Под редакцией Д.А. Мальцева

АЛГЕБРА
9 класс
РЕШЕБНИК
ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ 2011

Учебно-методическое пособие

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

НИИ школьных технологий
Москва
2011

ББК 22.1
А 45

Рецензенты:

К. Э. Каибханов, к. ф.-м. н., доцент ЮФУ;
Н. Н. Кирилюк, учитель высшей категории;
В. Ф. Петрова, учитель высшей категории;
А. М. Кушнир, к. пс. н.

Авторы:

О. А. Бубличенко, Н. А. Васинькина, Т. В. Винокурова, С. З. Каибханова, А. Б. Лагутина, Р. П. Лысенко, А. А. Мальцев, Д. А. Мальцев, Л. И. Мальцева, Е. И. Чиркова, Е. А. Шатилова

Разработано при участии лаборатории методологии проектирования технологии и содержания обучения Федерального института развития образования (ФИРО)

А 45 **Алгебра 9 класс. Решебник. Итоговая аттестация 2011**: учебно-методическое пособие / Под ред. Д.А. Мальцева. — Ростов н/Д: Издатель Мальцев Д.А.; М.: НИИ школьных технологий, 2011. – 80 с.

Данное пособие содержит решения заданий с развёрнутым ответом для каждого второго теста, а также решения заданий из задачника книги «Алгебра 9 класс. Итоговая аттестация 2011. Предпрофильная подготовка» под редакцией Д.А. Мальцева. Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем.

Основная цель данной книги — помочь ученику, желающему научиться решать наиболее сложные задачи предстоящего выпускного экзамена по алгебре.

ISBN 978-5-903582-24-2 *(ИП Мальцев Д.А.)* ББК 22.1
ISBN 978-5-91447-060-6 *(НИИ школьных технологий)*

Содержание

От авторов

Основная цель данной книги — помочь ученику, желающему научиться решать задания второй части выпускного экзамена по алгебре. Поэтому авторы старались писать решения подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений этих задач часто достаточно меньшей степени подробности, чем выбрана авторами, вы вполне можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов оформления решений, используемых в этой книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то ...», помогут вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Желаем вам успехов!

Авторы благодарят рецензентов данной книги за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Глава I

Решения задач из сборника тестов

§ 1. Решения тестов 2010-2011 г.

Тест №1

Часть 2

$\boxed{19}$ Решите уравнение $\left(\sqrt{x-4}\right)^3 - 5x + \sqrt{x-4} + 15 = 0.$

Решение.

Область определения данного уравнения: $x - 4 \geqslant 0,\ x \geqslant 4$. Осуществим преобразование уравнения, равносильное на его области определения: $\sqrt{x-4}\cdot\left(\left(\sqrt{x-4}\right)^2+1\right) - 5x + 15 = 0$, $\sqrt{x-4}\cdot(x-3) - 5(x-3) = 0$, $(x-3)(\sqrt{x-4}-5) = 0$. Последнее уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ \sqrt{x-4}-5=0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x-4=25, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=29. \end{array}\right.$$

Значение $x = 3$ не входит в область определения исходного уравнения, т.е. не является его корнем.

Ответ: $x = 29$.

$\boxed{20}$ Решите неравенство $\left(2^{100} - 5^{50}\right)\cdot\left(3 - (\sqrt{2}+1)x\right) > 0.$

Решение.

Заметим, что $2^{100} = \left(2^2\right)^{50}$. Так как $2^2 < 5$, то $\left(2^2\right)^{50} < 5^{50}$, и поэтому $2^{100} - 5^{50} < 0$.

Разделив обе части исходного неравенства на отрицательное число $2^{100} - 5^{50}$, получим равносильное неравенство: $3 - (\sqrt{2}+1)x < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 < (\sqrt{2}+1)x \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$, или $x > \dfrac{3(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$, $x > 3(\sqrt{2}-1)$.

Ответ: $x > 3(\sqrt{2}-1)$.

$\boxed{21}$ В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 1000, а сумма первых четырёх членов равна 1010. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии, если известно, что её знаменатель положителен.

Решение.

Пусть b — первый член данной в условии геометрической прогрессии, q — знаменатель этой прогрессии. Тогда $b\cdot q, b\cdot q^2, b\cdot q^3$ — второй, третий и четвёртый члены этой прогрессии. По условию имеем:

$$\begin{cases} b+bq=1000 \\ b+bq+bq^2+bq^3=1010; \end{cases} \quad \begin{cases} b\cdot(1+q)=1000 \\ b\cdot(1+q)+bq^2(1+q)=1010; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\cdot(1+q)=1000 \\ b(1+q)(1+q^2)=1010 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\cdot(1+q)=1000 \\ 1000(1+q^2)=1010 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\cdot(1+q)=1000 \\ 1+q^2=1,01 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\cdot(1+q)=1000 \\ q=\pm 0{,}1. \end{cases}$$

Так как по условию $q>0$, то $q=0{,}1$. Чтобы вычислить сумму первых восьми членов прогрессии заметим, что $b_5+b_6+b_7+b_8=bq^4+bq^5+$ $+bq^6+bq^7=q^4(b+bq+bq^2+bq^3)=q^4\cdot 1010=1010\cdot 0{,}1^4=0{,}101.$ Поэтому сумма первых восьми членов равна $1010+0{,}101=1010{,}101$.

Ответ: 1010,101.

$\boxed{22}$ Прямая $3x+4y=c$, где c — некоторое число, касается гиперболы $y=\dfrac{12}{x}$ в точке с отрицательной абсциссой. Найдите число c.

Решение.

1) Изобразим прямую $3x+4y=0$ и график функции $y=\dfrac{12}{x}$, см. рис. 1.

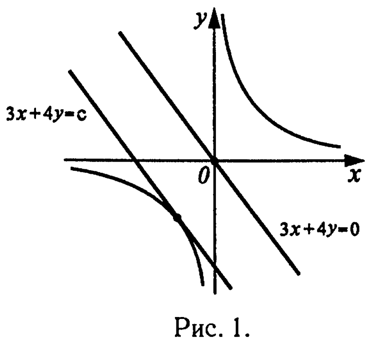


Рис. 1.

Прямые $3x + 4y = c$ и $3x + 4y = 0$ параллельны при любом значении c. Поэтому на основании рисунка 1 делаем вывод, что прямая $3x + 4y = c$ касается графика $y = \dfrac{12}{x}$ в том и только том случае, когда она имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

2) Прямая $3x + 4y = c$ и график $y = \dfrac{12}{x}$ имеют ровно одну общую точку $\Leftrightarrow$ система уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = c \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Подставляя $y = \dfrac{12}{x}$ в первое уравнение системы, получаем:

$$3x + \frac{48}{x} = c \Leftrightarrow 3x^2 - cx + 48 = 0.$$

Каждому корню x_0 уравнения $3x^2 - cx + 48 = 0$ соответствует ровно одно решение $x = x_0$, $y = \dfrac{12}{x_0}$ указанной выше системы, и наоборот.

Уравнение $3x^2 - cx + 48 = 0$ имеет единственный корень ($x_0 = c/6$) в том и только том случае, когда его дискриминант $D = c^2 - 12 \cdot 48$ равен нулю.

На основании изложенного выше получаем, что прямая $3x + 4y = c$ касается графика $y = \dfrac{12}{x}$ $\Leftrightarrow$ $c^2 - 12 \cdot 48 = 0$, $c^2 = 12^2 \cdot 4$, $c = \pm 24$.
Так как по условию абсцисса точки касания $x_0 = \dfrac{c}{6}$ отрицательна, то $c < 0$, т.е. $c = -24$.

Ответ: $c = -24$.

Примечание 1. Заметим, что если прямая $ax + by = c$ имеет ровно одну общую точку с некоторой линией на плоскости Oxy, то это ещё не означает, что она касается этой линии. В качестве примера рассмотрим прямую $y = x + 6$ и график функции $y = x^3$, см. рис. 2.

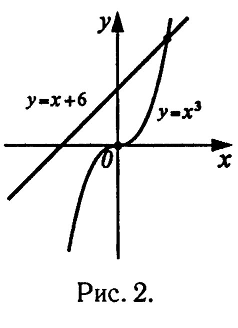


Рис. 2.

Можно доказать, что система $\begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^3 \end{cases}$ имеет единственное решение, но очевидно, что о касании прямой $y = x + 6$ и графика $y = x^3$ речь идти не может. Таким образом, приведённое выше решение без ссылки на рисунок 1 было бы неполным.

Примечание 2. Для строгого доказательства (без ссылки на рисунок) равносильности утверждений – «прямая $3x + 4y = c$ касается графика $y = \frac{12}{x}$» и «прямая $3x + 4y = c$ имеет ровно одну общую точку с графиком $y = \frac{12}{x}$», необходимо уточнить понятие «касания» прямой и графика функции. Как это делается, вы узнаете в 11-м классе при изучении темы «Геометрический смысл производной».

23 Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно с этим из пункта В в пункт А вышел катер, собственная скорость которого в шесть раз больше скорости течения реки. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл обратно. Какую часть расстояния от пункта А до пункта В останется проплыть плоту к тому моменту, когда катер вернётся в пункт В?

Решение.

Пусть v – скорость течения реки, t – время, прошедшее с момента отплытия плота и катера до момента их встречи. Тогда скорость катера при движении от пункта В навстречу плоту равна $6v - v = 5v$ (собственная скорость катера, которая в 6 раз больше скорости течения, минус скорость течения).

За время t плот проплывёт расстояние vt, а катер – расстояние $5vt$. Поэтому расстояние между пунктами А и В равно $vt + 5vt = 6vt$.

После встречи с плотом катер плывёт обратно, т.е. вниз по течению, и его скорость равна $6v + v = 7v$ (собственная скорость катера плюс скорость течения). Поэтому расстояние от места встречи с плотом до пункта В, равное $5vt$, катер проплывёт за время $\frac{5vt}{7v} = \frac{5}{7}t$.

За время $\frac{5}{7}t$ плот проплывёт расстояние $\frac{5}{7}t \cdot v$, а общее расстояние, пройденное плотом к моменту возвращения катера в пункт В, будет равно $vt + \frac{5}{7}vt = \frac{12}{7}vt$.

Следовательно, к моменту возвращения катера в пункт В плоту останется проплыть расстояние, равное $6vt - \frac{12}{7}vt = \frac{30}{7}vt$, что составляет $\frac{30}{7}vt : (6vt) = \frac{5}{7}$ частей всего расстояния от А до В.

Ответ: $\frac{5}{7}$.

Тест № 3

Часть 2

$\boxed{19}$ Запишите уравнений прямой, параллельной прямой $y = -3x + 6$ и проходящей через точку $A(2; -3)$.

Решение.

Пусть $y = kx + b$ — искомое уравнение прямой. Прямые $y = kx + b$ и $y = -3x + 6$ параллельны $\Leftrightarrow$ угловые коэффициенты этих прямых равны $\Leftrightarrow$ $k = -3$. Прямая $y = -3x + b$ проходит через точку $A(2; -3)$ $\Leftrightarrow$ координаты точки A удовлетворяют уравнению прямой $\Leftrightarrow$ $-3 \cdot 2 + b = -3$, $b = 3$. Итак, $k = -3$, $b = 3$, $y = -3x + 3$ — искомое уравнение прямой.

$\boxed{20}$ Упростите выражение $b \cdot \left(\frac{1}{b - b^3} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{b}{b+1} + \frac{b}{b-1}\right)$.

Решение.

Преобразуем данное выражение по действиям:

1) $\frac{1}{b - b^3} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b(1 - b^2)} - \frac{1}{b} = \frac{1 - (1 - b^2)}{b(1 - b^2)} = \frac{b^2}{b(1 - b^2)} = \frac{b}{1 - b^2}$;

2) $\frac{b}{b+1} + \frac{b}{b-1} = b \cdot \left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b-1}\right) = b \cdot \frac{b - 1 + b + 1}{(b+1)(b-1)} = \frac{2b^2}{b^2 - 1}$;

3) $b \cdot \frac{b}{1 - b^2} : \frac{2b^2}{b^2 - 1} = \frac{b^2}{1 - b^2} \cdot \frac{b^2 - 1}{2b^2} = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-0{,}5$.

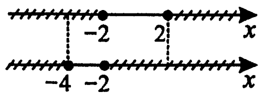
$\boxed{21}$ Укажите все целые числа, которые не принадлежат области определения выражения $\sqrt{x^2 + 6x + 8} - \sqrt{x^2 - 4}$.

Решение.

Областью определения данного в условии выражения является множество решений системы:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0 \\ x^2 + 6x + 8 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решив каждое из неравенств этой системы методом интервалов (см. рисунок), получим, что областью определения данного в условии выражения являются $x \in (-\infty; -4] \cup \{-2\} \cup [2; +\infty)$.



Легко видеть, что целыми числами, не принадлежащими множеству $(-\infty; -4] \cup \{-2\} \cup [2; +\infty)$, являются числа $-3, -1, 0, 1$.

Ответ: $-3, -1, 0, 1$.

22 Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 2y - 3x = 10 \\ 2x + y = p. \end{cases}$$

Найдите все значения p, при которых эта система имеет решение.

Решение.

Проведём равносильные преобразования первых двух уравнений данной системы:

$$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 2y - 3x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 4 \\ 2y - 3x = 10 \end{cases} (+) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 4 \\ 7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 2. \end{cases}$$

Таким образом, из первых двух уравнений системы следует, что $x = 2$, $y = 8$. Подставляя $x = 2$, $y = 8$ в третье уравнение системы, получаем равенство $2 \cdot 2 + 8 = p$, которое справедливо лишь для $p = 12$.

Ответ: $p = 12$.

23 Из города A в город B одновременно выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля — 60 км/ч, а скорость второго — 90 км/ч. Спустя 30 минут из города A в город B выехал третий автомобиль, который догнал сначала первый автомобиль, а через час после этого догнал второй автомобиль. Найдите скорость третьего автомобиля.

Решение.

Пусть v км/ч — скорость третьего автомобиля, а t часов — время, понадобившееся ему, чтобы догнать первый автомобиль. Тогда первый автомобиль до того момента, как его догнал третий, был в пути $(t+0{,}5)$ ч. Поэтому $60(t+0{,}5)=vt$. Так как третий автомобиль догнал второй спустя ещё час, то до этого момента он был в пути $(t+1)$ ч, а второй — $(t+1{,}5)$ ч. Отсюда имеем: $90(t+1{,}5)=v(t+1) \Rightarrow v$ и t удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} 60t+30=vt \quad (1) \\ 90t+135=vt+v \quad (2). \end{cases}$$

Выполняя в уравнении (2) подстановку $vt=60t+30$ и приводя подобные, получаем: $30t+105=v$ (3). Из соотношения (3) и уравнения (1) следует, что $60t+30=(30t+105)t$, $30t^2+45t-30=0$, $2t^2+3t-2=0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $t=-2$ и $t=0{,}5$. Значение $t=-2$ не удовлетворяет смыслу задачи, а при $t=0{,}5$ имеем:
$v=30\cdot 0{,}5+105=120$.

Ответ: 120 км/ч.

Тест № 5*

Часть 2

$\boxed{19}$ Решите уравнение $\dfrac{2-x}{x-3}+\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{6}{9-x^2}$.

Решение.

Преобразуем левую часть данного уравнения: $\dfrac{2-x}{x-3}+\dfrac{2x}{x+3}=$

$$=\frac{(2-x)(x+3)+2x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x-x^2+6-3x+2x^2-6x}{x^2-9}=$$

$=\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-9}$. Далее имеем: $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-9}=\dfrac{6}{9-x^2}$, $\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-9}=$

$$=\frac{-6}{x^2-9} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+6=-6 \\ x^2-9\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+12=0 \\ x\neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: $x=4$.

$\boxed{20}$ Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-24;9)$ и $B(40;-7)$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

Решение.

