма $ABCD$ (рис. 169) на прямую CD. Тогда площадь трапеции $ABCE$ с одной стороны равна сумме площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника ADE, а с другой — сумме площадей прямоугольника $ABFE$ и треугольника BCF. Но так как эти треугольники равны (значит, имеют равные площади), то площадь S параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $ABFE$, т. е.

$$S = AB \cdot BF,$$

или

$$S = DC \cdot BF.$$



$S = DC \cdot BF$

Рис. 169

■**Пример 14.4.** Основание параллелограмма равно 35 см, а боковая сторона — 20 см. Найти площадь параллелограмма, если боковая сторона образует с высотой, опущенной на основание, угол в 60°.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 169. Тогда $\angle BCF = 90° - 60° = 30°$ и, значит, катет $BF = \frac{1}{2} BC = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ (см) (пример 5.12). Следовательно, искомая площадь

$$S = 35 \cdot 10 = 350 \text{ (см}^2\text{)}.$$

■**Пример 14.5.** Дан параллелограмм $ABCD$ со стороной $AB = 12$ см и диагональю $AC = 16$ см. Вершина D удалена от диагонали AC на 4 см. Вычислить расстояние от точки D до прямой AB.

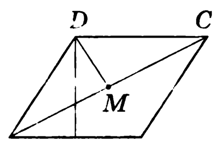


Рис. 170

Решение. $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = AC \cdot DM = 64$ см^2 (рис. 170), а так как $S_{ABCD} = AB \cdot DK$, то $DK = \frac{64}{12}$, т. е. $DK \approx 5{,}33$ см.

14.4. Площадь треугольника и ромба

Теорема 14.3. ***Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.***

Доказательство. Треугольник ABC (рис. 171) дополним до параллелограмма $ABCD$ (как указано на рис. 171), площадь которого равна $AB \cdot h$. Но площадь S треугольника ABC составляет половину площади параллелограмма $ABCD$ (ибо треугольники ABC и CDA равны), следовательно,

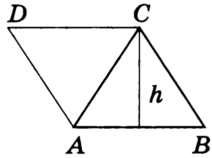


Рис. 171

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot h.$$

Следствие 14.1. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов* (так как один катет можно взять за основание, другой — за высоту).

Следствие 14.2. *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.*

■**Пример 14.6.** Найти площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 8 см.

Решение. Обозначив один из катетов данного треугольника через x, согласно теореме Пифагора будем иметь:

$$x^2 + x^2 = 64, \quad \text{или} \quad x^2 = 32,$$

откуда $\frac{x^2}{2} = 16$ и, значит, на основании следствия 14.1 искомая площадь равна 16 см^2.

■**Пример 14.7.** В равнобедренном треугольнике основание равно 30 м, а высота, опущенная на основание, равна 20 м. Найти высоту, опущенную на боковую сторону.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 172. Тогда в треугольнике ABC основание $AC = 30$ м, высота

$BD = 20$ м, следовательно, можно найти площадь этого треугольника:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \quad S = \frac{20 \cdot 30}{2}.$$

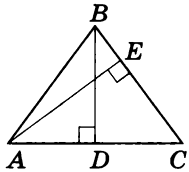


Рис. 172

Площадь этого треугольника можно найти и по-другому: $S = \frac{1}{2} BC \cdot AE$, откуда $AE = \frac{2S}{BC}$ (BC можно найти из прямоугольного треугольника BDC по теореме Пифагора), или

$$AE = \frac{20 \cdot 30}{\sqrt{20^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2}}, \quad \text{т. е. } AE = 24 \text{ (м)}.$$

■**Пример 14.8.** Вычислить площадь ромба, диагонали которого равны 6 см и 3,5 см.

Решение. Согласно следствию 14.5 искомая площадь равна

$$S = 6 \cdot 3{,}5 : 2 = 10{,}5 \text{ (см}^2\text{)}.$$

■**Пример 14.9.** Найти площадь ромба, если его высота 10 м, а острый угол 30°.

Решение. Пусть $ABCD$ — ромб, где $\angle BAD = 30°$, $BE \perp AD$ и $BE = 10$ м (рис. 173).

Из прямоугольного $\triangle ABE$ найдем AB:

$BE = \frac{1}{2} AB$ (как катет, лежащий против угла в 30°) и, значит, $AB = 2BE = 2 \cdot 10 = 20$ (м).

Так как $AB = AD$, то площадь ромба

$$S = BE \cdot AD = 200 \text{ (м}^2\text{)}.$$

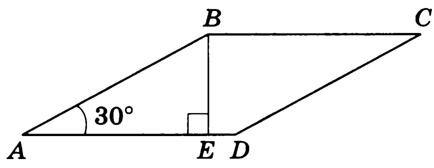


Рис. 173

14.5. Площадь трапеции

Теорема 14.4. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.***

Доказательство. Проведя в трапеции $ABCD$ (рис. 174) диагональ DB, можно рассматривать ее площадь S как сумму площадей двух треугольников BCD и ADB. Поэтому

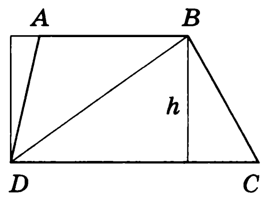


Рис. 174

$$S = \frac{1}{2}DC \cdot h + \frac{1}{2}AB \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2}(DC + AB)\,h,$$

где h — высота трапеции.

■**Пример 14.10.** Стекла фонаря имеют вид трапеции, параллельные стороны которой равны 22 см и 18 см, а расстояние между ними — 10 см. Как велика площадь каждого стекла?

Решение. Согласно теореме 14.4, искомая площадь

$$S = \frac{1}{2}(22 + 18)10 = 20 \cdot 10 = 200\ (\text{см}^2).$$

■**Пример 14.11.** Найти площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 м и 44 м, а непараллельные — 17 м и 25 м.

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция, отвечающая условию задачи, тогда $AD = 44$, $BC = 16$ (рис. 175). Следовательно, $AE + KD = 28$ (BE и CK — высоты).

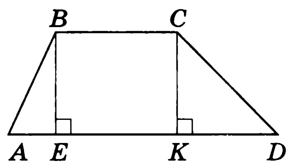


Рис. 175

Обозначим AE через x, тогда $KD = 28 - x$.

По условию $AB = 17$, $CD = 25$. Значит, из прямоугольного треугольника ABE

$$BE^2 = 17^2 - x^2.$$

Из прямоугольного треугольника CKD согласно теореме Пифагора запишем:

$$CK^2 = 25^2 - (28 - x)^2.$$

Так как $BE = CK$, то

$$17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2,$$

откуда $x = 8$.

Тогда

$$BE = \sqrt{17^2 - x^2} = 15 \text{ (м)}.$$

Площадь трапеции

$$S = \frac{16 + 44}{2} \cdot 15 = 450 \text{ (м}^2\text{)}.$$

14.6. Площадь правильного многоугольника

Теорема 14.5. ***Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:***

$$S = \frac{1}{2}Pr, \qquad (1)$$

где P — периметр многоугольника, а r — радиус вписанной в него окружности.