Пусть $y=kx+b$ — искомое уравнение прямой. Так как эта прямая проходит через точки $A(-24;9)$ и $B(40;-7)$, то при подстановке координат точек A и B в уравнение $y=kx+b$ должны получаться верные равенства. Поэтому для коэффициентов k, b имеем систему:

$\begin{cases} -24k+b=9 \\ 40k+b=-7. \end{cases}$ Вычитая из 2-го уравнения этой системы 1-ое уравнение, получаем: $64k=-16$, $k=-\frac{1}{4}$. Отсюда, $-24\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+b=9$, $b=3$. Итак, искомая прямая задаётся уравнением $y=-\frac{1}{4}x+3$.

Точкой пересечения прямой $y=-\frac{1}{4}x+3$ с осью абсцисс является точка $(x_0;0)$, где x_0 — корень уравнения $-\frac{1}{4}x+3=0$, т.е. $x_0=12$.

Ответ: $y=-\frac{1}{4}x+3, (12;0)$.

21 Сократите дробь $\dfrac{8b^3-a^3+a-2b}{1-(a+b)^2-3b^2}$.

Решение.

Применяя формулы разности кубов и квадрата суммы, имеем:

$$\frac{8b^3-a^3+a-2b}{1-(a+b)^2-3b^2}=\frac{(2b-a)(4b^2+2ab+a^2)+(a-2b)}{1-(a^2+2ab+b^2)-3b^2}=$$

$$=\frac{(2b-a)(4b^2+2ab+a^2-1)}{1-4b^2-2ab-a^2}=-(2b-a)=a-2b.$$

Ответ: $a-2b$.

22 За несколько дней до соревнований спортсмен стал «сбрасывать» вес, уменьшая каждые сутки вес своего тела на одно и то же число процентов от предыдущего значения. Определите, на сколько процентов в сутки спортсмен уменьшал свой вес, если известно, что за последние двое суток до соревнований его вес уменьшился с 62,5 кг до 57,6 кг.

Решение.

Пусть $p\cdot 100\%$ — проценты, на которые спортсмен уменьшал свой вес за сутки. Тогда за первые из двух суток до соревнований вес спортсмена уменьшился с 62,5 кг до $62{,}5-p\cdot 62{,}5=62{,}5\cdot(1-p)$ кг, а ещё через сутки был равен $62{,}5\cdot(1-p)-p\cdot\big(62{,}5\cdot(1-p)\big)=62{,}5\cdot(1-p)^2$ кг. По условию, после этих изменений вес спортсмена стал равен 57,6 кг, т.е. $62{,}5\cdot(1-p)^2=57{,}6$. Проведём вычисления: $(1-p)^2=\frac{57{,}6}{62{,}5}=\frac{576}{625}=$ $=\frac{24^2}{25^2}\Leftrightarrow 1-p=\frac{24}{25}$ (так как часть меньше целого, то $p<1$ и $1-p>0$). Отсюда находим, что $p=0{,}04$, т.е. искомое количество процентов равно 4.

$\boxed{23}$ При каких значениях p прямая $y = p$ имеет три общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x(x+6), \text{ при } x < 0, \\ 2px - x^2, \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$

Решение.

При $x < 0$ графиком функции $f(x)$ является часть параболы $y = x^2 + 6x$, ветви которой направлены вверх, а вершиной является точка с координатами $(-3; -9)$ (по известной формуле, $x_в = \frac{-6}{2} = -3$, тогда $y_в = f(x_в) = -3(-3+6) = -9$).

При $x > 0$ графиком функции $f(x)$ является часть параболы $y = 2px - x^2$, ветви которой направлены вниз, а вершина — точка с координатами $(p; p^2)$. Возможны следующие случаи: а) $p > 0$; б) $p \leqslant 0$. На рисунках 3а) и 3б) изображён вид графика функции $f(x)$ в случаях $p > 0$ и $p \leqslant 0$ соответственно.

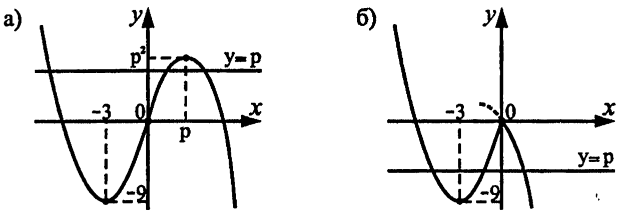


Рис. 3.

Рассмотрим поочерёдно оба этих случая.

а) Из вида графика $y = f(x)$ при $p > 0$ (см. рис. 3а)) следует, что прямая $y = p$ пересекает график $y = f(x)$ в трёх точках $\Leftrightarrow$ $p < p^2$ $\Leftrightarrow$ $p > 1$ (с учётом условия $p > 0$ при сокращении обеих частей неравенства на p, знак неравенства сохраняется).

б) Из вида графика $y = f(x)$ при $p \leqslant 0$ (см. рис. 3б)) следует, что прямая $y = p$ пересекает график $y = f(x)$ в трёх точках $\Leftrightarrow$ $0 > p > -9$.

Объединяя значения p, найденные в случаях а), б), приходим к ответу: $p \in (-9; 0) \cup (1; +\infty)$.

§ 2. Решения тестов 2009 г.

Тест №1

Часть 2

19 Решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0$.

Решение.

Так как $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = x(x^2 - 9) - 6(x^2 - 9) = (x-6)(x^2-9)$, то данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x - 6 = 0$ и $x^2 - 9 = 0$, т.е. его корнями являются $x = 6$ и $x = \pm 3$.

Ответ: $\pm 3; 6$.

20 Решите неравенство $(\sqrt{11} - 3{,}5)\cdot(5x - 11) < 0$.

Решение.

Так как $3{,}5^2 = 12{,}25 > 11$, то $3{,}5 > \sqrt{11}$, $\sqrt{11} - 3{,}5 < 0$. Поэтому данное в условии неравенство равносильно неравенству $5x - 11 > 0$, решением которого являются $x > 2{,}2$.

Ответ: $x > 2{,}2$.

21 В геометрической прогрессии сумма первого, второго и третьего членов равна 14, а сумма второго, третьего и четвёртого членов равна 7. Найдите сумму первых пяти членов этой прогрессии.

Решение.

Сумма первого, второго и третьего членов геометрической прогрессии равна $b_1 + b_1q + b_1q^2 = b_1(1 + q + q^2)$, а сумма второго, третьего и четвёртого членов этой же прогрессии равна $b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 = b_1q(1+q+q^2)$, где b_1 — первый член, q — знаменатель прогрессии. Из условия имеем систему:

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 14 \\ b_1q(1+q+q^2) = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1q(1+q+q^2)}{b_1(1+q+q^2)} = \frac{7}{14} \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Подставляя $q = 0{,}5$ в уравнение $b_1(1 + q + q^2) = 14$, получаем: $b_1 \cdot 1{,}75 = 14$, $b_1 = 8$. Из формулы суммы членов геометрической прогрессии для суммы первых пяти членов данной прогрессии (S_5) имеем:

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = 8\cdot\left(\frac{1}{32} - 1\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{2} = 15{,}5.$$

Ответ: 15,5

22 При каких значениях m и n, связанных соотношением $m + n = 3$, выражение $4n^2 - 4mn - 3m^2$ принимает наименьшее значение?

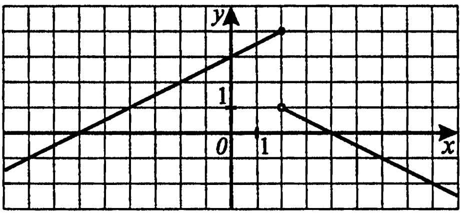
Решение.

Выразим m через n: $m = 3 - n$. Отсюда имеем: $4n^2 - 4mn - 3m^2 = 4n^2 - 4(3-n)n - 3(3-n)^2 = 4n^2 - 12n + 4n^2 - 27 + 18n - 3n^2 = 5n^2 + 6n - 27$. Графиком функции $y = 5n^2 + 6n - 27$ является парабола с вершиной в точке $n_0 = \frac{-6}{10} = -0{,}6$.

Таким образом, квадратный трёхчлен $5n^2 + 6n - 27$ достигает своего наименьшего значения при $n = -0{,}6$, а данное в условии выражение имеет наименьшее значение при $m = 3 - n = 3{,}6$, $n = -0{,}6$.

Ответ: $m = 3{,}6, n = -0{,}6$

23 На рисунке изображён график кусочно-линейной функции. Задайте эту функцию аналитически (т.е. с помощью формул).



Решение.

По условию, при $x \leqslant 2$ график функции совпадает с прямой, проходящей через точки с координатами $(0; 3)$ и $(-6; 0)$ (см. рисунок). Подставляя $x = 0, y = 3$ и $x = -6, y = 0$ в уравнение прямой $y = kx + b$, получаем:

$$\begin{cases} b = 3 \\ k\cdot(-6) + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ -6k + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ k = 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, при $x \leqslant 2$ функция, заданная графиком на рисунке к условию, определяется формулой: $y = 0{,}5x + 3$.

Аналогично, из того, что при $x > 2$ график функции совпадает с прямой, содержащей точки с координатами $(4; 0)$ и $(6; -1)$ (см. рисунок), для коэффициентов этой прямой имеем систему:

$$\begin{cases} 4k + b = 0 \\ 6k + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k + b = 0 \\ 2k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\cdot(-0{,}5) + b = 0 \\ k = -0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ k = -0{,}5. \end{cases}$$

Итак, функция заданная графиком на рисунке к условию, определяется формулами: $y = 0{,}5x + 3$, при $x \leqslant 2$; $y = -0{,}5x + 2$, при $x > 2$.

Тест № 3

Часть 2

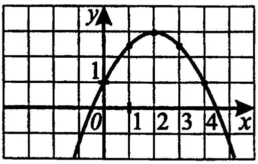
19 Постройте график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ и укажите наибольшее значение этой функции.

Решение.

Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Абсциссу вершины параболы находим по формуле $x_в = -\frac{b}{2a}$; $x_в = -\frac{2}{2\cdot(-0{,}5)} = 2$. Подставляя $x_в$ в уравнение параболы, находим ординату её вершины, значение которой и является наибольшим значением данной в условии функции: $y_{\max} = y_в = -0{,}5 \cdot 2^2 + 2\cdot 2 + 1 = 3$.

Для построения графика данной параболы вычислим координаты двух пар её точек, симметричных относительно её оси. В качестве таковых возьмём, например, пары точек с абсциссами $x_1 = 1, x_2 = 3$ и $x_3 = 0, x_4 = 4$. Имеем: $y_1 = y_2 = y(1) = 2{,}5$, $y_3 = y_4 = y(0) = 1$. Эскиз графика изображён на приведённом ниже рисунке.

Ответ: $y_{\max} = 3$



20 Выясните, имеет ли корни уравнение $x^2 + 5\sqrt{3}x + 5x = -45$.

Решение.

Запишем данное квадратное уравнение в стандартном виде и вычислим его дискриминант: $x^2 + (5\sqrt{3} + 5)x + 45 = 0$,

$$D = (5\sqrt{3}x + 5)^2 - 4\cdot 45 = 75 + 50\sqrt{3} + 25 - 180 = 50\sqrt{3} - 80.$$

Сравним числа $5\sqrt{3}$ и 8 : $(5\sqrt{3})^2 = 75$, $8^2 = 64 \Rightarrow 5\sqrt{3} > 8$. Значит, $D = 10\cdot(5\sqrt{3} - 8) > 0$ и данное уравнение имеет корни.

Ответ: да

$\boxed{21}$ Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 100, которые не делятся на 4.

Решение.

По формуле суммы арифметической прогрессии сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 100, равна $\frac{1+100}{2}\cdot 100 = 5050$. Натуральные числа, делящиеся на 4 и не превосходящие 100, образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 4$ и последним членом $a_{25} = 100$ $(100 = 4\cdot 25)$, а их сумма равна $\frac{4+100}{2}\cdot 25 = 1300$. Поэтому сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 100, которые <u>не делятся</u> на 4, равна $5050 - 1300 = 3750$.

Ответ: 3750

$\boxed{22}$ Для выражения $(3x+y-2)^2+(2x-3y+50)^2$ найдите его наименьшее значение (m) и укажите значения x, y, при которых оно достигается.

Решение.

Так как $(3x+y-2)^2 \geqslant 0$ и $(2x-3y+50)^2 \geqslant 0$, то значение данного в условии выражени больше или равна нуля, и может быть равно нулю лишь в том случае, если выполнена система: $\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ 2x-3y+50=0 \end{cases}$ $(*)$.
Преобразуем и решим систему $(*)$:
$\begin{cases} 9x+3y-6=0 \\ 2x-3y+50=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 11x+44=0 \\ 2x-3y+50=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ -8-3y+50=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ y=14. \end{cases}$

Итак, наименьшее значение данного в условии выражения равно нулю и достигается при $x=-4$, $y=14$.

Ответ: $m=0; x=-4, y=14$

$\boxed{23}$ Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет ровно две общие точки с трёхзвенной ломаной в координатной плоскости Oxy, изображённой на приведённом ниже рисунке (см. рис. 4 а)).

Решение.

Проведём через начало координат прямую OL, параллельную участкам AB и CD данной в условии ломаной (см. рис. 4 б)). Легко видеть, что если прямая $y = kx$ расположена вне острого угла, образованного прямыми OB и OL, то она имеет только одну общую точку с ломаной $ABCD$, если строго внутри этого угла — общих точек три, если совпадает с прямой OB — общих точек две, а если совпадает с прямой OL— общая точка одна. Таким образом, единственным искомым значением k является то, при котором прямая $y = kx$ совпадает с прямой OB — $k = 0{,}5$.

Ответ: $k = 0{,}5$

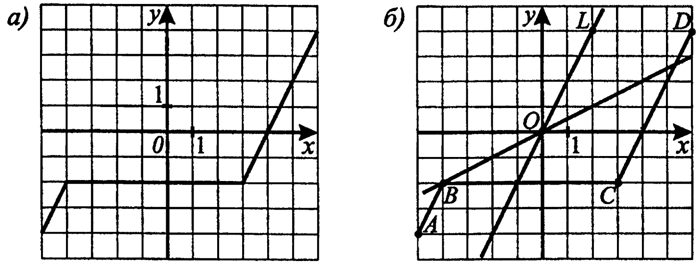


Рис. 4.

Тест № 5*

Часть 2

19 Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3 - 4x^2y - 16x + 64y = 0, \\ \sqrt{x-5} - \dfrac{3}{\sqrt{4y-5}} = 0. \end{cases}$

Решение.

Так как $x^3 - 4x^2y - 16x + 64y = x(x^2 - 16) - 4y(x^2 - 16) = (x - 4y)(x^2 - 16)$, то 1-ое уравнение данной системы равносильно совокупности уравнений $x - 4y = 0$ и $x^2 - 16 = 0$. Корнями уравнения $x^2 - 16 = 0$ являются значения $x = \pm 4$, не входящие в область определения системы — при $x = \pm 4$ слагаемое $\sqrt{x-5}$ во 2-ом уравнении системы не определено. Поэтому данная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ \sqrt{x-5} - \dfrac{3}{\sqrt{4y-5}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{4y-5} - \dfrac{3}{\sqrt{4y-5}} = 0. \end{cases}$$

Решим 2-ое уравнение последней системы: $(\sqrt{4y-5})^2 = 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4y - 5 = 3$, $y = 2$. Из уравнения $x = 4y$ получаем, что $x = 8$.

Ответ: $x = 8, y = 2$.

$\boxed{20}$ Решите неравенство $(x^2 - \sqrt{3}x + 1)\cdot(13 - 2x) < 0$.

Решение.

Исследуем, как меняется на числовой оси знак квадратного трёхчлена $x^2 - \sqrt{3}x + 1$: $D = (\sqrt{3})^2 - 4\cdot 1 = 3 - 4 < 0 \Rightarrow$ этот квадратный трёхчлен корней не имеет и положителен на всей числовой оси. Поэтому данное в условии неравенство равносильно неравенству $13 - 2x < 0$, решением которого являются $x > 6{,}5$.