■**Пример 14.12.** Вычислить площадь правильного шестиугольника, периметр которого равен 30 дм.

Решение. Так как периметр данного правильного шестиугольника равен 30 дм, то его сторона равна 5 дм. Отсюда радиус вписанной в него окружности $r = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (пример 13.6, (3)) и, значит, согласно формуле (1) искомая площадь

$$S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \approx 65 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

■**Пример 14.13.** Найти площадь равностороннего треугольника со стороной a.

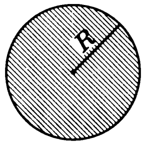
Решение. Периметр данного треугольника равен $3a$; радиус вписанной в него окружности равен $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ (пример 13.4). Следовательно, согласно формуле (1) искомая площадь

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

14.7. Площадь круга и кругового сектора

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного (рис. 176).

Эта точка называется *центром* круга, а данное расстояние — *радиусом* круга. Границей круга является окружность с тем же центром и радиусом.



$S = \pi R^2$

Рис. 176

Из наглядных соображений будем считать, что площадь круга сколь угодно мало отличается от площади вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами.

Пусть R — радиус круга, а C — длина его окружности. Впишем в окружность правильный n-угольник с достаточно большим числом сторон n. Площадь этого n-угольника

$$S_n = \frac{1}{2} Pr,$$

где P — периметр n-угольника, а r — радиус вписанной в него окружности (теорема 14.5). При возрастании числа его сторон n периметр P сколь угодно мало отличается от числа C, а радиус r — от числа R. Говорят, что при возрастании n периметр P стремится к длине окружности, а площадь S_n — к площади круга S. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} C \cdot R = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Итак, площадь круга вычисляется по формуле

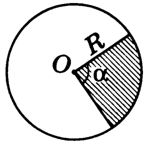
$$S = \pi R^2,$$

где R — радиус круга.

■**Пример 14.14.** Найти площадь круга, если длина окружности равна k.

Решение. Длина окружности находится по формуле $C = 2\pi R$. Так как $C = k$, то $k = 2\pi R$, или $R = \frac{k}{2\pi}$, и, значит, площадь круга:

$$S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi k^2}{4\pi^2} = \frac{k^2}{4\pi}.$$



$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$

Рис. 177

Круговым сектором называется часть круга, лежащей внутри соответствующего центрального угла (рис. 177).

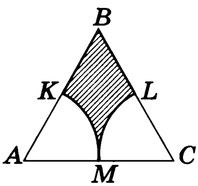
Площадь сектора, дуга которого содержит один градус, равна $\frac{1}{360}$ площади круга. Поэтому площадь сектора, дуга которого содержит α градусов, равна $\frac{\pi R^2}{360}\alpha$. Итак, площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha, \qquad (1)$$

где R — радиус круга, α — градусная мера соответствующего центрального угла.

■**Пример 14.15.** В равностороннем треугольнике ABC со стороной a (рис. 178) дуги KM и LM — дуги окружностей радиусов $\frac{a}{2}$. Найти площадь заштрихованной части треугольника ABC.

Решение. Площадь треугольника ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (пример 14.13), площадь каждого из секторов AKM и CML согласно формуле (2) равна



$$\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Рис. 178

Поэтому искомая площадь

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{\pi a^2}{24} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}17\,a^2.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте свойства площади для простых фигур.
2. Докажите теорему о вычислении площади параллелограмма.
3. Докажите теорему о вычислении площади треугольника.
4. Какие вам известны формулы для площади прямоугольного треугольника и ромба?
5. Докажите теорему о площади трапеции.
6. Сформулируйте теорему о площади правильного многоугольника.
7. Чему равна площадь круга?
8. Чему равна площадь сектора?

Упражнения

1. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого 6 дм и 15 дм.

2. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?

3. Периметр прямоугольника равен 50 см, а его основание 15 см. Найдите площадь прямоугольника.

4. В прямоугольнике $ABCD$ одна из сторон равна 24 см, диагональ 2,5 дм. Вычислите площадь этого прямоугольника.

5. Площадь параллелограмма 120 см^2, основание 15 см. Найдите высоту, опущенную на основание.

6. Основание параллелограмма равно 52,5 см, а боковая сторона 3 дм. Найдите площадь параллелограмма, если боковая сторона его образует с высотой, опущенной на основание, угол, равный 60°.

7. Две стороны треугольника равны 30 см и 18 см. Высота, опущенная на первую сторону, равна 12 см. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону.

8. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 3,4 м.

9. Периметр ромба равен 28 дм, а высота — 5 дм. Найдите площадь ромба.

10. Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол 60°.

11. Стекла фонаря имеют вид трапеции, параллельные стороны которой — 22 см и 18 см, а расстояние между ними — 10 см. Как велика площадь каждого стекла?

12. У равнобедренной трапеции меньшее основание равно 10 м, боковая сторона 6 м, острый угол 60°. Найдите площадь трапеции.

13. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна 3 см. Найдите площадь квадрата, вписанного в эту окружность.

14. Вычислите площадь правильного шестиугольника, сторона которого 10 см.

15. Диаметр окружности основания царь-колокола, находящегося в Московском Кремле, равен 6,6 м. Определите площадь основания этого колокола.

16. В круг вписан прямоугольник со сторонами 3 м и 4 м. Найдите площадь этого круга.

17. Из круга, радиус которого 10 см, вырезан сектор с дугой в 60°. Найдите площадь этого сектора.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Отрезок, луч, угол

1. 8 дм. **2.** 2,5 см. **3.** 23,5 см или 1,5 см. **4.** 47 см и 17 см. **5.** 120°. **6.** 45°. **7.** Не может. **8.** 1) 70°; 2) 100°; 3) 164°. **9.** 74,5°, 105,5°. **10.** 36° и 144°. **11.** 90°, 90°, 90°. **12.** 126°, 54°, 126°. **13.** 40°, 40°, 140°, 140°.

Треугольники

1. 0,6 м. **2.** 3 см. **3.** 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м. **4.** 8 дм. **5.** *Указание.* Используйте второй признак равенства треугольников. **6.** 50 см. **7.** *Указание.* Используйте третий признак равенства треугольников. **8.** а) Равенство $BD = CD$ следует из равенства треугольников ABD и ACD (первый признак); б) $\angle C = 53°$; в) $DC = 14$ мм.

Основные геометрические построения

1. а) CD, MN, AB; б) AB; в) OP, OB, OA; г) EF. **2.** 6 дм. **3.** Нельзя. **4.** 29 см. **5.** 90°. **6.** 15 м и 6 м.

Параллельные прямые

1. Три угла по 72°, а четыре угла по 108°. **2.** 110° и 70°. **3.** 80° и 80°. **4.** 60° и 120°.

Сумма углов треугольника

1. 75°. **2.** 69°, 69°. **3.** 100°. **4.** 80°, 50°, 50° или 80°, 80°, 20°. **5.** 30° и 60°. **6.** 70°, 60°. **7.** 360°. **8.** 18 м, 18 м. **9.** 8 м. **10.** $BC < AC < AB$. **11.** 3. **12.** *Указание.* Равенство высот следует, например, из равенства прямоугольных треугольников с общей гипотенузой (основанием равнобедренного треугольника) и равными острыми углами при основании этого треугольника. **13.** *Указание.* Следует рассмотреть те же прямоугольные треугольники, что и в задаче 12 (указание), которые теперь будут равны по гипотенузе и катету. **14.** 3 см.

Четырехугольники

1. 144°, 144°, 36°. **2.** 2,65 м. **3.** 120 см. **4.** 5 м. **5.** 3 м. **6.** Квадрат. **7.** *Указание.* Решается, как и задача в примере 6.12. **8.** 4 см, 5 см, 6 см. **9.** 6 см, 5 см, 5 см. **10.** 24 м и 30 м. **11.** 2 м и 5 м. **12.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **13.** О и Х. **14.** 1) Две; 2) бесконечное множество: любая прямая, перпендикулярная к данной, а также сама прямая; 3) одну. **15.** А, Е, О. **16.** 15 см и 20 см. **17.** 7,5 см.

Тригонометрические функции острого угла. Теорема Пифагора

1. $\sin A = \frac{5}{13}$, $\cos A = \frac{12}{13}$. **2.** $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{15}$. **3.** 1) 10 см; 2) 2,9 см. **4.** 20 см. **5.** 30 м. **6.** 18 м, 18 м.

Прямоугольные координаты

1. 1) 4; 2) 3. **2.** 5. **3.** 3; 2. **4.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **5.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** 1) -1; 2) $-\sqrt{3}$.

Векторы

1. 1) 3 см; 2) 5 см. **2.** 1) Нет; 2) да; 3) да; 4) нет. **4.** Да. **5.** $5k$. **6.** 1) 1; 8; 2) 10; 10. **7.** –4; 0. **8.** 0.

Подобие

1. 2,8 см и 2 см. **2.** Подобны. **3.** Подобны. **4.** $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{3}{4}$. **5.** 1) (1; –1); 2) (2; –1); 3) (1; 1).

Окружность

1. 70 см и 10 см. **2.** 60° и 300°. **3.** 66°. **4.** 50°. **5.** 12 м. **6.** 32 см. **7.** 2 см. **8.** 6 м и 6 м. **9.** 47 см. **10.** 12 дм.

Решение треугольников

1. 1) $1:\sqrt{3}$; 2) 1 : 1; 3) $1:\sqrt{3}$. **2.** $\frac{5}{7}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{1}{5}$. **3.** $\sqrt{1513}$ м. **4.** Наибольший угол треугольника B, наименьший — C.

Многоугольники. Длина окружности

1. 1) 360°; 2) 540°; 3) 720°. **2.** 9. **3.** 40°, 80°, 80°, 160°. **4.** Не может. **5.** 1) 135°; 2) 144°. **6.** 10 см. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** Шестиугольник и девятиугольник. **9.** ≈ 9,42 см. **10.** Увеличилась на 10π см. **11.** 36° и 324°. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}$ см; 2) π см; 3) $\frac{3}{2}\pi$ см. **13.** $\frac{\pi k}{2\sqrt{2}}$. **14.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{2}{3}\pi$. **15.** $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

Площади плоских фигур

1. 9 дм^2. **2.** Увеличится в 9 раз. **3.** 1,5 дм^2. **4.** 168 см^2. **5.** 8 см. **6.** 787,5 см^2. **7.** 20 см. **8.** 2,89 м^2. **9.** 35 дм^2. **10.** $\frac{200}{\sqrt{3}}$ см^2. **11.** 200 см^2. **12.** $39\sqrt{3}$ м^2. **13.** 6 см^2. **14.** $150\sqrt{3}$ см^2. **15.** ≈ 34,2 м^2. **16.** $6{,}25\pi$ м^2. **17.** ≈ 52 см^2.

ПОДГОТОВКА К ГИА

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Биссектрисы BH и FM треугольника BCF пересекаются в точке O, отрезок MH параллелен стороне BF. Докажите, что: 1) $\triangle MOH$ и $\triangle FOB$ подобны; 2) $BM = FH$.

2. Медианы BH и FM треугольника BCF пересекаются в точке O. Докажите, что: 1) $\triangle MOH$ и $\triangle FOB$ подобны; 2) $S_{\triangle BOM} : S_{\triangle CMH} = 2 : 3$.

3. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке K. Докажите, что прямые AM и CK параллельны, а треугольники ABM и CDK равны.

4. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке K. Докажите, что треугольник ABM — равнобедренный, а треугольники ABM и CDK равны.

5. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ из точки C проведены диагонали. Докажите, что треугольники ACF и ECF равны, а прямые DE и CF параллельны.

6. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что треугольники BOD и AOE равны, а прямые CF и BD перпендикулярны.

7. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. Докажите, что треугольники ABE и EDA равны, а прямые BD и AE параллельны.

8. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFKM$. Докажите, что треугольники CDE и AMK равны, а прямые CE и AK параллельны.

9. В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке K, причем $AK = BC$. Найдите радиус этой окружности, если периметр треугольника равен $48\sqrt{2}$.

10. В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке M. Найдите радиус окружности, если $AM = 6$ и $BM = 24$.

11. Найдите площадь остроугольного треугольника ABC, если известно, что $\angle BAC = 45°$, $AB = 10\sqrt{2}$, а медиана $AM = 13$.

12. Найдите площадь остроугольного треугольника ABC, если известно, что $\angle BAC = 60°$, $AB = 12$, а медиана $AM = 2\sqrt{19}$.

13. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $BH = 4\sqrt{3}$, а $\angle ABC = 30°$.

14. Равнобедренный остроугольный треугольник с основанием $4\sqrt{15}$ вписан в окружность радиуса 16. Найдите расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника.

15. Найдите основание тупоугольного равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса $4\sqrt{15}$, если расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника равно 15.

16. Через точку O пересечения продолжений боковых сторон трапеции $ABCD$ проведена прямая, параллельная основаниям AD и BC. Эта прямая пересекает продолжения диагоналей DB и AC трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь трапеции $AMND$, если площадь треугольника BOC равна 2, а площадь трапеции $ABCD$ равна 30.

17. Расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 17,5, а боковые стороны равны 21 и 28. Найдите расстояние между точкой пересечения диагоналей трапеции и серединой меньшего основания, если основания трапеции относятся как 2 : 3.

18. В треугольнике ABC проведены высоты AN и BM и отмечена точка K — середина стороны AB. Найдите AB, если известно, что $\angle ACB = 105°$, а площадь треугольника MNK равна 25.

19. В треугольнике ABC проведены высоты AN и BM и отмечена точка K — середина стороны AB. Найдите AB, если известно, что $\angle ACB = 120°$, а площадь треугольника MNK равна $9\sqrt{3}$.

20. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а медианы — в точке M. Точка K — середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB = 12$, $CH = 6$, $\angle BAC = 45°$.

21. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а медианы — в точке M. Точка K — середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB = 12\sqrt{2}$, $CH = 8\sqrt{2}$, $\angle BAC = 45°$.

22. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а медианы — в точке M. Точка K — середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $CH = 4\sqrt{2}$, $\angle BAC = 45°$.

ОТВЕТЫ К ТРЕНИРОВОЧНЫМ ЗАДАЧАМ

9. 6. **10.** 8. **11.** 70. **12.** $24\sqrt{3}$. **13.** 4. **14.** 4. **15.** 15. **16.** $\frac{160}{3}$. **17.** 7. **18.** 20. **19.** 12. **20.** 22,5. **21.** 60. **22.** 15.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЧАСТИ 3

Задания 1—8 — задача 13, в варианте ГИА-2010.
Задания 9—15 — задача 14, 16—19 — задача 15.

1. Биссектрисы BK и EM треугольника BCE пересекаются в точке O, отрезок MK параллелен стороне BE. Докажите, что: 1) $\triangle KOM$ и $\triangle BOE$ подобны; 2) $\angle KBE = \angle BEM$.

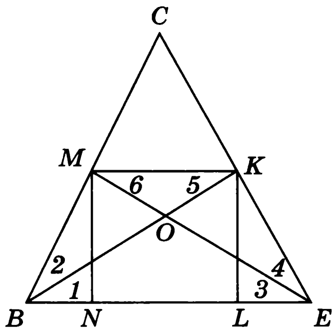


Рис. 1

Доказательство. Ради сокращения записи введем обозначения (рис. 1):

$\angle KBE = \angle 1$, $\angle CBK = \angle 2$, $\angle BEM = \angle 3$, $\angle KEM = \angle 4$, $\angle MKO = \angle 5$, $\angle OMK = \angle 6$.

1) Так как $MK \parallel BE$, то $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 6$.

Следовательно, треугольники KOM и BOE подобны.

2) Имеем $\angle 1 = \angle 2$ (BK — биссектриса $\angle B$), $\angle 3 = \angle 4$ (EM — биссектриса $\angle E$). Отсюда $\angle 2 = \angle 5$ и $\angle 4 = \angle 6$ и, значит, $BM = MK$ и $MK = KE$, и потому $BM = KE$, т. е. трапеция $BMKE$ равнобедренная. Проведем в этой трапеции высоты MN и KL и рассмотрим прямоугольные треугольники BNM и KLE. Они равны по катету и гипотенузе ($MN = KL$ и $BM = KE$), откуда следует, что $\angle MBN = \angle KEL$, и так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 1 = \angle 3$.

2. Медианы BK и EM треугольника BCE пересекаются в точке O. Докажите, что: 1) $\triangle KOM$ и $\triangle BOE$ подобны; 2) $S_{\triangle MOK} : S_{\triangle CMK} = 1 : 3$.

Доказательство. Пусть условию задачи отвечает рисунок 2. 1) Так как BK и EM медианы треугольника BCE, то $CK = KE$ и $CM = MB$ и, значит, MK — средняя линия треугольника BCE и потому $MK \parallel BE$. Отсюда $\angle BEM = \angle KME$ и $\angle KBE = \angle BKM$ и, значит, треугольники KOM и BOE подобны.

2) В треугольниках MOK, BOE и BCE проведем соответственно высоты OL, OT и CQ. Обозначим через P точку пересечения CQ и MK; CP — высота треугольника CMK, так как $CP \perp MK$ в силу того, что $MK \parallel BE$. Поскольку MK — средняя линия треугольника BCE, то по теореме Фалеса $CP = PQ$, кроме того, $LT = PQ$ ($TLPQ$ — прямоугольник) и, значит, $CP = LT$.

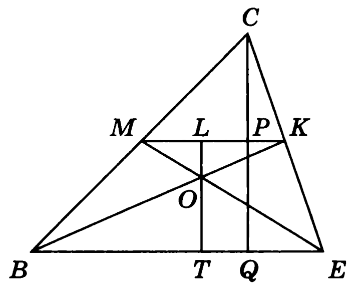


Рис. 2

Далее имеем

$$S_{\triangle MOK} = \frac{1}{2} MK \cdot OL, \quad S_{\triangle CMK} = \frac{1}{2} MK \cdot CP,$$

откуда

$$\frac{S_{\triangle MOK}}{S_{\triangle CMK}} = \frac{OL}{CP}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников MLO и OTE (они подобны в силу равенства вертикальных углов LOM и TOE) следует, что

$$\frac{OL}{OT} = \frac{MO}{OE} = \frac{\frac{1}{3}ME}{\frac{2}{3}ME} = \frac{1}{2}$$

(точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины). Отсюда, учитывая, что $CP = LT = OT + OL$, находим $\frac{CP}{OL} = \frac{OT + OL}{OL} =$ $= \frac{OT}{OL} + 1 = 2 + 1 = 3$ и, значит, $\frac{OL}{CP} = \frac{1}{3}$.

Следовательно, $\frac{S_{\triangle MOK}}{S_{\triangle CMK}} = \frac{1}{3}$.

3. BP и DK — высоты параллелограмма $ABCD$, проведенные из вершин тупых углов, причем точка P лежит между точками C и D, а точка K лежит между точками B и C. Отрезки BP и DK пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники CKD и CPB подобны, а углы KOB и BCD равны.

Доказательство. Прямоугольные треугольники CKD и CPB ($BP \perp CD$ и $DK \perp BC$ по условию) подобны по общему углу C (рис. 3). Отсюда $\angle CBP = \angle KDC$. Значит, прямоугольные треугольники BKO и DKC подобны и потому $\angle KOB = \angle BCD$.

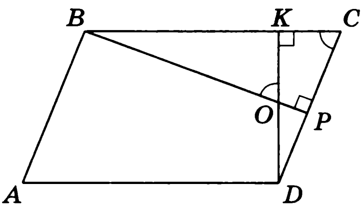


Рис. 3

4. В ромбе $ABCD$ из вершины тупого угла B к стороне AD проведена высота BK и к стороне CD — высота BP. Докажите равенство треугольников ABK и CBP, и равенство углов KBP и BAD.

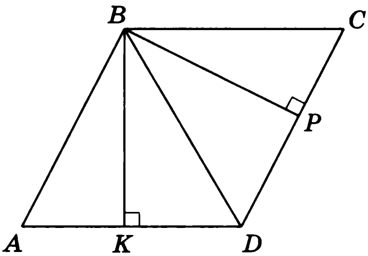


Рис. 4

Доказательство. Пусть условию задачи отвечает рисунок 4. Прямоугольные треугольники AKB и BPC равны по гипотенузе и острому углу ($AB = BC$ как стороны ромба, $\angle A = \angle C$ как противоположные углы параллелограмма). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABK = \angle CBP$. Далее, имеем $\angle CBP + \angle KBP = 90°$, $\angle ABK + \angle BAK = 90°$. Из трех последних равенств следует, что $\angle KBP = \angle BAK$ или $\angle KBP = \angle BAD$.

5. BK и DP — высоты ромба $ABCD$, проведенные из вершин тупых углов соответственно на стороны AD и AB. Прямые BK и DP пересекаются в точке O. Докажите равенство треугольников APD и AKB, и равенство углов BOP и BAD.