$\boxed{21}$ Существует ли такая геометрическая прогрессия, в которой сумма первых пятидесяти членов равна 1, а сумма следующих пятидесяти членов (с 51-го по 100-ый включительно) равна 5^{100}? (Если да, то укажите знаменатель и первый член такой прогрессии.)

Решение.

Пусть b_1 — первый член прогрессии, q — её знаменатель.Сумма первых 50-ти членов прогрессии равна $b_1 + b_1q + \ldots + b_1q^{49} = b_1(1 + q + \ldots + q^{49})$, а сумма членов прогрессии с 51-го по 100-ый включительно равна $b_1q^{50} + b_1q^{51} + \ldots + b_1q^{99} = b_1q^{50}(1+q+\ldots+q^{49})$. Попробуем подобрать b_1 и q так, чтобы для полученной прогрессии выполнялись требуемые в задаче равенства: $b_1(1+q+\ldots+q^{49}) = 1$, $b_1q^{50}(1+q+\ldots+q^{49}) = 5^{100}$. Деля второе из этих равенств почленно на первое, получаем: $q^{50} = 5^{100}$. Легко видеть, что последнему равенству удовлетворяют $q = \pm 5^2 = \pm 25$. Возьмём, например, $q = 25$. Тогда, чтобы выполнялись оба требуемых в задаче равенства, достаточно подобрать b_1 так, чтобы $b_1(1 + 25 + \ldots + 25^{49}) = 1$. По формуле сумму членов геометрической прогрессии имеем: $1 + 25 + \ldots + 25^{49} = \dfrac{25^{50} - 1}{25 - 1} = \dfrac{5^{100} - 1}{24}$. Равенству $b_1 \cdot \dfrac{5^{100} - 1}{24} = 1$ удовлетворяет $b_1 = \dfrac{24}{5^{100} - 1}$. Итак, описанная в условии прогрессия существует — например, $b_1 = \dfrac{24}{5^{100} - 1}$, $q = 25$.

$\boxed{22}$ При каких значениях m и n, связанных соотношением $\sqrt{m} + \sqrt{n} = 5$, выражение $m + 4\sqrt{mn} - 2n$ принимает наибольшее значение?

Решение.

Выразим m через n из соотношения $\sqrt{m} + \sqrt{n} = 5$: $\sqrt{m} = 5 - \sqrt{n}$, (1) $m = (5 - \sqrt{n})^2$, $m = n - 10\sqrt{n} + 25$, (2). Подставляя в выражение $m + 4\sqrt{mn} - 2n$ вместо $\sqrt{m}$ и m правые части равенств (1),(2), получаем:

$n - 10\sqrt{n} + 25 + 4(5 - \sqrt{n})\sqrt{n} - 2n = -5n + 10\sqrt{n} + 25$. Полученное выражение является квадратным трёхчленом относительно переменной $t = \sqrt{n}$. Наибольшее значение квадратного трёхчлена $-5t^2 + 10t + 25$ достигается при $t = \dfrac{-10}{2\cdot(-5)} = 1$ ($t = 1$ — абсцисса вершины параболы $y = -5t^2 + 10t + 25$, ветви которой направлены вниз). Возвращаясь к переменным n и m, получаем: $\sqrt{n} = 1, n = 1$, $\sqrt{m} = 5 - \sqrt{n} = 4$, $m = 16$.

Ответ: $m = 16$, $n = 1$.

23 В плоскости Oxy заданы три точки: $A(-1; 1)$, $B(3; -1)$ и $C(1; 3)$. Задайте аналитически (т.е. с помощью формул) функцию, графиком которой является ломаная, состоящая из двух лучей и проходящая через эти три точки.

Решение.

Отметим на координатной плоскости Oxy три данные точки — см. рисунок 5. Лучи AC и AB не образуют графика функции $y = y(x)$, так как для этой ломаной при $x > -1$ каждому значению x соответствуют два различных значения y. Аналогично, не образуют графика функции и лучи BA, BC. Лучи CA и CB образуют график функции $y = y(x)$, определённой на всей числовой оси (каждому значению x соответствует ровно одно значение y).

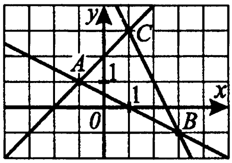


Рис. 5.

Чтобы задать эту функцию аналитически, определим уравнения прямых AC и BC. Подставляя в общее уравнение прямой $y = kx + b$ координаты точек A и C, для коэффициентов уравнения прямой AC имеем систему: $\begin{cases} k\cdot(-1) + b = 1 \\ k\cdot 1 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k + b = 1 \\ 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 2,\ k = 1.$

Таким образом, уравнение прямой AC — $y = x + 2$. Аналогично, для коэффициентов уравнения прямой BC имеем систему:

$$\begin{cases} 3k + b = -1 \\ k + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = -4 \\ k + b = 3 \end{cases} \Rightarrow k = -2,\ b = 5.$$

Уравнение прямой BC — $y = -2x + 5$.

Итак, функция $y = y(x)$, графиком которой является ломаная, состоящая из двух лучей и проходящая через точки A, B, C, определяется формулами: $y = \begin{cases} x+2, & \text{при } x \leqslant 1, \\ 5-2x, & \text{при } x > 1. \end{cases}$

Тест № 7*

Часть 2

19 Найдите наибольшее значение функции $y = 4\cdot|1-2x| - x^2$.

Решение.

Исследуем данную функцию отдельно на двух участках: при $x \leqslant 0{,}5$ и $x > 0{,}5$.

1) При $x \leqslant 0{,}5$ имеем: $|1-2x| = 1-2x$, данная функция определена формулой $y = 4 - 8x - x^2$. Функция $y = 4 - 8x - x^2$ принимает своё наибольшее значение в точке $x_0 = \frac{8}{-2} = -4$ ($x_0 = -4$ – абсцисса вершины параболы, определяемой этим уравнением). Так как точка $x_0 = -4$ принадлежит рассматриваемому промежутку ($-4 < 0{,}5$), то на промежутке $(-\infty; 0{,}5]$ наибольшее значение данной в условии функции равно $y(-4) = 20$.

2) При $x > 0{,}5$ имеем: $|1-2x| = 2x-1$, данная функция определена формулой $y = 8x - x^2 - 4$. Функция $y = 8x - x^2 - 4$ принимает своё наибольшее значение в точке $x_0 = \frac{-8}{-2} = 4$ ($x_0 = 4$ – абсцисса вершины параболы, определяемой этим уравнением). Так как точка $x_0 = 4$ принадлежит рассматриваемому промежутку ($4 > 0{,}5$), то при $x \in (0{,}5; +\infty)$ наибольшее значение данной в условии функции равно $y(4) = 12$.

Осталось лишь заметить, что поскольку $20 > 12$, то наибольшее значение данной в условии функции на всей числовой оси равно 20.

20 Выясните, имеют ли общую точку парабола $y = x^2 - 4\sqrt{5}x + 6$ и прямая $y = \sqrt{2}x - 22$.

Решение.

Графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют общую точку $\Leftrightarrow$ уравнение $f(x) = g(x)$ имеет хотя бы один корень. Поэтому для ответа на вопрос задачи необходимо исследовать на наличие корней следующее уравнение: $x^2 - 4\sqrt{5}x + 6 = \sqrt{2}x - 22$. Преобразуем это квадратное уравнение и вычислим его дискриминант: $x^2 - (4\sqrt{5} + \sqrt{2})x + 28 = 0$,
$D = (4\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 4\cdot 28 = 80 + 8\sqrt{10} + 2 - 112 = 8\sqrt{10} - 30$. Так как

$(8\sqrt{10})^2 = 640$, $30^2 = 900$, $(8\sqrt{10})^2 < 30^2$, $8\sqrt{10} < 30$, то дискриминант отрицателен и корней данное квадратное уравнение не имеет.

Ответ: общей точки нет.

21 Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, каждое из которых делится на 3, но не делится на 4.

Решение.

Натуральные числа, не превосходящие 150 и делящиеся на 3 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 3$, первым членом $a_1 = 3$ и последним членом $a_{50} = 150$ (таких чисел 50, $150 = 50 \cdot 3$), а сумма всех этих чисел равна $\frac{3+150}{2} \cdot 50 = 3825$.

Натуральные числа, делящиеся одновременно и на 3 и на 4 и не превосходящие 150, образуют арифметическую прогрессию с разностью 12, первым членом $a_1 = 12$ и последним членом $a_{12} = 144$ (таких чисел 12, $144 = 12 \cdot 12$), а сумма всех этих чисел равна $\frac{12+144}{2} \cdot 12 = 936$.

Очевидно, что числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 4, вместе с числами, делящимися одновременно и на 3 и на 4, образуют все числа делящиеся на 3. Поэтому искомая сумма чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 4 и не превосходящих 150, равна $3825 - 936 = 2889$.

22 Найдите все значения переменных x и y, при которых выражение $(4x-2)^2 - 4\cdot(2x-1)(x+y) + (x+y)^2 + (x+2y-3)^2$ принимает наименьшее значение.

Решение.

Так как $4(2x-1) = 2(4x-2)$, то по формуле разности квадратов сумма первых трёх слагаемых данного в условии выражения тождественно равна выражению $\big(4x - 2 - (x+y)\big)^2$. Следовательно, задача сводится к нахождению таких x и y, при которых принимает наименьшее значение выражение $(3x-y-2)^2 + (x+2y-3)^2$. Искомые значения переменных x и y являются решением системы уравнений $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$

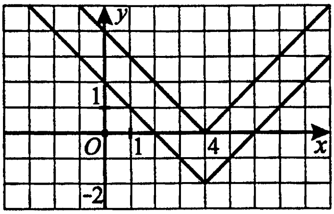
(подробнее см. решение аналогичной задачи №22 из варианта 3 на стр. 17)
Решив эту систему уравнений, получим ответ: $x = 1$, $y = 1$.

$\boxed{23}$ Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = ||x - 4| - 2|$ в четырёх различных точках.

Решение.

Построим график функции $y = ||x-4|-2|$ последовательными преобразованиями (смещениями и отражениями) графика функции $y = |x|$. На рисунке 6 а) изображены графики функции $y = |x - 4|$ и $y = |x - 4| - 2$, а на рисунке 6 б) – окончательный вид графика функции $y = ||x - 4| - 2|$.

а)



б)

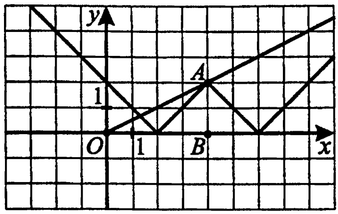


Рис. 6.

Из рисунка 6 б) очевидно, что прямая $y = kx$ пересекает график функции $y = ||x-4|-2|$ в четырёх различных точках в том и только том случае, если она содержится внутри угла AOB. А это, в свою очередь, равносильно тому, что угловой коэффициент k положителен, но меньше углового коэффициента прямой OA, равного $\frac{AB}{OB} = 0{,}5$.

Ответ: $0 < k < 0{,}5$.

§ 3. Решения тестов 2008 г.

Тест №1

Часть 2

$\boxed{17}$ Разложите на множители выражение $n^2m - 4n + 2mn - 2n^2$.

Решение.

Сгруппируем слагаемые в данном выражении и преобразуем его, вынося за скобки общие множители: $(n^2m + 2mn) - (4n + 2n^2) =$
$= mn(n+2) - 2n(2+n) = (n+2)(mn-2n) = (n+2)n(m-2)$.

Ответ: $n(n+2)(m-2)$

18 Найдите область определения выражения $\dfrac{\sqrt{9-12x-5x^2}}{x^2-9}$.

Решение.

Областью определения данного выражения является множество решений системы: $\begin{cases} 9-12x-5x^2 \geqslant 0 \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+12x-9 \leqslant 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$ (подкоренное выражение в числителе должно быть неотрицательно, а знаменатель — не равен нулю). Квадратный трёхчлен $5x^2+12x-9$ имеет корни $x_1 = -3$ и $x_2 = 0{,}6$. По методу интервалов получаем, что решением неравенства $5x^2+12x-9 \leqslant 0$ являются $x \in [-3; 0{,}6]$, и учитывая условие $x \neq \pm 3$, приходим к окончательному ответу: $x \in (-3; 0{,}6]$.

19 Найдите сумму всех натуральных чисел, меньших 200, но больших 100, которые не делятся на 3.

Решение.

По формуле суммы арифметической прогрессии сумма всех натуральных чисел, меньших 200, но больших 100, равна $\dfrac{101+199}{2} \cdot 99 = 14850$. Натуральные числа, делящиеся на 3 и меньшие 200, но большие 100, образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 3, первым членом, равным 102, и последним членом, равным 198, а количество этих чисел равно 33 ($102 = 3 \cdot 34$ — первое число, большее 100 и кратное 3; $198 = 3 \cdot 66$ — последнее число, меньшее 200 и кратное 3; промежуток $[34; 66]$ содержит 33 натуральных числа). По формуле суммы арифметической прогрессии сумма всех этих чисел равна $\dfrac{102+198}{2} \cdot 33 = 4950$. Поэтому сумма всех натуральных чисел, меньших 200, но больших 100, которые не делятся на 3, равна $14850 - 4950 = 9900$.

20 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2+2y-x=1, \\ (x-2)(2y+1)=0. \end{cases}$$

Решение.

Так как произведение двух множителей равно нулю лишь в том случае, когда равен нулю хотя бы один из них, то из второго уравнения системы следует, что либо $x-2=0$, $x=2$, либо $2y+1=0$, $y=-0{,}5$. Рассмотрим оба эти случая.

1) Подставляя в первое уравнение системы $x = 2$, получаем: $y^2 + 2y - 2 = 1$, $y^2 + 2y - 3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$.

2) Подставляя в первое уравнение системы $y = -0{,}5$, получаем: $0{,}25 - 1 - x = 1$, $x = -1{,}75$.

Итак, все решения системы – пары $(2;1), (2;-3), (-1{,}75;-0{,}5)$.

21 Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трёх различных точках график функции

$$y = \begin{cases} 4x + 6 \text{ при } x < -1, \\ 2 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4x - 2 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Решение.

График данной функции состоит из трёх частей, каждая из которых представляет собой участок некоторой прямой и имеет с прямой $y = kx$ не более одной общей точки. Поэтому график данной функции имеет с прямой $y = kx$ ровно три общие точки лишь в том случае, если каждая из трёх его частей имеет общую точку с этой прямой. Последнее может быть выполнено только в том случае, если прямая $y = kx$ составляет с осью Ox угол больший, чем прямая OB, но меньший, чем прямая OA, параллельная прямой $y = 4x - 2$, см. рис. 7 (если одно из указанных условий не выполнено, то прямая $y = kx$ не пересекает один из двух участков графика: при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ или $x > 1$).

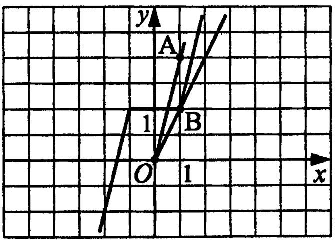


Рис. 7.

Легко видеть, что если прямая $y = kx$ лежит между прямыми OB и OA, то она действительно пересекает все три участка графика, изображённого на рисунке 7. Таким образом, искомые значения k – это все числа, которые больше углового коэффициента прямой OB, но меньше углового коэффициента прямой OA. Угловой коэффициент прямой OA

равен 4 (т.к. эта прямая параллельна прямой $y = 4x - 2$). Угловой коэффициент прямой OB можно вычислить по формуле: $\frac{y_B}{x_B}$, где x_B, y_B — координаты вектора OB. Точка B имеет координаты $(1; 2)$, поэтому координаты вектора OB равны $x_B = 1 - 0 = 1$, $y_B = 2 - 0 = 2$, и по указанной выше формуле получаем, что угловой коэффициент прямой OB равен 2.