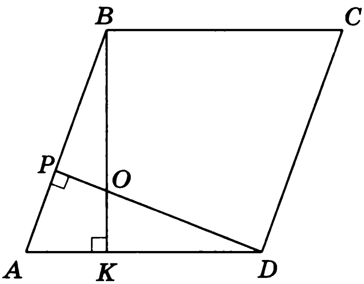


Рис. 5

Доказательство. Прямоугольные треугольники APD и AKB равны по гипотенузе ($AD = AB$ как стороны ромба) и общему острому углу A (рис. 5). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle PBO = \angle ADP$ и, значит, $\angle BOP = \angle BAD$, так как в прямоугольных треугольниках BPO и APD $\angle PBO + \angle BOP = 90°$ и $\angle ADP + \angle PAD = 90°$.

6. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ из точки A проведены диагонали. Докажите, что треугольники ACD и AED равны и прямые BC и AD параллельны.

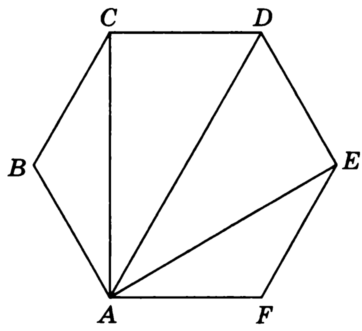


Рис. 6

Доказательство. В силу определения правильного многоугольника $\triangle ABC = \triangle AFE$ (первый признак равенства треугольников) и, значит, $AC = AE$ (рис. 6). Отсюда $\triangle ACD = \triangle ADE$ (третий признак равенства треугольников).

Далее, каждый угол правильного шестиугольника равен $\frac{6-2}{6} \cdot 180° = 120°$. Отсюда следует, что в равнобедренных треугольниках ABC и AEF углы при основаниях равны по 30° и $\angle CAE = 60°$, а значит, $\angle CAD = 30°$ ($\triangle ACD = \triangle ADE$). Таким образом, $\angle CAD = \angle BCA$. Следовательно, $BC \parallel AD$ (если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны).

7. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFGH$. Докажите, что треугольники ADE и AFE равны, а прямые DF и AE перпендикулярны.

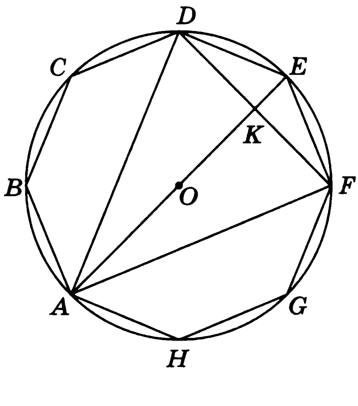


Рис. 7

Доказательство. Опишем около правильного восьмиугольника окружность (рис. 7). Вписанные углы ADE и AFE опираются на диаметр AE и, значит, они прямые. Поэтому прямоугольные треугольники ADE и AFE равны по катету и гипотенузе. Отсюда, соединив D с F отрезком DF, получаем, что в равнобедренном треугольнике DEF ($DE = EF$) EK — биссектриса $\angle DEF$, а значит, и высота. Диаметр AE содержит биссектрису EK. Следовательно, $AE \perp DF$.

8. В квадрате $ABCD$ точка K — середина стороны BC, точка M — середина стороны AB. Докажите, что прямые AK и MD взаимно перпендикулярны, а треугольники AEM (E — точка пересечения прямых AK и MD) и ABK подобны.

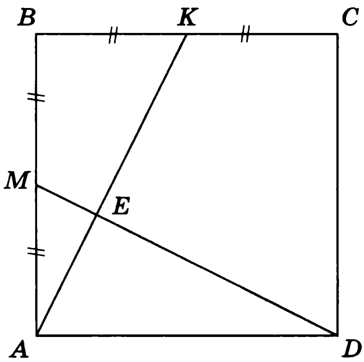


Рис. 8

Доказательство. Прямоугольные треугольники ABK и DAM равны по двум катетам ($AB = AD$ как стороны квадрата $ABCD$, $BK = AM$ как половины сторон этого квадрата) и, значит, $\angle BAK = \angle ADM$ (рис. 8). Далее $\angle MAE + \angle AME = \angle ADM + \angle AMD = 90°$. Следовательно, $\angle AEM = 180° - 90° = 90°$, т. е. $AK \perp MD$.

Наконец, прямоугольные треугольники AEM и ABK подобны по острому углу ($\angle A$ — общий).

9. В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке K, причем $AK = BC$. Найдите радиус этой окружности, если периметр треугольника равен $72\sqrt{2}$.

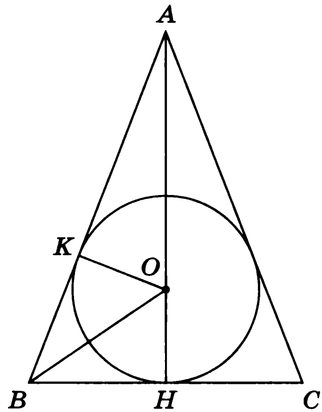


Рис. 9

Решение. Пусть AH — высота равнобедренного треугольника ABC (рис. 9). Тогда согласно свойств равнобедренного треугольника с основанием BC следует, что AH одновременно биссектриса и медиана треугольника ABC. Поэтому центр O вписанной в треугольник окружности (ее радиус обозначим через r) лежит на отрезке AH, окружность касается основания данного треугольника в точке H и $BH = HC$.

Далее, соединив точки B и O отрезком, получим два равных прямоугольных треугольника BKO и BHO (они равны по катету и гипотенузе). Отсюда $BK = BH = \frac{1}{2}BC$ и $AB = AK + KB = BC + \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}BC$. Значит, в силу условия задачи $\frac{3}{2}BC + \frac{3}{2}BC + BC = 72\sqrt{2}$, откуда $BC = AK = 18\sqrt{2}$.

Из прямоугольного треугольника AHB по теореме Пифагора имеем $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{9}{4}BC^2 - \frac{1}{4}BC^2} = BC\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 36$, а из прямоугольного треугольника AKO по той же теореме $(AH - r)^2 = AK^2 + r^2$ или $AH^2 - 2rAH + r^2 = BC^2 + r^2$, откуда $r = \frac{AH^2 - BC^2}{2AH} = \frac{36^2 - 18^2 \cdot 2}{2 \cdot 36} = \frac{18^2 \cdot 2(2-1)}{2 \cdot 36} = 9$.

Ответ: 9.

10. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $BH = 6$, а $\angle ABC = 60°$.