Итак, все искомые k — это $k \in (2; 4)$.

Тест № 3

Часть 2

$\boxed{17}$ Сократите дробь: $\dfrac{x - 3x^2}{6x^2 - 5x + 1}$.

Решение.

Квадратный трёхчлен $6x^2 - 5x + 1$ имеет корни $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, поэтому $6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x - 1)(2x - 1)$.

Следовательно, $\dfrac{x - 3x^2}{6x^2 - 5x + 1} = \dfrac{x(1 - 3x)}{(3x - 1)(2x - 1)} = -\dfrac{x}{2x - 1}$.

$\boxed{18}$ Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = -10, \\ (x - 6)\cdot(y - 3) = -16. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы, раскрыв скобки: $xy - 6y - 3x + 18 = -16$. Подставив в это уравнение $xy = -10$ (из 1-го уравнения системы), получим, что исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} xy = -10 \\ -6y - 3x = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -10 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2). \end{cases}$$

Выражая из уравнения (2) x через y и подставляя в уравнение (1), получаем: $(8 - 2y)y = -10$, $y^2 - 4y - 5 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = 5$. Значит, решением данной системы являются пары $(10; -1), (-2; 5)$.

$\boxed{19}$ Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена: $a_n = 4n + 2$. Найдите сумму членов прогрессии с двадцатого по сорок пятый включительно.

Решение.

Согласно формуле n-го члена прогрессии, имеем: $a_{20} = 82$, $a_{45} = 182$. Количество членов прогрессии с a_{20} по a_{45} включительно равно 26. Если a_{20} принять за первый член новой арифметической прогрессии с той же самой разностью $(d = 4)$, то $a_{21}, a_{22}, \dots a_{45}$ станут 2-ым, 3-им, ...26-ым членами этой новой прогрессии. По формуле суммы n членов арифметической прогрессии получаем, что сумма членов прогрессии с a_{20} по a_{45} включительно равна $S = \frac{a_{20} + a_{45}}{2} \cdot 26 = (82 + 182) \cdot 13 = 3432$.

$\boxed{20}$ Имеются два сплава, в первом из которых содержится 90% серебра, а во втором – 60% серебра. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы переплавив их, получить новый сплав, содержащий 70% серебра?

Решение.

Допустим, что второго сплава взяли 1 кг, а первого – m кг. В m кг первого сплава содержится $0{,}9m$ кг серебра, а в 1 кг второго сплава – 0,6 кг серебра. Поэтому после переплавки получится $m + 1$ кг нового сплава, в котором процентное содержание серебра равно $\frac{0{,}9m + 0{,}6}{m + 1} \cdot 100\%$, что по условию должно составлять 70%. Отсюда получаем:
$\frac{0{,}9m + 0{,}6}{m + 1} = 0{,}7$, $0{,}9m + 0{,}6 = 0{,}7m + 0{,}7$, $0{,}2m = 0{,}1$, $m = 0{,}5$. Таким образом, если взять 1 кг второго сплава, то для 70% содержания серебра в новом сплаве требуется взять 0,5 кг первого сплава, т.е. первый и второй сплавы нужно брать в отношении $1:2$.

Примечание. Как несложно видеть, p – так называемая «массовая доля» кислоты в первом сосуде, является более удобной неизвестной, нежели само искомое число процентов. Это характерно не только для задач на «смеси», практически любую задачу «на проценты» гораздо удобнее решать с использованием «процентов, выраженных в долях». Это означает, что, например, при взятии 30% от числа X вместо записи $\frac{30\%}{100\%} \cdot X$ сразу используется запись $0{,}3X$.

$\boxed{21}$ Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2 + (a - 3)x + a + 5 \leqslant 0$ не имеет решений.

Решение.

Графиком функции $y = x^2 + (a - 3)x + a + 5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Поэтому неравенство $x^2 + (a - 3)x + a + 5 \leqslant 0$

не имеет решений $\Leftrightarrow$ указанная парабола расположена целиком выше оси Ox, т.е. не имеет корней уравнение $x^2 + (a-3)x + a + 5 = 0$. Последнее же равносильно отрицательности дискриминанта $D = (a-3)^2 - 4(a+5)$. Имеем: $D = a^2 - 6a + 9 - 4a - 20 = a^2 - 10a - 11$; квадратный трёхчлен $a^2 - 10a - 11$ имеет корни $a_1 = -1, a_2 = 11$; по методу интервалов получаем, что решением неравенства $a^2 - 10a - 11 < 0$ является промежуток $(-1; 11)$. Таким образом, $a \in (-1; 11)$ — все искомые значения a.

Тест № 5*

Часть 2

17 Разложите на множители:

$$a^3 - ab(2a - b - 14) - 7a^2 - 7b^2.$$

Решение.

Раскрывая скобки в данном выражении и проводя дальнейшие преобразования, получаем: $a^3 - 2a^2b + ab^2 + 14ab - 7a^2 - 7b^2 =$
$= a(a^2 - 2ab + b^2) - 7(a^2 - 2ab + b^2) = (a-7)(a-b)^2$.

Ответ: $(a-7)(a-b)^2$

18 Найдите область определения выражения $\sqrt{\dfrac{2x^2 - 9x + 4}{3x - 6x^2}}$.

Решение.

Областью определения данного выражения является множество решений неравенства $\dfrac{2x^2 - 9x + 4}{3x - 6x^2} \geqslant 0$ (*). Решим неравенство (*) методом интервалов. Корни квадратного трёхчлена $2x^2 - 9x + 4$ — числа 0,5 и 4, корни трёхчлена $3x - 6x^2$ — числа 0 и 0,5. Определив знаки дроби $\dfrac{2x^2 - 9x + 4}{3x - 6x^2}$ внутри каждого из интервалов, на которые числовая ось разбивается точками $x = 0, x = 0{,}5, x = 4$, (см. рис. 8), получим, что решением неравенства (*) являются $x \in (0; 0{,}5) \cup (0{,}5; 4]$.

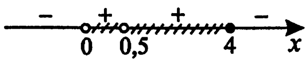


Рис. 8.

Примечание. Точки $x = 0$ и $x = 0{,}5$ «выколоты», поскольку являются нулями знаменателя, а знаменатель дроби не должен обращаться в нуль.

Знаки дроби $\dfrac{2x^2-9x+4}{3x-6x^2}$ внутри интервалов $(-\infty;0)$, $(0;0{,}5)$, $(0{,}5;4)$, $(4;+\infty)$ можно определить чередованием знаков слева направо, начиная со знака минус (т. к. в знаменателе коэффициент при старшей степени x отрицателен, и потому при «больших» x дробь отрицательна). При «переходе через точку» $x=0{,}5$ знак дроби не меняется, поскольку выражение $x-0{,}5$ входит множителем и в числитель, и в знаменатель данной дроби.

$\boxed{19}$ Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 180, каждое из которых не делится ни на одно из чисел 2 и 3.

Решение.

1) По формуле суммы арифметической прогрессии сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, равна $S=\dfrac{1+180}{2}\cdot 180=16290$.

2) Натуральные числа, не превосходящие 180 и делящиеся на 2, образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 2, первым членом, равным 2, последним членом, равным 180, а их количество равно 90. По формуле суммы арифметической прогрессии сумма этих чисел, которую обозначим через S_2, равна $S_2=\dfrac{1+180}{2}\cdot 90=8190$.

3) Натуральные числа, не превосходящие 180 и делящиеся на 3, образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 3, первым членом, равным 3, последним членом, равным 180, а их количество равно 60. По формуле суммы арифметической прогрессии сумма этих чисел, которую обозначим через S_3, равна $S_3=\dfrac{3+180}{2}\cdot 60=5490$.

4) Натуральные числа, не превосходящие 180 и делящиеся на 6, образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 6, первым членом, равным 6, последним членом, равным 180, а их количество равно 30. По формуле суммы арифметической прогрессии сумма этих чисел, которую обозначим через S_6, равна $S_6=\dfrac{6+180}{2}\cdot 30=2790$.

5) Если в ряду натуральных чисел, от 1 до 180 вычеркнуть все числа, делящиеся на 2, и вычеркнуть все числа делящиеся на 3, то не вычеркнутыми останутся только числа не делящиеся ни на одно из чисел 2 и 3. Заметим, что при этом числа делящиеся на 6 окажутся вычеркнутыми дважды (т.к. число, делящееся на 6, делится и на 2 и на 3). Поэтому $S-S_2-S_3+S_6$ — это и есть сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, каждое из которых не делится ни на одно из чисел 2 и 3. Итак, искомая сумма равна $16290-8190-5490+2790=5400$.

$\boxed{20}$ Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{6xy - 9x^2 - y^2} \cdot \left(1 - \dfrac{9}{x+8}\right) = 0, \\ y^2 - 4xy + 6x^2 = 192. \end{cases}$$

Решение.

Областью определения данной системы является множество тех пар $(x; y)$, для которых выполнены условия: $x + 8 \neq 0$, $6xy - 9x^2 - y^2 \geqslant 0$ $(*)$. Заметим, что $6xy - 9x^2 - y^2 = -(3x - y)^2 \leqslant 0$. Поэтому неравенство $(*)$ выполнено лишь в том случае, когда $3x - y = 0$. Подставляя $y = 3x$ во второе уравнение данной системы, получаем: $9x^2 - 12x^2 + 6x^2 = 192$, $x^2 = 64$, $x = \pm 8$. При $x = -8$ не выполнено условие $x + 8 \neq 0$, поэтому единственным решением данной системы является пара $x = 8$, $y = 24$.

$\boxed{21}$ Найдите все значения a, при которых уравнение $|2|x| - a^2| = x - 2a$ имеет четыре различных решения.

Решение.

Будем решать данное уравнение (точнее, определять количество его решений при различных a) графически. При всех $a \neq 0$ график функции $y = 2|x| - a^2$ имеет вид, изображённый на рисунке 9 a), график функции $y = |2|x| - a^2|$ имеет вид, изображённый на рисунке 9 b) (при $a = 0$ эти графики «вырождаются» в график функции $y = 2|x|$).

Уравнение $|2|x| - a^2| = x - 2a$ имеет четыре различных решения $\Leftrightarrow$ прямая $y = x - 2a$ пересекает график $y = |2|x| - a^2|$ в четырёх различных точках. Легко видеть, что последнее выполнено лишь тогда, когда прямая $y = x - 2a$ содержится между прямыми l_1 и l_2, изображёнными на рисунке 9 b). А это, в свою очередь, выполнено тогда, когда точка пересечения прямой $y = x - 2a$ с осью Oy лежит между точками пересечения оси Oy с прямыми l_1, l_2.

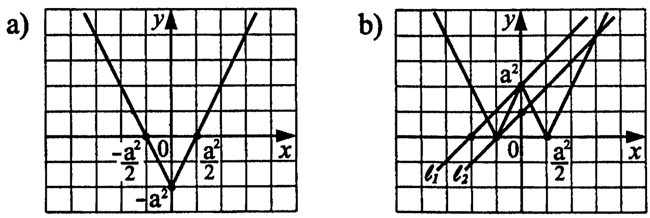


Рис. 9.

Прямая $y = x - 2a$ пересекает ось Oy в точке с ординатой $-2a$, прямые l_1, l_2 пересекают ось Oy в точках с ординатами a^2 и $\frac{a^2}{2}$. Значит, искомыми a являются решения системы неравенств:

$$\begin{cases} -2a < a^2 \quad (1) \\ -2a > \frac{a^2}{2} \quad (2). \end{cases}$$

Из неравенства (2) следует, что $a < 0$, поэтому деля неравенства на a, получим, что равносильной системой является система:

$$\begin{cases} -2 > a \\ -2 < \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad -4 < a < -2.$$

Итак, все искомые значения a – это $a \in (-4; -2)$.

Тест № 7*

Часть 2

17 Сократите дробь: $\frac{x^3 - ax^2 - ax + a^2}{x^2 - a}$.

Решение.

Заметим, что после группировки слагаемых в числителе данной дроби он преобразуется к виду: $x(x^2 - a) - a(x^2 - a) = (x^2 - a)(x - a)$. После сокращения числителя и знаменателя дроби на $x^2 - a$ получаем ответ.

Ответ: $x - a$

18 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x - 40) \cdot (y + 20) = 600, \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Проведём равносильные преобразования данной системы:

$$\begin{cases} (x - 40) \cdot (y + 20) = 600 \\ \frac{3y + 2x}{xy} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 40) \cdot (y + 20) = 600 \\ 12y + 8x = xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - 40y + 20x = 1400 \\ 12y + 8x = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y + 8x - 40y + 20x = 1400 \\ 12y + 8x = xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 28x - 28y = 1400 \\ 12y + 8x = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 50 \\ 12y + 8x = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 50 \\ 12y + 8x = xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 50 \\ 12y + 8(y + 50) = (y + 50)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 50 \ (1) \\ y^2 + 30y - 400 = 0 \ (2). \end{cases}$$

Уравнение (2) имеет корни $y_1 = -40$, $y_2 = 10$. Подставляя эти значения y в уравнение (1), получаем, что данная система имеет два решения: $x_1 = 10$, $y_1 = -40$ и $x_2 = 60$, $y_2 = 10$.

$\boxed{19}$ Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена: $a_n = 5n + 1$. Найдите сумму тех членов этой прогрессии, номера которых нечётны, начиная с одиннадцатого и заканчивая пятьдесят пятым включительно.

Решение.

Члены данной прогрессии с нечётными номерами, начиная с 11-го и заканчивая 55-ым включительно, образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 10, первым членом $a_{11} = 56$ и последним членом, равным $a_{55} = 276$. Так как номера этих членов имеют вид $2n + 1$ и удовлетворяют неравенствам $11 \leqslant 2n+1 \leqslant 55 \Leftrightarrow 5 \leqslant n \leqslant 27$, то количество этих членов равно 23 (промежуток от 5 до 27 включая содержит 23 натуральных числа). По формуле суммы членов арифметической прогрессии, получаем, что искомая сумма равна $\frac{56 + 276}{2} \cdot 23 = 3818$.

$\boxed{20}$ В химической лаборатории в двух сосудах содержится раствор борной кислоты различной концентрации. В первом сосуде содержится 3 литра раствора, а во втором — 5 литров. Если растворы, находящиеся в этих сосудах, смешать, то получится 44% раствор кислоты. А если смешать равные объёмы этих растворов, то получится 40% раствор. Какова концентрация раствора в первом сосуде?

Решение.

Пусть концентрация раствора в первом сосуде равна $p \cdot 100\%$, а во втором — $t \cdot 100\%$. Тогда в первом сосуде кислоты $3p$ литров, а во втором — $5t$ литров. После смешивания растворов из обоих сосудов получится 8 литров раствора, в котором $3p + 5t$ литров кислоты, т.е. раствор с концентрацией $\frac{3p + 5t}{8} \cdot 100\%$. По условию, концентрация этого раствора равна 44%, и, значит, $\frac{3p + 5t}{8} \cdot 100 = 44$, $3p + 5t = 3{,}52$. Если же смешать по 1 литру каждого из растворов, то получится 2 литра раствора, в котором $p+t$ литров кислоты, т.е. раствор с концентрацией $\frac{p+t}{2}\cdot 100\%$. По условию имеем: $\frac{p+t}{2}\cdot 100 = 40$, $p+t = 0{,}8$. Итак, из условий задачи получена система: $\begin{cases} 3p+5t = 3{,}52 \ (1) \\ p+t = 0{,}8 \ (2). \end{cases}$ Умножая обе части уравнения (2) на 5 и вычитая из результата уравнение (1), приходим к равенству: $5p+5t-3p-5t = 4-3{,}52$, откуда $2p = 0{,}48$, $p = 0{,}24$. Таким образом, концентрация раствора в первом сосуде равна $0{,}24\cdot 100\% = 24\%$.

$\boxed{21}$ Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(5;+\infty)$ выполнено неравенство: $(2-a)x+6a-4>0$.

Решение.

Функция $f(x) = (2-a)x+6a-4$ при каждом значении параметра a является линейной относительно x, поэтому она положительна на всём промежутке $(5;+\infty)$ только в следующих двух случаях:

1) угловой коэффициент функции, равный $2-a$, положителен (функция возрастает) и $f(5)\geqslant 0$;

2) угловой коэффициент функции равен нулю (функция постоянна) и $f(5)>0$.

Таким образом, искомые значения a являются решениями совокупности двух систем: (1) $\begin{cases} 2-a>0 \\ f(5)\geqslant 0 \end{cases}$ и (2) $\begin{cases} 2-a=0 \\ f(5)>0. \end{cases}$

Так как $f(5) = (2-a)\cdot 5+6a-4 = a+6$, то системы (1), (2) имеют вид:

$$\begin{cases} 2-a>0 \\ a+6\geqslant 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2-a=0 \\ a+6>0. \end{cases}$$

Решение первой из этих систем — $a\in[-6;2)$, решение второй — $a=2$. Объединяя решения этих систем, получаем все искомые значения a.

Ответ: $a\in[-6;2]$

§ 4. Решения тестов 2007 г.

Тест №1

Часть 2

17 Постройте график функции $y = \dfrac{|x|-4}{2}$. При каких значениях аргумента выполняется неравенство $2 < y \leqslant 5$?

Решение.

1) Преобразуем выражение, определяющее данную функцию, к виду: $y = \dfrac{1}{2}|x| - 2$. График функции $y = \dfrac{1}{2}|x|$ получается из прямой $y = \dfrac{1}{2}x$ отражением части этой прямой, расположенной ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox, см. рис. 10 a) (отражаемая часть прямой изображена пунктиром). График функции $y = \dfrac{1}{2}|x| - 2$ получается из графика $y = \dfrac{1}{2}|x|$ «смещением» (более точно — параллельным переносом) на две единицы вниз вдоль оси Oy, см. рис. 10 b).

2) Искомыми значениями x, при которых $2 < y \leqslant 5$, являются решения двойного неравенства $2 < \dfrac{1}{2}|x| - 2 \leqslant 5 \Leftrightarrow 4 < \dfrac{1}{2}|x| \leqslant 7 \Leftrightarrow 8 < |x| \leqslant 14$. Отсюда, по определению модуля, получаем, что искомыми x являются $x \in [-14; 8) \cup (8; 14]$.

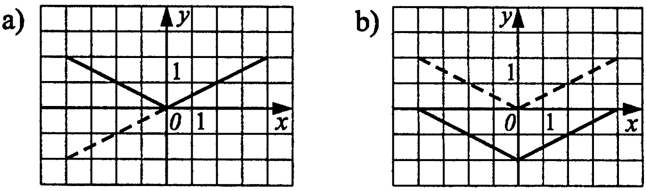


Рис. 10.

18 Упростите выражение $\dfrac{9-x^2}{x-6} \cdot \left(\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3x}{x^2-6x+9}\right) + \dfrac{6x}{x-3}$.

Решение.

Так как $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, то выражение в скобках равно $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3x}{(x-3)^2} = \dfrac{x \cdot (x-3) - 3x}{(x-3)^2} = \dfrac{x(x-6)}{(x-3)^2}$. А поскольку $\dfrac{9-x^2}{x-6} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{x-6}$, то данное в условии выражение упрощается

следующим образом: $\dfrac{(3-x)(3+x)x(x-6)}{(x-6)(3-x)^2}+\dfrac{6x}{x-3}=$
$=\dfrac{(x+3)x}{3-x}-\dfrac{6x}{3-x}=\dfrac{x^2-3x}{3-x}=\dfrac{x(x-3)}{3-x}=-x.$

Ответ: $-x$

19 Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $b_2=-2$, $b_5=54$, $b_7=486$?

Решение.

Так как в геометрической прогрессии $\{b_n\}$ со знаменателем q $b_2=b_1q$, $b_5=b_1q^4$, то одновременное выполнение условий $b_2=-2$, $b_5=54$ означает выполнение системы: $\begin{cases} b_1q=-2 & (1)\\ b_1q^4=54 & (2).\end{cases}$

Деля уравнение (2) почленно на уравнение (1), получаем: $q^3=-27$, $q=-3$. Подставляя $q=-3$ в уравнение (1), имеем: $-3b_1=-2$, $b_1=\dfrac{2}{3}$. Седьмой член такой геометрической прогрессии равен:
$b_7=b_1q^6=\dfrac{2}{3}\cdot(-3)^6=2\cdot 3^5=2\cdot 243=486$. Таким образом, требуемая прогрессия существует.

20 Найдите все значения k, для которых прямая $y=kx-4$ пересекает параболу $y=x^2-5x+12$ в двух точках.

Решение.

Прямая $y=kx-4$ пересекает параболу $y=x^2-5x+12$ в двух точках $\Leftrightarrow$ уравнение $x^2-5x+12=kx-4$ имеет два различных корня. Это уравнение преобразуется к виду $x^2-(5+k)x+16=0$ и имеет два различных корня $\Leftrightarrow D=(5+k)^2-64>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5+k>8\\ 5+k<-8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k>3\\ k<-13.\end{array}\right.$

То есть множество искомых значений k является объединением промежутков $(-\infty;-13)$ и $(3;+\infty)$.

Ответ: $k\in(-\infty;-13)\cup(3;+\infty)$

21 Велосипедист ехал сначала 3 минуты с горы, а затем 5 минут в гору. Обратный путь он проделал за 16 минут, двигаясь с горы и в гору с теми же скоростями, что и прежде. Во сколько раз скорость велосипедиста при движении с горы была больше, чем скорость в гору?

Решение.

Пусть v_1 м/мин — скорость движения велосипедиста при движении с горы, а v_2 м/мин — скорость его движения в гору (отметим, что по смыслу задачи, $v_1 > v_2$). Тогда участок на котором велосипедист ехал с горы имеет длину $3v_1$ метров, а участок на котором он ехал в гору — $5v_2$ метров. На обратном пути велосипедист ехал с горы $5v_2$ метров, а в гору — $3v_1$ метров. Так как по условию скорость движения велосипедиста с горы и в гору не изменилась, то он преодолел эти участки за $\frac{5v_2}{v_1}$ и $\frac{3v_1}{v_2}$ минут соответственно. По условию, время на обратный путь равно 16 минут, отсюда имеем: $\frac{5v_2}{v_1} + \frac{3v_1}{v_2} = 16$. Вводя новую неизвестную $t = \frac{v_1}{v_2}$, получаем уравнение: $3t + \frac{5}{t} = 16 \Leftrightarrow 3t^2 + 5 = 16t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ или $t = 5$. Осталось заметить, что поскольку $v_1 > v_2$, то $t = \frac{v_1}{v_2} > 1 \Rightarrow t = 5$, $v_1 = 5v_2$ — скорость велосипедиста с горы была в 5 раз больше, чем в гору.

Тест № 3

Часть 2

17 Решите неравенство $\frac{7x-4}{5} \geqslant \frac{x^2}{2}$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство: $\frac{x^2}{2} - \frac{7x-4}{5} \leqslant 0$, $\frac{5x^2-14x+8}{10} \leqslant 0$, $5x^2 - 14x + 8 \leqslant 0$. Квадратный трёхчлен $5x^2 - 14x + 8$ имеет корни $x_1 = 0{,}8, x_2 = 2$. По методу интервалов получаем, что решениями данного неравенства являются $x \in [0{,}8; 2]$.

Ответ: $x \in [0{,}8; 2]$

18 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ (x+y)\cdot(x^2 - y^2) = 1575. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем второе уравнение данной системы: $(x+y)(x-y)(x+y) = 1575$. Подставив в это уравнение $x - y = 7$ (из первого уравнения системы), получим: $7(x+y)^2 = 1575$, $(x+y)^2 = 225 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + y = \pm 15$. Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 15 \end{cases} (1) \text{ и } \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -15 \end{cases} (2).$$

Складывая почленно уравнения системы (1), получаем: $2x = 22$, $x = 11$, $y = x - 7 = 4$. Аналогично, для системы (2) получаем: $2x = -8$, $x = -4$, $y = x - 7 = -11$. Итак, все решения исходной системы – пары $(11; 4)$ и $(-4; -11)$.

Ответ: $(11; 4), (-4; -11)$

$\boxed{19}$ Сократите дробь $\dfrac{12a^2 - 5a - 2}{3ab - 2b - 6a + 4}$.

Решение.

Квадратный трёхчлен $12a^2 - 5a - 2$ имеет корни $a_1 = -\dfrac{1}{4}, a_2 = \dfrac{2}{3}$. Поэтому $12a^2-5a-2 = 12\left(a+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(a-\dfrac{2}{3}\right) = (4a+1)\cdot(3a-2)$. Знаменатель данной дроби преобразуется следующим образом: $3ab-6a-2b+4 = 3a(b-2) - 2(b-2) = (b-2)\cdot(3a-2)$. Следовательно, данная дробь упрощается к виду: $\dfrac{(4a+1)\cdot(3a-2)}{(b-2)\cdot(3a-2)} = \dfrac{4a+1}{b-2}$.

Ответ: $\dfrac{4a+1}{b-2}$

$\boxed{20}$ В ёмкость, содержащую 100 граммов 2% раствора соли, добавили 175 граммов воды, некоторое количество соли и тщательно перемешали полученную смесь. Определите, сколько граммов соли было добавлено, если известно, что после перемешивания получился раствор, содержащий 2,5% соли.

Решение.

Обозначим через x искомое количество грамм добавленной соли. Первоначальный 2%-ый раствор содержал $0{,}02 \cdot 100 = 2$ гр соли. После добавления 175 граммов воды и x гр соли масса растовора стала равна $(275 + x)$ гр, а процентное содержание соли – $\dfrac{2+x}{275+x} \cdot 100\%$. Так как по условию полученный раствор содержит 2,5% соли, то имеем уравнение: $\dfrac{2+x}{275+x} = \dfrac{2{,}5}{100}$. Преобразовывая это уравнение, получаем: $\dfrac{2+x}{275+x} = \dfrac{1}{40}$, $40(2 + x) = 275 + x$, $39x = 195$, $x = 5$.

Ответ: 5 гр.

21 Постройте график функции $y = f(x)$, заданной формулами:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x} \text{ при } x \leqslant -1, \\ -x+2 \text{ при } -1 < x \leqslant 3, \\ -x^2+8x-16 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции одну общую точку?

Решение.

Графиком функции $y = f(x)$ при $x \leqslant -1$ является часть гиперболы, при $-1 < x \leqslant 3$ – часть прямой, при $x > 3$ – часть параболы, изображённые на рисунке 11 (вершиной параболы $y = -x^2 + 8x - 16$ является точка с координатами $x_В = 4$, $y_В = 0$). Легко видеть, что график функции $y = f(x)$ имеет одну общую точку с прямой $y = m$ тогда, когда эта прямая совпадает с прямой $y = 3$ или расположена ниже прямой $y = -1$ (на рис. 11 прямые $y = 3$ и $y = -1$ изображены пунктиром), т.е. при $m = 3$ или $m < -1$.

Ответ: $m \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$

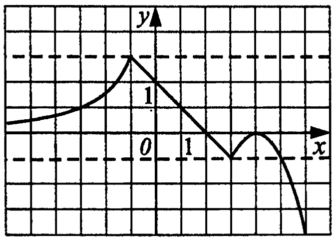


Рис. 11.

Тест №5*

Часть 2

17 Постройте график функции $y = \frac{|x-3|}{2}$. При каких значениях аргумента выполняется неравенство $2 \leqslant y \leqslant 3$?

Решение.

$2 \leqslant \frac{|x-3|}{2} \leqslant 3 \Leftrightarrow 4 \leqslant |x-3| \leqslant 6.$

Решим неравенство $|x-3| \leqslant 6:$ по определению модуля оно равносильно системе $\begin{cases} x-3 \leqslant 6 \\ x-3 \geqslant -6, \end{cases}$ решениями которой являются $x \in [-3; 9]$.

Решим неравенство $|x-3| \geqslant 4:$ по определению модуля оно равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x-3 \geqslant 4 \\ x-3 \leqslant -4, \end{array}\right.$ решениями которой являются $x \in (-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$.

Пересекая промежутки $[-3; 9]$ и $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$, получаем, что решениями данного в условии неравенства являются $x \in [-3; -1] \cup [7; 9]$.

Ответ: $[-3; -1] \cup [7; 9]$, для построения графика данной в условии функции достаточно построить по двум точкам прямую $y = \dfrac{x-3}{2}$ и отразить симметрично относительно оси Ox ту часть этой прямой, которая расположена ниже оси Ox.

18 Вычислите значение выражения

$$\left(\frac{m}{m^2-2m+1} - \frac{m+4}{m^2+3m-4}\right) : \frac{1}{(2m-2)^4} \text{ при } m = \sqrt{3}+1.$$

Решение.

Преобразуем данное в условии выражение по действиям:

1) $\dfrac{m}{m^2-2m+1} - \dfrac{m+4}{m^2+3m-4} = \dfrac{m}{(m-1)^2} - \dfrac{m+4}{(m+4)(m-1)} =$

$= \dfrac{m}{(m-1)^2} - \dfrac{1}{m-1} = \dfrac{m-(m-1)}{(m-1)^2} = \dfrac{1}{(m-1)^2};$

2) $\dfrac{1}{(2m-2)^4} = \dfrac{1}{(2(m-1))^4} = \dfrac{1}{16(m-1)^4};$

3) $\dfrac{1}{(m-1)^2} : \dfrac{1}{16(m-1)^4} = 16(m-1)^2.$

Итак, данное в условии выражение упрощается к виду: $16(m-1)^2$, поэтому при $m = \sqrt{3}+1$ значение этого выражения равно $16\left(\sqrt{3}\right)^2 = 48$.

Ответ: 48

19 Является ли число 496 суммой нескольких подряд идущих членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$? (Если да, то укажите каких именно.)

Решение.

Пусть $b_n, b_{n+1}, \ldots b_{n+k}$ — некоторый участок геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$. Тогда $b_n + \ldots + b_{n+k} =$

$= b_1q^{n-1} + \ldots + b_1q^{n+k-1} = b_1q^{n-1}(1 + \ldots + q^{n+k-1}) = 2^{n-1}(1 + \ldots + 2^{n+k-1}) =$
$= 2^{n-1}(2^{k+1} - 1)$.

Таким образом, $496 = b_n + \ldots + b_{n+k} \Leftrightarrow 496 = 2^{n-1}(2^{k+1} - 1)$. Выделим в числе 496 степени 2: $496 = 4 \cdot 124 = 2^2 \cdot 2 \cdot 31 = 2^4 \cdot 31$. Так как число $2^{k+1} - 1$ нечётно, то равенство $2^{n-1}(2^{k+1} - 1) = 2^4 \cdot 31$ выполнено в том и только том случае, если $2^{n-1} = 2^4$, $2^{k+1} - 1 = 31$.

Уравнение $2^{n-1} = 2^4$ имеет решение $n = 5$, уравнение $2^{k+1} = 32 (= 2^5)$ имеет решение $k = 4$. Стало быть, число 496 является суммой нескольких подряд идущих членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 2$, а именно: $496 = b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9$.

$\boxed{20}$ Найдите все пары значений параметров b и c, для каждой из которых парабола $y = x^2 + bx + c$ касается обеих прямых $y = 4x$ и $y = 2x + 1$.

Решение.