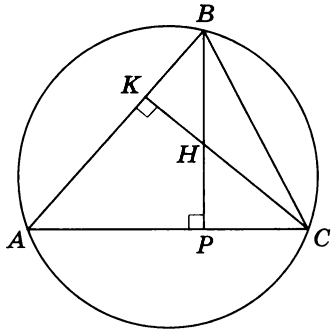


Рис. 10

Решение. Обозначим радиус окружности, описанной около треугольника ABC, через R (рис. 10). Из прямоугольного треугольника AKC следует, что в прямоугольном треугольнике HPC $\angle HCP = 90° - \angle A$ и, значит, $\angle PHC = \angle KHB = 90° - (90° - \angle A) = \angle A$. Отсюда из прямоугольного треугольника BKH имеем $BK = BH \cdot \sin \angle A$. С другой стороны, из прямоугольного треугольника BKC $BK = BC \cdot \cos\angle B$ и, значит, $BH \cdot \sin \angle A = BC \cdot \cos\angle B$, но в силу следствия 12.1 из теоремы синусов $BC = 2R \sin \angle A$. Поэтому $BH \cdot \sin \angle A = 2R \cdot \sin \angle A \cdot \cos\angle B$, откуда $R = \frac{BH}{2\cos\angle B} = \frac{6}{2\cos 60°} = 6$.

Ответ: 6.

11. В равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке M. Найдите радиус этой окружности, если $AM = 10$ и $BM = 15$.

Решение. Имеем $AB = AM + MB = 10 + 15 = 25$. Пусть AH — высота равнобедренного треугольника ABC (рис. 11). Тогда согласно свойствам равнобедренного треугольника с основанием BC следует, что AH одновременно биссектриса этого треугольника. Поэтому центр O вписанной в треугольник окружности лежит на отрезке AH, и окружность касается основания данного треугольника в точке H.

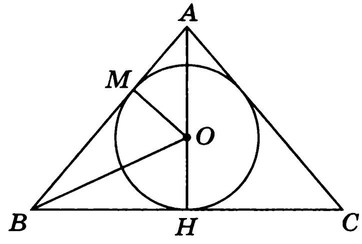


Рис. 11

Далее, соединив точки B и O отрезком, получим два равных прямоугольных треугольника BMO и BHO (они равны по катету и гипотенузе: $OM = OH$ как радиусы окружности и OB их общая сторона).

Отсюда следует, что $BH = BM$. Теперь из прямоугольного треугольника ABH в силу теоремы Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$. Наконец, из подобия прямоугольных треугольников ABH и AOM (по общему острому углу A) $\frac{AH}{AM} = \frac{BH}{OM}$, откуда $OM = \frac{BH \cdot AM}{AH} = \frac{15 \cdot 10}{20} = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

12. Из точки M к окружности, радиус которой равен 4 см, проведены касательная, касающаяся окружности в точке C, и секущая, проходящая через центр O окружности и пересекающая ее в точках A и B так, что $MA = AO$. Точка N — середина дуги AC окружности, заключен-

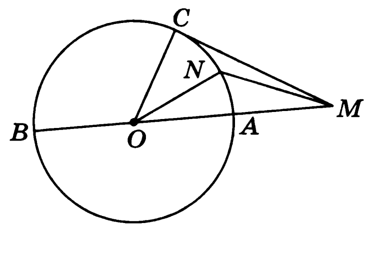


Рис. 12

ной между секущей и касательной. Найдите площадь треугольника MON.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 12. По условию задачи $OA = OC = ON = 4$ (как радиусы окружности), $OM = OA + AM = 2 \cdot OA = 8$ ($MA = AO$). Треугольник OCM — прямоугольный (CM — касательная к окружности в точке C). В этом треугольнике $OC = \frac{1}{2}OM$ и, значит, $\angle CMO = 30°$. Отсюда $\angle COM = 60°$. Тогда и $\angle COA = 60°$, а $\angle AON = 30°$ (N — середина дуги AC). Наконец, $S_{\triangle MON} =$ $= \frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$ (см^2).

Ответ: 8 см^2.

13. Найдите площадь остроугольного треугольника ABC, если известно, что $\angle BAC = 60°$, $AB = 20$, а медиана $AM = 14$.

Решение. В остроугольном треугольнике ABC основание H высоты BH лежит на стороне AC (рис. 13). В прямоугольном треугольнике ABH $BH = AB\sin 60° =$ $= 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$, $AH = AB\cos 60° =$ $= 20 \cdot \frac{1}{2} = 10.$

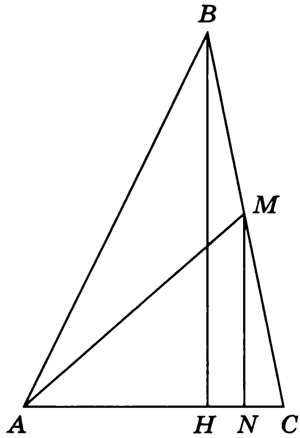


Рис. 13

Далее через точку M проведем прямую, параллельную прямой BH и пересекающую сторону AC в точке N. Тогда по теореме Фалеса $HN = NC$ (AM — медиана), т. е. отрезок MN — средняя линия треугольника BCH. При этом $MN \perp AC$, откуда $MN = \frac{1}{2}BH = 5\sqrt{3}$ и треугольник AMN — прямоугольный. В нем в силу теоремы Пифагора $AN = \sqrt{AM^2 - MN^2} =$ $= \sqrt{14^2 - (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{196 - 75} = \sqrt{121} = 11$. Поскольку $AN > AH$, то $HN = AN - AH = 11 - 10 = 1$.

Учитывая, что $AC = AN + NC$ и $NC = HN$, получаем $AC = 11 + 1 = 12$.

Наконец, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$.

Ответ: $60\sqrt{3}$.

14. Около равнобедренного треугольника MPK с основанием MK, равным 48, описана окружность с центром O. Радиус окружности равен 25. Найдите расстояние от точки O до боковой стороны треугольника.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 14. Так как треугольник MPK равнобедренный, то его высота PR есть одновременно биссектриса и медиана, центр O — точка пересечения прямой PR и серединного перпендикуляра к стороне PK (N — середина стороны PK). Поэтому отрезки OP и OK — радиусы описанной окружности. Из прямоугольного треугольника ORK в силу теоремы Пифагора

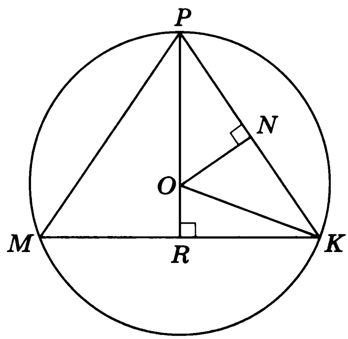


Рис. 14

имеем $OR = \sqrt{OK^2 - RK^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{49} = 7$ и, значит, $PR = PO + OR = 25 + 7 = 32$, а из прямоугольного треугольника PRK по той же теореме $PK = \sqrt{PR^2 + RK^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1600} = 40$ и, значит, $PN = \frac{1}{2} PK = 20$. Наконец, из прямоугольного треугольника ONK находим $ON = \sqrt{OK^2 - NK^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{225} = 15$.

Ответ: 15.

15. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Отрезок MN с концами на боковых сторонах является средней линией треугольника и равен $\sqrt{15}$. Около треугольника описана окружность с центром O и радиусом, равным 8. Найдите длину отрезка OM.

Решение. Так как $MN = \sqrt{15}$ является средней линией треугольника ABC, то $AC = 2\sqrt{15}$ (рис. 15).

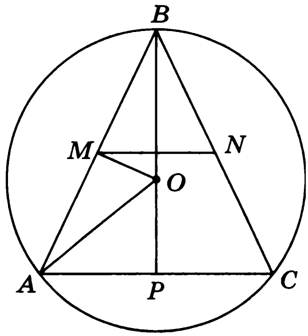


Рис. 15

Центр O окружности, описанной около треугольника ABC, есть точка пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через их середины. Так как треугольник ABC равнобедренный, то O есть точка пересечения высоты BP и серединного перпендикуляра OM (в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является одновременно и медианой). Проведя AO, получим прямоугольные треугольники AMO и APO. Из треугольника APO, в котором $AO = 8$ и $AP = \frac{1}{2}AC = \sqrt{15}$, в силу теоремы Пифагора имеем $PO = \sqrt{AO^2 - AP^2} = \sqrt{64 - 15} = \sqrt{49} = 7$. $BO = AO$ как радиусы. Следовательно, $BP = BO + OP = 15$. Теперь из прямоугольного треугольника APB по этой же теореме имеем $AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = \sqrt{15 + 225} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}$ и, значит, $AM = 2\sqrt{15}$.

Наконец, из прямоугольного треугольника AMO в силу той же теоремы находим $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{64 - 60} = 2$.

Ответ: 2.

16. Через точку O пересечения продолжений боковых сторон трапеции $ABCD$ проведена прямая, параллельная основаниям AD и BC. Эта прямая пересекает продолжения диагоналей DB и AC трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь трапеции $AMND$, если площадь треугольника BOC равна 3, а площадь трапеции $ABCD$ равна 45.

Решение. Пусть $OO_2 = h$ и $OO_1 = h_1$ — высоты подобных треугольников AOD и BOC (их подобие следует из того, что в силу определения трапеции $BC \parallel AD$) соответственно на сходственные стороны AD и BC (рис. 16). Тогда

$$\frac{AD}{BC} = \frac{h}{h_1},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot h_1 = 3,$$

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot h = 45 + 3 = 48.$$

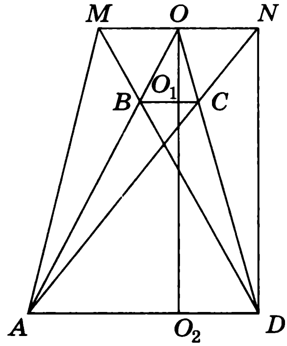


Рис. 16

Отсюда

$$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{h}{h_1} = \left(\frac{h}{h_1}\right)^2$$

и, значит, $\left(\frac{h}{h_1}\right)^2 = 16$, откуда $h = 4h_1$. Площадь трапеции $AMND$ ищем по формуле $S_{AMND} = \frac{1}{2}(AD + MN)h$, где $\frac{1}{2}AD \cdot h = 48$; остается найти $\frac{1}{2}MN \cdot h$.

Из двух пар подобных треугольников MDO и BDC, OAN и BAC (их подобие следует из того, что в силу условия $MN \parallel BC$ и $MN \parallel AD$) имеем

$$\frac{MO}{BC} = \frac{h}{h - h_1}, \qquad \frac{ON}{BC} = \frac{h}{h - h_1}.$$

Складывая эти два равенства и учитывая, что $h = 4h_1$, будем иметь $\frac{MN}{BC} = \frac{8}{3}$, откуда $MN = \frac{8}{3}BC$.

Поэтому $\frac{1}{2}MN \cdot h = \frac{1}{2}BC \cdot h_1 \cdot \frac{32}{3} = 3 \cdot \frac{32}{3} = 32$. Наконец, искомая площадь $S_{AMND} = 48 + 32 = 80$.

Ответ: 80.

17. Расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 20, а боковые стороны равны 24 и 32. Найдите расстояние между точкой пересечения диагоналей трапеции и серединой меньшего основания, если основания трапеции относятся как 3 : 2.

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 17, где R и T — середины соответственно диагоналей AC и BD, M — точка их пересечения, а E — середина основания BC.

Проведя прямую CT (точку ее пересечения с AD обозначим через P), рассмотрим треугольники BCT и TDP. Они равны по второму признаку равенства треугольников ($BT = TD$, $\angle BTC = \angle PTD$ как вертикальные, $\angle TDP = \angle CBT$ как накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей BD). Из равенства этих треугольников следует, что $BC = PD$ и $CT = TP$. Последнее равенство означает, что T — середина стороны PC в треугольнике ACP. Значит, RT — средняя линия этого треугольника и потому $AP = 40$ и $RT \parallel AD$, а значит, RT параллелен и BC, так как $BC \parallel AD$.

Далее, в силу условия задачи и того, что $BC = PD$, имеем $\frac{AD}{BC} = \frac{AP + PD}{BC} = \frac{40 + PD}{BC} = \frac{3}{2}$, откуда $BC = 80$ и, следовательно, $BE = 40$. Соединив точку E с точками R и T, будем иметь: ER — средняя линия треугольника ABC и потому $ER = 24 : 2 = 12$, а ET — средняя линия треугольника BCD и потому $ET = 32 : 2 = 16$.

Продолжив EM до пересечения с RT (точку пересечения обозначим через K), рассмотрим две пары подобных треугольников BEM и KMT, ECM и RKM (треугольники каждой пары подобны по двум соответствующим накрест лежащим углам, так как $RT \parallel BC$). Из их подобия следует, что $\frac{EM}{MK} = \frac{BE}{KT}$, $\frac{EM}{MK} = \frac{EC}{RK}$. Отсюда $\frac{BE}{KT} = \frac{EC}{RK}$ и, значит, $RK = KT$, т. е. K — середина отрезка RT и $RK = KT = 10$. Поэтому $\frac{EM}{MK} = \frac{BE}{KT} = \frac{40}{10} = 4$.

Следовательно, $EM = 4MK$.

Проведем высоту EH в треугольнике REK и обозначим для краткости RH через y. По теореме Пифагора имеем: $ER^2 - y^2 = EH^2$, $EH^2 = ET^2 - (RT - y)^2$, что приводит к урав-

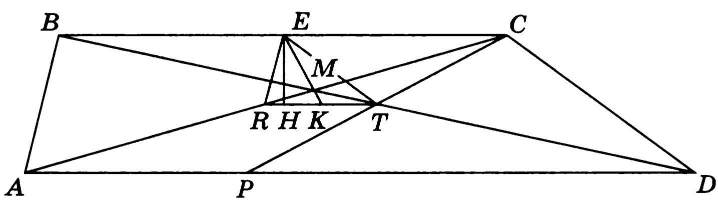


Рис. 17

нению $12^2 - y^2 = 16^2 - (20 - y)^2$, откуда $288 = 40y$, т. е. $y = \frac{36}{5}$. По той же теореме $EK^2 = EH^2 + HK^2 = 12^2 - y^2 + (10 - y)^2 = 244 - 20 \cdot \frac{36}{5} = 100$ и, значит, $EK = 10$ или $EM + MK = 10$. Поэтому $5MK = 10$, $MK = 2$ и $EM = 8$.