Парабола $y = x^2 + bx + c$ касается каждой из прямых $y = 4x$ и $y = 2x + 1 \Leftrightarrow$ оба уравнения $x^2 + bx + c = 4x$ и $x^2 + bx + c = 2x + 1$ имеют ровно по одному корню. Запишем эти уравнения в стандартном виде и вычислим их дискриминанты (D_1 и D_2):

$$x^2 + (b-4)x + c = 0, \ D_1 = (b-4)^2 - 4c = b^2 - 8b - 4c + 16;$$
$$x^2 + (b-2)x + c - 1 = 0, \ D_2 = (b-2)^2 - 4(c-1) = b^2 - 4b - 4c + 8.$$

Данные уравнения имеют ровно по одному корню $\Leftrightarrow D_1 = 0, D_2 = 0$, поэтому искомыми парами значений b и c являются решения системы уравнений: $\begin{cases} b^2 - 8b - 4c + 16 = 0 & (1), \\ b^2 - 4b - 4c + 8 = 0 & (2). \end{cases}$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1), получаем: $4b - 8 = 0$, $b = 2$. Подставляя $b = 2$ в уравнение (1), имеем: $4 - 16 - 4c + 16 = 0$, $c = 1$. Итак, условию задачи удовлетворяют лишь значения $b = 2, c = 1$.

Ответ: $b = 2, c = 1$

$\boxed{21}$ Турист должен прийти из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 10 км, в назначенный срок. Пройдя половину пути турист подсчитал, что опоздает на 45 минут, если будет продолжать движение с прежней скоростью, а если увеличит скорость на 1,5 км/ч, то окажется в пункте B точно в назначенный срок. Сколько километров в час проходил турист первоначально?

Решение.

Пусть v км/ч — первоначальная скорость туриста, t — время, за которое он должен прийти из A в B. Тогда $\frac{10}{v} = t + \frac{3}{4}$ (если всё время идти со скоростью v, то опоздание на 45 минут, что составляет $\frac{3}{4}$ часа). Второе уравнение: $\frac{5}{v} + \frac{5}{v+1{,}5} = t$, $\frac{10v+7{,}5}{v(v+1{,}5)} = t$, $10v + 7{,}5 = (v+1{,}5)vt$. Выразим vt из первого уравнения — $10 = vt + \frac{3}{4}v$, $vt = 10 - \frac{3}{4}v$, и подставим во второе: $10v + 7{,}5 = (v+1{,}5)\cdot\left(10 - \frac{3}{4}v\right)$. Умножая обе части уравнения на 4 и раскрывая скобки, получаем:

$40v + 30 = (v+1{,}5)\cdot(40-3v)$, $40v + 30 = 40v + 60 - 3v^2 - 4{,}5v$, $3v^2 + 4{,}5v - 30 = 0$, $v^2 + 1{,}5v - 10 = 0$. Из последнего уравнения находим, что $v = 2{,}5$ км/ч.

Ответ: 2,5км.

Тест № 7*

Часть 2

17 Решите неравенство $x^2 \leqslant 8 + \frac{9}{x^2}$.

Решение.

Данное неравенство определено при всех $x \neq 0$. Умножив обе части неравенства на x^2, получим неравенство, равносильное данному на области определения (т.е. при $x \neq 0$): $x^4 \leqslant 8x^2 + 9$, $x^4 - 8x^2 - 9 \leqslant 0$. Чтобы разложить на множители многочлен $x^4 - 8x^2 - 9$, сделаем замену $t = x^2$: корнями квадратного трёхчлена $t^2 - 8t - 9$ являются $t = -1$ и $t = 9$, поэтому $t^2 - 8t - 9 = (t+1)\cdot(t-9)$, а $x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2+1)\cdot(x^2-9)$. Осталось заметить, что поскольку $x^2 + 1 > 0$, то $(x^2+1)\cdot(x^2-9) \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$. Учитывая, что исходное неравенство не определено при $x = 0$, получаем ответ: $x \in [-3; 0) \cup (0; 3]$.

18 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - xy = 7, \\ 3xy + 2(x+y) = -36. \end{cases}$$

Решение.

Введём новые неизвестные $t = x + y$, $s = xy$. Относительно неизвестных t и s данная система имеет вид: $\begin{cases} t - s = 7 \\ 3s + 2t = -36 \end{cases}$ $(*)$.

Умножив первое уравнение системы $(*)$ на 3 и прибавив ко второму уравнению, получим: $3t - 3s + 3s + 2t = 21 - 36$, $5t = -15$, $t = -3$. Отсюда из первого уравнения системы $(*)$ имеем: $s = t - 7 = -10$. Возвращаясь к неизвестным x, y, получаем, что исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (**).$$

По теореме, обратной теореме Виетта, числа x, y, удовлетворяющие системе $(**)$, являются корнями уравнения $z^2 + 3z - 10 = 0$. Данное уравнение имеет корни $z = -5$ и $z = 2$, поэтому решением системы $(**)$ являются пары $(-5; 2)$ и $(2; -5)$.

Ответ: $(-5; 2), (2; -5)$.

19 Сократите дробь $\dfrac{2b^2 + 3a - 6b - ab}{a^2 - 6ab + 8b^2}$.

Решение.

Посмотрим на знаменатель $a^2 - 6ab + 8b^2$ как на квадратный трёхчлен от переменной a с коэффициентами, зависящими от b. Корнями этого трёхчлена, также зависящими от a, являются $a = 2b$ и $a = 4b$ (процедура нахождения корней отличается от «стандарной» лишь тем, что в формулах присутствует переменная b: $D = (-6b)^2 - 4 \cdot 8b^2 = 4b^2$, $a_{1,2} = \dfrac{6b \pm 2b}{2}$). Поэтому $a^2 - 6ab + 8b^2 = (a - 2b) \cdot (a - 4b)$.

Преобразуем числитель данной дроби: $2b^2 - ab + 3a - 6b = b(2b - a) + 3(a - 2b) = (a - 2b) \cdot (3 - b)$. Таким образом, данная дробь равна $\dfrac{(a - 2b) \cdot (3 - b)}{(a - 2b) \cdot (a - 4b)} = \dfrac{3 - b}{a - 4b}$.

Ответ: $\dfrac{3 - b}{a - 4b}$

20 К июню кинотеатр города Дивноморска увеличил цену входного билета на 50% по сравнению с ценой билета в январе. На сколько процентов нужно будет снизить цену билета, чтобы в конце сезона она была на 20% выше, чем в январе?

Решение.

Пусть x — цена билета в январе. Тогда $1{,}5\,x$ — цена билета в июне, а в конце сезона она должна быть равна $1{,}2\,x$. Следовательно, цену билета нужно будет снизить на $0{,}3\,x$, что составляет 20% от величины $1{,}5\,x$.

Ответ: 20%

$\boxed{21}$ Функция $f(x)$ определена согласно формулам:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x} \text{ при } x \leqslant -1, \\ 2|x| - 1 \text{ при } -1 < x \leqslant 5, \\ x^2 - 16x + 64 \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Найдите все значения m, при которых уравнение $f(x) = m$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Уравнение $f(x) = m$ имеет ровно два различных решения $\Leftrightarrow$ график функции $y = f(x)$ и прямая $y = m$ имеют две общие точки. График функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 12, из которого легко видеть, что он имеет две общие точки с прямой $y = m$ при $m = 9$ и $-1 < m < 0$.

Ответ: $m \in (-1; 0) \cup \{9\}$

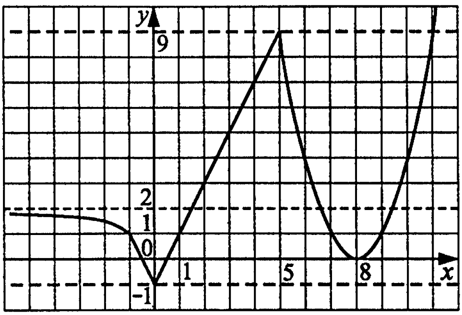


Рис. 12.

§ 5. Решения тестов 2006 г.

Тест №1

Часть 2

$\boxed{17}$ Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{6} + 5x = 11, \\ \dfrac{5y}{4} + \dfrac{x-y}{2} = 2x. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем первое уравнение данной системы: $\dfrac{31x+y}{6}=11$, $31x+y=66$. Преобразуем второе уравнение данной системы: $\dfrac{3y+2x}{4}=2x$, $3y+2x=8x$, $6x-3y=0$, $2x-y=0$. Таким образом, данная система может быть записана в виде: $\begin{cases} 31x+y=66 \\ 2x-y=0. \end{cases}$

Сложив почленно левые и правые части уравнений последней системы, получаем, что $33x=66$, $x=2$, а подставив $x=2$ в любое из этих уравнений, находим, что $y=4$.

Ответ: (2; 4)

$\boxed{18}$ Из пункта A в пункт B выехал автобус. Спустя 40 минут вслед за ним выехал автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с автобусом. Вычислите расстояние между пунктами A и B, если известно, что средняя скорость движения автобуса составила 60 км/ч, а средняя скорость автомобиля — 90 км/ч.

Решение.

Пусть S км — расстояние между пунктами A и B. Тогда автобус преодолел это расстояние за $\dfrac{S}{60}$ часов, а автомобиль — за $\dfrac{S}{90}$ часов. Так как автобус был в пути дольше автомобиля на 40 минут, что составляет $\dfrac{2}{3}$ часа, то имеем уравнение: $\dfrac{S}{60}-\dfrac{S}{90}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{S}{180}=\dfrac{2}{3}$. Отсюда, $S=180\cdot\dfrac{2}{3}=120$.

Ответ: 120 км

$\boxed{19}$ Парабола с вершиной в точке $(-2;-2)$ содержит точку $(1;16)$. Найдите абсциссы точек пересечения этой параболы с осью Ox.

Решение.

Пусть $y=ax^2+bx+c$ — уравнение, определяющее данную параболу. Так как по условию эта парабола содержит точки $(-2;-2)$ и $(1;16)$, то $y(-2)=-2$, $y(1)=16$. Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=-2 \\ a+b+c=16 \end{cases} \quad (*).$$

А учитывая, что точка $(-2;-2)$ — вершина параболы, из формулы, определяющей абсциссу вершины параболы, имеем: $-\dfrac{b}{2a}=-2$, $b=4a$. Подставляя $b=4a$ в уравнения системы $(*)$, получаем: $\begin{cases} c-4a=-2 \\ 5a+c=16. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения последней системы её первое уравнение, находим: $9a = 18$, $a = 2$, и подставляя $a = 2$ в любое из этих уравнений, получаем, что $c = 6$. Таким образом, $y = 2x^2 + 8x + 6$ — уравнение, определяющее данную параболу. Абсциссы точек пересечения этой параболы с осью Ox — корни уравнения $2x^2 + 8x + 6 = 0$, т.е. $x = -3$ и $x = -1$.

Ответ: $x = -3$ и $x = -1$.

20 Найдите все целые значения x, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} \sqrt{54 - x^2 - 15x} \cdot \left(1 - \dfrac{x}{x+3}\right) \geqslant 0, \\ x^5 + 2x^2 - 3 > 0. \end{cases}$$

Решение.

Областью определения данной системы являются те x, для которых $x + 3 \neq 0$ и $54 - x^2 - 15x \geqslant 0$. Решая неравенство $54 - x^2 - 15x \geqslant 0$ методом интервалов, получаем: $x \in [-18; 3] \Rightarrow$ областью допустимых значений переменной x (ОДЗ) является множество $\{-18 \leqslant x \leqslant 3, x \neq -3\}$. Так как квадратный корень по определению неотрицателен, то при всех $x \in$ ОДЗ выполнено неравенство $\sqrt{54 - x^2 - 15x} \geqslant 0$, и первое неравенство данной системы равносильно неравенству $1 - \dfrac{x}{x+3} \geqslant 0$, $\dfrac{3}{x+3} \geqslant 0$, $x + 3 > 0$. Отсюда, учитывая ОДЗ, получаем, что целыми значениями x, удовлетворяющими первому из неравенств данной системы, являются $x = \pm 1, \pm 2, 0, 3$. Осталось лишь проверить, какие из этих значений удовлетворяют и второму неравенству системы. Числовая подстановка показывает, что при $x = -2, -1, 0$ выражение $x^5 + 2x^2 - 3$ отрицательно, при $x = 1$ равно нулю, а при $x = 2, 3$ положительно. Следовательно, искомыми значениями x являются $x = 2$ и $x = 3$.

Ответ: $x = 2$ и $x = 3$.

21 Три числа являются последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии. Если большее из этих чисел увеличить вдвое, а меньшее умножить на -12, то полученные числа в том же порядке будут образовывать арифметическую прогрессию. Каким может быть знаменатель данной геометрической прогрессии?

Решение.

Пусть a, b, c — три последовательных члена геометрической прогрессии, о которых говорится в условии, q — знаменатель этой прогрессии. По характеристическому свойству геометрической прогрессии имеем: $b^2 = ac$.

Так как данная прогрессия возрастающая, то $q > 1$ и c — наибольшее, a — наименьшее из чисел a, b, c. По условию, числа $-12a, b, 2c$ являются последовательными членами арифметической прогрессии. Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, имеем: $b = \frac{-12a + 2c}{2} = c - 6a$. Выполняя подстановку $c = b + 6a$ в равенство $b^2 = ac$, получаем: $b^2 = ab + 6a^2$, $b^2 - ab - 6a^2 = 0$ $(*)$. Будем рассматривать равенство $(*)$ как квадратное уравнение относительно неизвестной b с коэффициентами, зависящими от a. Тогда вычисляя корни этого уравнения по известной формуле, имеем: $D = a^2 - 4 \cdot (-6a^2) = 25a^2$, $b_{1,2} = \frac{a \pm 5a}{2}$. Таким образом, равенство $(*)$ выполнено лишь при $b = -2a$ и $b = 3a$. Если $b = -2a$, то $q = \frac{b}{a} = -2$, что противоречит условию $q > 1$. При $b = 3a$ имеем: $q = \frac{b}{a} = 3$. Следовательно, знаменатель данной в условии геометрической прогрессии может быть равен лишь 3.

Ответ: $q = 3$

Тест № 3*

Часть 2

$\boxed{17}$ Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy. \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем второе уравнение данной системы: $x^2 + 2xy + y^2 = 25$, $(x+y)^2 = 25 \Leftrightarrow x+y = \pm 5$. Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -5 \end{cases} (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} (2).$$

Суммируя почленно уравнения системы (1), получаем: $2x = -2, x = -1$, $y = x - 3 = -4$ (из первого уравнения этой системы). Решая аналогично систему (2), получаем: $2x = 8, x = 4$, $y = x - 3 = 1$. Таким образом, все решения исходной системы — пары $(-1; -4)$ и $(4; 1)$.

Ответ: $(4; 1), (-1; -4)$

$\boxed{18}$ Два автобуса выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов M и N, расстояние между которыми 70 км, и через 40 мин. одновременно прибыли в промежуточный пункт P. Найдите расстояние между пунктами M и P, если известно, что средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M, оказалась на 15 км/ч больше средней скорости автобуса, выехавшего из пункта N.

Решение.

Пусть S км — расстояние между пунктами M и P, а v км/ч — средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта N. Тогда из условия следует, что расстояние между пунктами N и P равно $(S-70)$ км, а средняя скорость автобуса, выехавшего из пункта M, равна $(v+15)$ км/ч. Так как оба автобуса прибыли в пункт P через 40 минут $\left(\text{или } \frac{2}{3} \text{ часа}\right)$, после того как выехали, то выполнены равенства: $\frac{S}{v+15} = \frac{2}{3}$ (1) и $\frac{70-S}{v} = \frac{2}{3}$ (2). По правилу пропорции из равенств (1), (2) следуют равенства: $3S = 2v + 30$ и $210 - 3S = 2v$. Суммируя почленно левые и правые части этих равенств, получаем: $210 = 4v + 30$, $v = 45$. Подставляя $v = 45$ в равенство $3S = 2v + 30$, находим, что $S = 40$.

Ответ: 40 км

$\boxed{19}$ Прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке с координатами $(1; 2)$. Найдите все возможные значения коэффициентов b и c.

Решение.

Прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ лишь в том случае, когда уравнение $x^2 + bx + c = kx$ имеет единственный корень, а это выполнено тогда, когда дискриминант трёхчлена $x^2 + (b-k)x + c$ равен нулю. Таким образом, $(b-k)^2 - 4c = 0$ $(*)$. Из того, что точкой касания является точка $(1; 2)$ (т.е. эта точка принадлежит и прямой $y = kx$ и параболе $y = x^2 + bx + c$), следуют равенства: $k \cdot 1 = 2$, $1^2 + b \cdot 1 + c = 2$, $b = 1 - c$. Подставляя $k = 2$ и $b = 1 - c$ в соотношение $(*)$, получаем: $(c+1)^2 - 4c = 0$, $c^2 - 2c + 1 = 0$, $c = 1$. Отсюда $b = 1 - c = 0$.

Ответ: $b = 0, c = 1$

$\boxed{20}$ Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x + 8} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right) \geqslant 0, \\ \sqrt{x} - \frac{2}{x-3} > 0. \end{cases}$$

Решение.

Первое неравенство данной системы преобразуется к виду:

$\sqrt{x^2-6x+8}\cdot\dfrac{-x^2}{1+x^2}\geqslant 0$ (*). Так как квадратный корень по определению неотрицателен ($\geqslant 0$), то выражение в левой части неравенства (*) неположительно ($\leqslant 0$), поэтому неравенство (*) выполняется лишь в том случае, когда это выражение равно нулю. Значит, либо $\dfrac{x^2}{1+x^2}=0$ (1), либо $\sqrt{x^2-6x+8}=0$ (2). Единственным корнем уравнения (1) является $x=0$, уравнение (2) равносильно уравнению $x^2-6x+8=0$ и имеет корни $x=2$, $x=4$. Выполняя подстановку значений $x=0$, $x=2$ и $x=4$ в неравенство $\sqrt{x}-\dfrac{2}{x-3}>0$, получаем, что при $x=0$ и $x=2$ это неравенство выполнено, а при $x=4$ — нет.

Итак, все решения данной системы неравенств — $x=0$ и $x=2$.

Ответ: $x=0, x=2$

$\boxed{21}$ Числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $3a, 2\sqrt{2}\,b, 3c$ — последовательными членами геометрической прогрессии. Какие значения может принимать отношение $\frac{a}{c}$?

Решение.

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии имеем: $b=\dfrac{a+c}{2}$, $2b=a+c$, $c=2b-a$ (1). А согласно характеристическому свойству геометрической прогрессии — $(2\sqrt{2}\,b)^2=(3a)\cdot(3c)$. Отсюда имеем: $8b^2=9ac$ (2). Подставляя в равенство (2) $c=2b-a$ (равенство 1), получаем: $8b^2=9a\cdot(2b-a)$, $8b^2-18ab+9a^2=0$ (3). Будем рассматривать равенство (3), как квадратное уравнение относительно неизвестной b с коэффициентами, зависящими от a. Вычислим корни этого уравнения: $D=(-18a)^2-4\cdot8\cdot9a^2=36a^2$, $b=\dfrac{18a\pm6a}{16}$, $b_1=\dfrac{3}{4}\,a$, $b_2=\dfrac{3}{2}\,a$. Отсюда, в силу равенства (1), имеем: $c=\dfrac{3}{2}\,a-a=\dfrac{a}{2}$ или $c=3a-a=2a$. Следовательно, отношение $\dfrac{a}{c}$ может принимать значения 0,5 и 2.

Ответ: 0,5; 2

§ 6. Решения тестов 2005 г.

Тест №1

Часть 2

$\boxed{17}$ Упростите выражение $\left(\dfrac{2x+y}{4x^2-2xy}-\dfrac{2x-y}{4x^2+2xy}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{4x}{y}\right)$.

Решение.

$$\frac{2x+y}{4x^2-2xy}-\frac{2x-y}{4x^2+2xy}=\frac{2x+y}{2x(2x-y)}-\frac{2x-y}{2x(2x+y)}=$$

$$=\frac{1}{2x}\cdot\frac{(2x+y)^2-(2x-y)^2}{(2x-y)(2x+y)}=\frac{1}{2x}\cdot\frac{8xy}{4x^2-y^2};\ \frac{y}{x}-\frac{4x}{y}=\frac{y^2-4x^2}{xy}.$$

Таким образом, данное в условии выражение равно:

$\dfrac{1}{2x}\cdot\dfrac{8xy}{4x^2-y^2}\cdot\dfrac{y^2-4x^2}{xy}=-\dfrac{4}{x}$. *Ответ:* $-\dfrac{4}{x}$

$\boxed{18}$ Найдите область определения выражения $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+3}}{1-x^2}$.

Решение.

Областью определения данного выражения являются те x, для которых $2x^2-5x+3\geqslant 0$ и $1-x^2\neq 0$. По методу интервалов находим, что решением неравенства $2x^2-5x+3\geqslant 0$ являются $x\in(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$. Условие $1-x^2\neq 0$ выполнено при $x\neq\pm 1$. Поэтому, «выкалывая» из множества $(-\infty;1]\cup[1{,}5;+\infty)$ точки $x=-1$ и $x=1$, получаем, что областью определения данного в условии выражения является множество $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup[1{,}5;+\infty)$.

$\boxed{19}$ Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 250, которые делятся на 6.

Решение.

Последовательность натуральных чисел, делящихся на 6, задаётся формулой $a_n=6n$, т.е. является арифметической прогрессией с разностью $d=6$. Пусть k — номер наибольшего числа из этой последовательности, не превосходящего 250. Тогда $6k\leqslant 250<6(k+1)$, откуда получаем, что $k=41$. Следовательно, количество чисел, не превосходящих 250 и делящихся на 6 равно 41, а сумма всех этих чисел равна:

$S=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=\dfrac{2\cdot 6+6\cdot 40}{2}\cdot 41=5166.$ *Ответ:* 5166

$\boxed{20}$ Известно, что прямая, параллельная прямой $y = -4x$, касается параболы $y = x^2$. Вычислите координаты точки касания.

Решение.

Любая прямая, параллельная прямой $y = -4x$, задаётся уравнением вида $y = -4x + c$, где c – некоторое число. Прямая $y = -4x + c$ касается параболы $y = x^2$ $\Leftrightarrow$ уравнение $x^2 = -4x + c$ имеет единственный корень $\Leftrightarrow$ дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + 4x - c$ равен нулю $\Leftrightarrow$ $16 + 4c = 0$, $c = -4$. Абсцисса точки касания параболы $y = x^2$ и прямой $y = -4x - 4$ является корнем уравнения $x^2 = -4x - 4$ и равна $x_0 = -2$. Ордината точки касания вычисляется путём подстановки x_0 в уравнение параболы (или прямой): $y_0 = x_0^2 = 4$.

Ответ: $(-2; 4)$

$\boxed{21}$ Бассейн можно наполнять через четыре трубы. Если открыты вторая, третья и четвёртая трубы, то бассейн наполняется за 1 час, если первая, третья и четвёртая – за 1 ч. 15 мин, а если только первая и вторая – за 1 ч. 40 мин. За какое время наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы?

Решение.

Пусть x, y, z, t – объём, наполняемый за 1 час через 1-ю, 2-ю, 3-ю и 4-ю трубу соответственно, а V – объём всего бассейна. Согласно условию задачи имеем: $y + z + t = V$ (1); $(x + z + t) \cdot \frac{5}{4} = V$ (2); $(x + y) \cdot \frac{5}{3} = V$ (3). Умножив обе части уравнения (1) на $\frac{5}{4}$ и сложив результат с уравнением (2), получим: $\frac{5}{4} \cdot (x + y) + \frac{5}{2} \cdot (z + t) = \frac{9}{4}V$ (4). Умножая уравнение (3) на $\frac{3}{4}$ и вычитая результат из уравнения (4), имеем: $\frac{5}{2} \cdot (z + t) = \frac{6}{4}V$, $z + t = \frac{3}{5}V$. Подставляя $z + t = \frac{3}{5}V$ в уравнения (1) и (2), получаем: $y + \frac{3}{5}V = V, y = \frac{2}{5}V$; $\left(x + \frac{3}{5}V\right) \cdot \frac{5}{4} = V$, $x = \frac{1}{5}V$.

Таким образом, $x + y + z + t = \frac{1}{5}V + \frac{2}{5}V + \frac{3}{5}V = \frac{6}{5}V \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{5}{6} \cdot (x + y + z + t)$ – все четыре трубы вместе наполняют бассейн за $\frac{5}{6}$ часа, или 50 минут.

Ответ: 50 минут

Тест №3*

Часть 2

17 Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-3}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y-3}}\right)\cdot\left(x^2-y^2+6y-9\right).$$

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y-3}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y-3}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y-3}+\sqrt{x}+\sqrt{y-3}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y-3})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y-3})}=$$

$=\dfrac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y-3})^2}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y+3}$. Далее, $x^2-y^2+6y-9=$ $=x^2-(y-3)^2=(x-y+3)\cdot(x+y-3)$. Таким образом, данное в условии выражение равно $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-y+3}\cdot(x-y+3)\cdot(x+y-3)=2\sqrt{x}(x+y-3)$.

Ответ: $2\sqrt{x}(x+y-3)$

18 Найдите область определения выражения $\sqrt{\dfrac{x^4-10x^2+9}{2x+3-x^2}}$.

Решение.

Областью определения данного выражения является множество решений неравенства $\dfrac{x^4-10x^2+9}{2x+3-x^2}\geqslant 0$, $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2-2x-3}\leqslant 0$ $(*)$. Прежде чем решать неравенство $(*)$, преобразуем его левую часть. При замене $x^2=t$ многочлен x^4-10x^2+9 принимает вид: $t^2-10t+9$. Квадратный трёхчлен $t^2-10t+9$ имеет корни $t=1$ и $t=9$. Поэтому $t^2-10t+9=$ $=(t-1)(t-9)$ и, значит, $x^4-10x^2+9=(x^2-1)(x^2-9)=$ $=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. Квадратный трёхчлен x^2-2x-3 имеет корни $x=-1$, $x=3$, поэтому $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. Следовательно, при всех, за исключением $x=-1$ и $x=3$ имеем: $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^2-2x-3}=$ $=\dfrac{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}{(x+1)(x-3)}=(x-1)(x+3)$ (при $x=-1$, $x=3$ знаменатель дроби в левой части обращается в нуль — дробь не определена).

Решением неравенства $(x-1)(x+3)\leqslant 0$ являются $x\in[-3;1]$, а учитывая условие $x\neq-1$, получаем, что множеством решений неравенства $(*)$ являются $x\in[-3;-1)\cup(-1;1]$.

Ответ: $[-3;-1)\cup(-1;1]$

19 Восемь чисел, большее из которых равно 26, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите меньшее из этих чисел, если их сумма равна 124.

Решение.

Данные восемь чисел обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Так как они образуют возрастающую арифметическую прогрессию, то a_1 — меньшее, a_8 — большее из этих чисел. Согласно формуле суммы n членов арифметической прогрессии, сумма данных чисел равна $S = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 4(a_1 + a_8)$. По условию, $a_8 = 26$, $S = 124 \Rightarrow 4(a_1 + 26) = 124$, $a_1 + 26 = 31$, $a_1 = 5$.

Ответ: 5

20 Известно, что прямые $y = -4x$ и $y = 6x + 5$ касаются параболы $y = x^2 + bx + c$. Найдите значения коэффициентов b и c.

Решение.

Прямые $y = -4x$ и $y = 6x + 5$ касаются параболы $y = x^2 + bx + c \Leftrightarrow$ уравнения $x^2 + bx + c = -4x$ и $x^2 + bx + c = 6x + 5$ имеют по одному корню $\Leftrightarrow$ дискриминанты трёхчленов $x^2 + (b+4)x + c$, $x^2 + (b-6)x + c - 5$ равны нулю. Отсюда получаем, что коэффициенты b и c удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases} (b+4)^2 - 4c = 0 \\ (b-6)^2 - 4(c-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 8b + 16 - 4c = 0 & (1) \\ b^2 - 12b + 56 - 4c = 0 & (2). \end{cases}$
Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получаем: $20b - 40 = 0$, $b = 2$. Подставляя $b = 2$ в любое из уравнений (1), (2), находим, что $c = 9$.

Ответ: $b = 2, c = 9$

21 Двое каменщиков, работая вместе, за 1 час могут выложить участок стены площадью 2 м^2. Работая отдельно, второй каменщик выложит участок стены площадью 4,8 м^2 на 2 часа быстрее, чем это сделает первый. За сколько часов, работая отдельно, первый каменщик выложит стену площадью 8 м^2?

Решение.

Пусть первый каменщик за час выкладывает x м^2 стены, а второй y м^2. Из условия имеем: $x + y = 2$ (1). Участок стены площадью 4,8 м^2 первый каменщик выложит за $\frac{4{,}8}{x}$ часов, а второй — за $\frac{4{,}8}{y}$ часов. По условию, $\frac{4{,}8}{x} - 2 = \frac{4{,}8}{y}$ (2). Выразив y через x из уравнения (1) и подставив в уравнение (2), получим: $\frac{4{,}8 - 2x}{x} = \frac{4{,}8}{2 - x}$, $(4{,}8 - 2x) \cdot (2 - x) = 4{,}8x$,

$2x^2-8{,}8x+9{,}6=4{,}8x$, $2x^2-13{,}6x+9{,}6=0$, $20x^2-136x+96=0/:4$, $5x^2-34x+24=0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $x_1=0{,}8$, $x_2=6$. При $x=6$ имеем: $y=2-6=-4$ — не удовлетворяет смыслу задачи. Значит, $x=0{,}8$, поэтому стену площадью 8 м^2 первый каменщик выложит за $\frac{8}{0{,}8}=10$ часов.

Ответ: 10.

Глава II

Решения задач из задачника

Повышенный уровень (часть 2)

1. Преобразования выражений

1. Разложите на множители выражение $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 2x + 5y$.

Решение.

Заметим, что первые три слагаемые образуют полный квадрат: $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$. Следовательно, данное выражение равно $(2x - 5y)^2 - (2x - 5y) = (2x - 5y)\cdot(2x - 5y - 1)$.

3. Разложите на множители выражение $x^2 - 9y^2 + 30yz - 25z^2$.

Решение.

Заметим, что последние три слагаемые после вынесения знака минус образуют полный квадрат: $9y^2 - 30yz + 25z^2 = (3y - 5z)^2$. Воспользовавшись также формулой разности квадратов, получим, что данное выражение равно $x^2 - (3y - 5z)^2 = (x - 3y + 5z)\cdot(x + 3y - 5z)$.

5. Упростите выражение $\left(\dfrac{x}{xy + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + xy}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{x^2 - y^2} - \dfrac{1}{x + y}\right)$.

Решение.

Преобразуя дроби в каждой из скобок и приводя их к общему знаменателю, получим: $\left(\dfrac{x}{y(x+y)} - \dfrac{y}{x(x+y)}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)(x+y)} - \dfrac{1}{x+y}\right) =$
$\dfrac{x^2 - y^2}{xy(x+y)}\cdot\dfrac{x - (x - y)}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy(x+y)}\cdot\dfrac{y}{x^2 - y^2} = \dfrac{1}{x(x+y)}$.

7. Сократите дробь $\dfrac{9a^2 - 6a + 1}{1 - 3a + b - 3ab}$.

Решение.

Числитель данной дроби является полным квадратом: $(3a - 1)^2$. Знаменатель этой дроби преобразуется к виду: $1 + b - 3a(1 + b) = (1 + b)(1 - 3a)$. Следовательно, данная дробь равна $\dfrac{(3a-1)^2}{(1+b)(1-3a)} = \dfrac{1 - 3a}{b + 1}$.

9. Сократите дробь $\dfrac{a-\sqrt{a}-6}{\sqrt{a}-3}$.

Решение.