Ответ: 8.

18. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а медианы — в точке M. Точка K — середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB = 6$, $CH = 3$, $\angle BAC = 45°$.

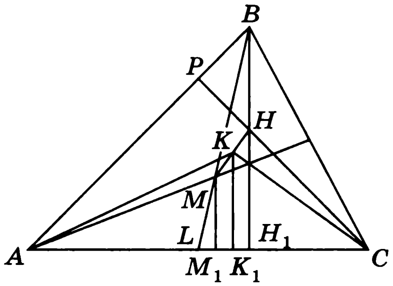


Рис. 18

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 18, где CP — высота, BL — медиана треугольника ABC, а H_1, K_1 и M_1 — основания перпендикуляров, проведенных соответственно из точек H, K и M к AC. В силу условия $\angle PAC = 45°$ и, значит, в прямоугольном треугольнике HH_1C $\angle HCH_1 = 45°$ и его катеты равны: $CH_1 = HH_1 = CH \sin 45° = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Аналогично в прямоугольном треугольнике BH_1A катеты равны: $AH_1 = BH_1 = AB \sin 45° = 3\sqrt{2}$.

Далее из подобия треугольников BH_1L и MM_1L (по двум углам: $\angle BH_1L = \angle MM_1L = 90°$, $\angle MLM_1$ — общий) с учетом свойства медиан треугольника имеем: $\frac{BH_1}{MM_1} = \frac{BL}{ML} = \frac{3}{1}$. Отсюда $MM_1 = \frac{1}{3} BH_1 = \sqrt{2}$.

Поскольку точка K — середина отрезка MH, то из теоремы Фалеса следует, что точка K_1 — середина отрезка M_1H_1 и, значит, KK_1 — средняя линия трапеции H_1M_1MH. Поэтому $KK_1 = \frac{HH_1 + MM_1}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

Наконец, так как $AC = AH_1 + H_1C = 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$,

то $S_{\triangle AKC} = \frac{1}{2}AC \cdot KK_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{45}{8} = 5{,}625$.

Ответ: 5,625.

19. В треугольнике ABC проведены высоты AN и BM и отмечена точка K — середина стороны AB. Найдите AB, если известно, что $\angle ACB = 105°$, а площадь треугольника MNK равна 4.

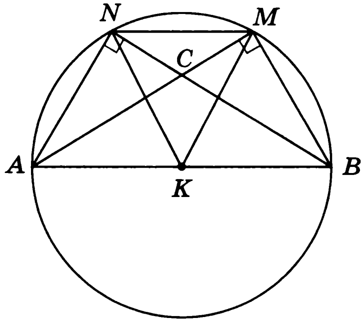


Рис. 19

Решение. Проведем окружность с центром в точке K радиусом $\frac{AB}{2}$ (рис. 19). По условию $\angle ANB = \angle AMB = 90°$ и, значит, точки M и N лежат на этой окружности и потому $KM = KN = \frac{AB}{2}$.

В прямоугольном треугольнике CMB $\angle BCM = 180° - \angle ACB = 180° - 105° = 75°$ и, значит, $\angle CBM = \angle NBM = 90° - 75° = 15°$. Следовательно, $\angle NKM = 2\angle NBM = 30°$ ($\angle NKM$ — центральный, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол NBM).

Наконец, $S_{\triangle MNK} = \frac{1}{2} \cdot KM \cdot KN \sin \angle NKM = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$.

Тогда $\frac{1}{16}AB^2 = 4$. Отсюда $AB = 8$.

Ответ: 8.

20. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, а медианы — в точке M. Точка K — середина отрезка MH. Найдите площадь треугольника AKC, если известно, что $AB = 24$, $CH = 12\sqrt{3}$, $\angle BAC = 60°$.

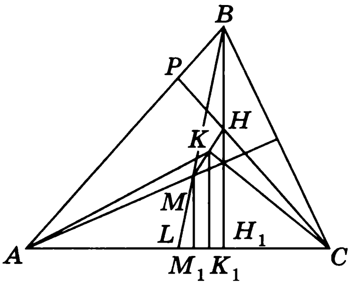


Рис. 20

Решение. Пусть условию задачи отвечает рисунок 20, где CP — высота, BL — медиана треугольника ABC, а H_1, K_1 и M_1 — основания перпендикуляров, проведенных соответственно из точек H, K и M к AC. В силу условия $\angle PAC = 60°$ и, значит, в прямоугольном треугольнике HH_1C $\angle HCH_1 = 30°$ и его катеты равны: $CH_1 = CH\cos 30° = 18$ и $HH_1 = CH\sin 30° = 6\sqrt{3}$. Аналогично в прямоугольном треугольнике BH_1A катеты равны: $AH_1 = AB\cos 60° = 12$ и $BH_1 = AB\sin 60° = 12\sqrt{3}$.

Далее из подобия треугольников BH_1L и MM_1L (их подобие следует из того, что $MM_1 \parallel BH_1$) с учетом свойства медиан треугольника имеем: $\dfrac{BH_1}{MM_1} = \dfrac{BL}{ML} = \dfrac{3}{1}$, откуда $MM_1 = \dfrac{1}{3}BH_1 = 4\sqrt{3}$.

Поскольку точка K — середина отрезка MH, то из теоремы Фалеса следует, что точка K_1 — середина отрезка M_1H_1 и, значит, KK_1 — средняя линия трапеции H_1M_1MH. Поэтому $KK_1 = \dfrac{HH_1 + MM_1}{2} = \dfrac{6\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

Наконец, так как $AC = AH_1 + H_1C = 12 + 18 = 30$, то $S_{\triangle AKC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot KK_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 5\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$.

Ответ: $75\sqrt{3}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

С

Т

У

СОДЕРЖАНИЕ

Серия «Готовимся к экзаменам. ГИА»

Учебное издание

Баврин Иван Иванович

ГЕОМЕТРИЯ

9 класс

Зав. редакцией *О. В. Муравина*
Редактор *И. В. Комарова*
Художественное оформление *А. В. Пряхин*
Технические редакторы *В. Ф. Козлова, И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *В. В. Ивлиева*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.009733.08.09 от 18.08.2009.

Подписано к печати 24.06.10. Формат $60 \times 90^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 10,0. Тираж 10 000 экз. Заказ № 3531.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

**Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги
просим направлять в редакцию общего образования
издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79.
Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru**

**По вопросам приобретения продукции
издательства «Дрофа» обращаться по адресу:**
127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник».
109172, Москва, Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Сеть магазинов «Переплетные птицы».
Тел.: (495) 912-45-76.

Интернет-магазин: http://www.drofa.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО ордена «Знак Почета»
«Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова».
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.


ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
РАО
2011
Сдаем ЕГЭ
ГИА
РУССКИЙ ЯЗЫК
РАО
2011
Готовимся к экзаменам ГИА
9
ЕГЭ
БИОЛОГИ
РАО
ЕГЭ: шаг за ша
8
ЕГЭ
ФИЗИКА
РАО
2011
ЕГЭ
ЛИТЕРАТУРА
РАО
2011
Готовимся к ЕГЭ