Введём обозначение $\sqrt{a} = t$. Тогда данная дробь запишется в виде: $\dfrac{t^2-t-6}{t-3}$. Квадратный трёхчлен t^2-t-6 имеет корни $t=-2$ и $t=3$, поэтому $t^2-t-6=(t+2)(t-3)$. Значит, $\dfrac{t^2-t-6}{t-3} = t+2$, и возвращаясь к переменной a, получаем ответ: $\sqrt{a}+2$.

2. Уравнения и системы уравнений

1. Решите уравнение $\dfrac{8}{16-x^2} - \dfrac{2}{x^2-8x+16} = \dfrac{1}{x+4}$.

Решение.

После умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель $(x-4)^2(x+4)$, получаем равносильное в области определения $(x \neq \pm 4)$ уравнение: $-8(x-4)-2(x+4)=(x-4)^2$ или $x^2+2x-8=0$. Из двух корней этого уравнения $(-4$ и $2)$ в область определения исходного уравнения входит только $x=2$.

Ответ: $x=2$

3. Решите уравнение $5x+14\sqrt{x}=3$.

Решение.

Сделав замену неизвестной $t=\sqrt{x}$, $t \geqslant 0$ (т.к. квадратный корень по определению неотрицателен), получим уравнение $5t^2+14t-3=0$. Корнями этого уравнения являются $t=-3$ и $t=\dfrac{1}{5}$. Значение $t=-3$ не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$. Для значения $t=\dfrac{1}{5}$, возвращаясь к первоначальной неизвестной, получаем: $\sqrt{x}=\dfrac{1}{5}$, $x=\dfrac{1}{25}$.

Ответ: $x=0{,}04$.

5. Решите уравнение $(x^2+7x+13)^2-(x+3)(x+4)=1$.

Решение.

Заметим, что $(x+3)(x+4)=x^2+7x+12$. Поэтому относительно неизвестной $t=x^2+7x+13$ данное в условии уравнение запишется в виде: $t^2-(t-1)=1$, $t^2-t=0 \Leftrightarrow t=0$ или $t=1$.

Следовательно, данное в условии уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} x^2+7x+13=0, & (1)\\ x^2+7x+13=1. & (2)\end{array}\right.$$

Уравнение (1) корней не имеет, корнями уравнения (2) являются $x=-3$ и $x=-4$.

Ответ: $-4; -3$.

7. Решите уравнение $\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}+\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}=-2$.

Решение.

Относительно неизвестной $t=\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}$ имеем:

$$t+\frac{1}{t}=-2,\ \frac{t^2+2t+1}{t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+2t+1=0,\\ t\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow\ t=-1.$$

Таким образом, данное в условии уравнение равносильно уравнению $\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}=-1 \Leftrightarrow 3-x=x^2+4x+9$, $x^2+5x+6=0$, корнями которого являются $x=-2$ и $x=-3$. *Ответ:* $-3; -2$.

9. Решите уравнение $x^3+3x^2-4x-12=0$.

Решение.

Группируя в данном уравнении слагаемые и вынося за скобки общий множитель, получаем:

$$x^2(x+3)-4(x+3)=0,\ (x+3)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0,\\ x^2-4=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3,\\ x=-2,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ: $-3; -2; 2$.

11. Корнями уравнения $ax^2+x+c=0$ являются числа 2 и $-2{,}25$. Найдите коэффициенты a и c.

Решение.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} 2+(-2{,}25)=\dfrac{-1}{a},\\ 2\cdot(-2{,}25)=\dfrac{c}{a},\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a}=0{,}25,\\ -4{,}5a=c.\end{cases}$$

Из равенства $\dfrac{1}{a}=0{,}25$ находим, что $a=4$. Подставляя $a=4$ в равенство $c=-4{,}5a$, получаем, что $c=-18$. *Ответ:* $a=4, c=-18$.

13. Числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 5x - 3 = 0$. Найдите:

а) $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$ б) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ в) $x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1$ г) $x_1^2 + x_2^2$

Рассмотрим наиболее сложный из четырёх примеров а), б), в), г), а именно – пример г).

Решение.

г) Заметим, что $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ (*). По теореме Виета имеем: $x_1 + x_2 = -5$, $x_1 \cdot x_2 = -3$. Подставляя в правую часть равенства (*) вместо выражений $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$ их значения — числа -5 и -3, получаем: $x_1^2 + x_2^2 = (-5)^2 - 2 \cdot (-3) = 31$.

Ответ: г) 31.

14. Выяснить, имеет ли корни уравнение $x^2 + 2x\sqrt{5} + 18 = -4x$.

Решение.

Запишем данное уравнение в стандартном виде: $x^2 + (2\sqrt{5} + 4)x + 18 = 0$. Определим знак дискриминанта D трёхчлена $x^2 + 2(\sqrt{5} + 2)x + 18$: $\dfrac{D}{4} = (\sqrt{5} + 2)^2 - 18 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 18 = 4\sqrt{5} - 9$; так как $(4\sqrt{5})^2 = 80$, а $9^2 = 81$, то $4\sqrt{5} < 9$, и, значит, $D < 0$. Поскольку дискриминант отрицателен, то данное квадратное уравнение корней не имеет.

Ответ: нет.

16. Докажите, что уравнение $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 4x + 6) = 2$ не имеет корней.

Решение.

Заметим, что $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$, а $x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2$. Так как $(x + 1)^2 + 2 \geqslant 2$ и $(x - 2)^2 + 2 \geqslant 2$, то поэтому равенство $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 4x + 6) = 2$ невозможно ни при каком значении x, ч.т.д.

18. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$

Решение.

Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{144}{x^2} = 7 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \ (1) \\ y = \dfrac{12}{x} \ (2). \end{cases}$$

Квадратный трёхчлен $t^2 - 7t - 144$ имеет корни $t = -9$ и $t = 16$, поэтому биквадратное уравнение (1) имеет корни $x = \pm 4$ ($x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$, уравнение $x^2 = -9$ корней не имеет). Подставляя $x = \pm 4$ в уравнение (2), находим соответствующие значения y: $y = \pm 3$.

Ответ: $(-4; -3), (4; 3)$

20. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 73, \\ xy = -24. \end{cases}$

Решение.

К первому уравнению прибавим и вычтем удвоенное второе уравнение, после чего система приводится к виду: $\begin{cases} (x+y)^2 = 25 \\ (x-y)^2 = 121 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = \pm 5 \\ x - y = \pm 11. \end{cases}$
Решая четыре линейные системы, соответствующие четырём вариантам распределения знаков, получаем все решения исходной системы.

Ответ: $(-8; 3), (8; -3), (-3; 8), (3; -8)$

22. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{2}{x-y} + \dfrac{12}{x+y} = 1, \\ \dfrac{6}{x-y} - \dfrac{20}{x+y} = -11. \end{cases}$

Решение.

При замене неизвестных $\dfrac{1}{x-y} = t$, $\dfrac{1}{x+y} = s$, данная система сводится к линейной системе:

$$\begin{cases} 2t + 12s = 1 \;/ * -3 \\ 6t - 20s = -11 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 12s = 1 \\ -56s = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1 - 12s}{2} = -1 \\ s = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Возвращаясь к неизвестным x, y, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} = -1 \\ \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $(1{,}5; 2{,}5)$

24. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 2, \\ x + z = -5. \end{cases}$

Решение.

Сложив все три уравнения данной системы, получим: $2(x+y+z) = 0$, $x + y + z = 0$ $(*)$. Вычитая теперь из уравнения $(*)$ поочерёдно каждое из уравнении данной системы, находим: $z = -3$, $x = -2$, $y = 5$.

Ответ: $(-2; 5; -3)$

26. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3(x+y) - xy = -1, \\ 4xy + x + y = -9. \end{cases}$

Решение.

Сделав замену неизвестных $x + y = t$, $xy = s$, получим:

$$\begin{cases} 3t - s = -1 \;/ * 4 \\ 4s + t = -9 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} 3t - s = -1 \\ 13t = -13 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1, s = -2.$$

Таким образом, исходная система упрощается к виду:

$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$ $(*)$. По теореме, обратной теореме Виетта, числа x, y, удовлетворяющие системе $(*)$, являются корнями уравнения $z^2 + z - 2 = 0$. Это уравнение имеет корни $z = 1$ и $z = -2$, поэтому все решения исходной системы – пары $(1; -2)$ и $(-2; 1)$.

28. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^4 - y^4 = 65. \end{cases}$

Решение.

Заметим, что если записать 2-ое уравнение данной системы в виде $(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) = 65$ и выполнить подстановку $x^2 + y^2 = 13$, то эта система упрощается следующим образом:

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ x^2 = 9. \end{cases}$ Отсюда следует, что все решения исходной системы – пары $(-3; -2), (-3; 2), (3; -2), (3; 2)$.

30. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 - y^2) \cdot (x - y) = 144. \end{cases}$

Решение.

Упростим данную систему, преобразовав 2-ое уравнение к виду $(x - y)^2 \cdot (x + y) = 144$ и выполнив подстановку $x + y = 4$:

$\begin{cases} x + y = 4 \\ 4(x - y)^2 = 144 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 4 \\ (x - y)^2 = 36. \end{cases}$ Отсюда следует, что исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -6 \end{cases} (1) \text{ и } \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 6 \end{cases} (2).$$

Суммируя уравнения системы (1), находим её решение: $x = -1 \Rightarrow y = 5$. Для системы (2) аналогично получаем: $x = 5 \Rightarrow y = -1$.

Ответ: $(5; -1), (-1; 5)$

32. Решите систему уравнений: $\begin{cases} |x|\cdot y = -24, \\ (x+1)\cdot(y-3) = 15. \end{cases}$

Решение.

Раскрыв скобки во втором уравнении данной системы, преобразуем его к виду: $xy + y - 3x = 18$. Снимая знак модуля в первом уравнении системы, рассмотрим два случая: $x \geqslant 0$ и $x < 0$.

1) При $x \geqslant 0$ данная система преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} x\cdot y = -24, \\ xy + y - 3x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = -24, \\ -24 + y - 3x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = -24, \\ y = 3x + 42 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x(3x+42) = -24 \\ y = 3x + 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 42x + 24 = 0 \\ y = 3x + 42. \end{cases}$$

Оба корня трёхчлена $3x^2 + 42x + 24$ отрицательны, поэтому исходная система не имеет решений, удовлетворяющих условию $x \geqslant 0$.

2) При $x < 0$ исходная система преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} x\cdot y = 24, \\ xy + y - 3x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 24, \\ 24 + y - 3x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cdot y = 24, \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 3x(x-2) = 24 \\ y = 3(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ y = 3(x-2). \end{cases}$$

Трёхчлен $x^2 - 2x - 8$ имеет корни $x = -2$ и $x = 4$. Корень $x = 4$ не удовлетворяет условию $x < 0$. При $x = -2$ имеем: $y = 3(-2-2) = -12$.

Ответ: $(-2; -12)$

34. Решите уравнение $x^4 - 27x^2 + 14x + 120 = 0$.

Решение.

Попробуем разложить многочлен $x^4 - 27x^2 + 14x + 120$ на множители, представив его в виде разности квадратов: $(x^2 + a)^2 - (x + b)^2$. Раскрыв скобки в этом выражении, получим: $x^4 + 2ax^2 + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$. Для того, чтобы данное выражение тождественно совпало с многочленом $x^4 - 27x^2 + 14x + 120$, необходимо выполнение условий: $-2b = 14$, $a^2 - b^2 = 120 \Rightarrow b = -7, a = \pm 13$. Легко видеть, что имеет место тождество: $(x^2 - 13)^2 - (x - 7)^2 = x^4 - 27x^2 + 14x + 120$. Далее, воспользовавшись формулой разности квадратов, получаем: $(x^2 - 13)^2 - (x - 7)^2 = (x^2 - x - 6)\cdot(x^2 + x - 20)$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 - x - 6 = 0$ и $x^2 + x - 20 = 0$. Первое из этих уравнений имеет корни $x = -2, x = 3$, а корни второго — $x = -5, x = 4$. *Ответ:* $-5; -2; 3; 4$.

3. Неравенства и системы неравенств

1. Решите неравенство $(x^2-6x+10)\cdot(x-3)\cdot(x^2-9)>0$.

Решение.

Данное неравенство преобразуем к виду: $((x-3)^2+1)\cdot(x-3)\cdot(x-3)\cdot(x+3)>0$. Так как $(x-3)^2+1>0$ при всех x, а $(x-3)^2>0$ при всех $x\neq 3$, то данное неравенство равносильно системе: $\begin{cases} x+3>0 \\ x\neq 3. \end{cases}$

Выкалывая из промежутка $(-3;+\infty)$ точку $x=3$, получаем ответ: $x\in(-3;3)\cup(3;+\infty)$.

3. Решите неравенство $\dfrac{3x^3+2x^2+x}{4x^2-49}\geqslant 0$.

Решение.

$\dfrac{3x^3+2x^2+x}{4x^2-49}=\dfrac{x(3x^2+2x+1)}{(2x-7)(2x+7)}$. Так как $3x^2+2x+1>0$ при любых x (ветви параболы $y=3x^2+2x+1$ направлены вверх и ось Ox она не пересекает), то данное в условии неравенство равносильно неравенству $\dfrac{x}{(2x-7)(2x+7)}\geqslant 0$. По методу интервалов получаем, что решением этого неравенства являются $x\in(-3{,}5;0]\cup(3{,}5;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-3{,}5;0]\cup(3{,}5;+\infty)$

5. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{x^2-13x+40}{x-8}}\geqslant 0$.

Решение.

Поскольку квадратный корень всегда не отрицателен, то данное неравенство выполнено при всех x, для которых оно определено, т.е. оно равносильно неравенству: $\dfrac{x^2-13x+40}{x-8}\geqslant 0$. Квадратный трёхчлен $x^2-13x+40$ имеет корни $x=5$ и $x=8$, поэтому последнее неравенство преобразуется к неравенству $\dfrac{(x-5)(x-8)}{x-8}\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 8 \\ x\geqslant 5. \end{cases}$
Отсюда получаем ответ: $x\in[5;8)\cup(8;+\infty)$.

7. Решите неравенство $2\sqrt{7}(12-5x)+3\sqrt{3}(5x-12)\geqslant 0$.

Решение.

Преобразуем данное неравенство, вынеся за скобки общий множитель $5x-12$: $(5x-12)\cdot(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})\geqslant 0$. Так как $3\sqrt{3}<2\sqrt{7}$ $\left((3\sqrt{3})^2=27,\ (2\sqrt{7})^2=28\right)$, то $3\sqrt{3}-2\sqrt{7}<0$, и поэтому данное неравенство равносильно неравенству $5x-12\leqslant 0$, $x\leqslant 2{,}4$.

Ответ: $x\in(-\infty;2{,}4]$

9. Найдите целые решения системы неравенств: $\begin{cases} 5\sqrt{6}-x\geqslant 0, \\ 6\sqrt{3}-x\leqslant 0. \end{cases}$

Решение.

Данную систему неравенств запишем в виде: $\begin{cases} x\leqslant 5\sqrt{6}\ (1) \\ x\geqslant 6\sqrt{3}\ (2). \end{cases}$

Возводя в квадрат каждое из неравенств (1), (2), получаем неравенства: $x^2\leqslant 150$, $x^2\geqslant 108$. Наибольшим целым решением неравенства $x^2\leqslant 150$ является $x=12$, а наименьшим целым решением неравенства $x^2\geqslant 108$ является $x=11$. Таким образом, целыми решениями данной системы являются все целые x, принадлежащие отрезку $[11;12]$, т.е числа 11, 12.

Ответ: 11; 12.

11. Найдите наибольшее целое число a, при котором сумма дробей $\frac{\sqrt{3}-a}{2}$ и $\frac{a+2}{3}$ положительна.

Решение.

$\frac{\sqrt{3}-a}{2}+\frac{a+2}{3}>0\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}-3a+2a+4}{6}>0\Leftrightarrow 4+3\sqrt{3}-a>0$,
$a<4+3\sqrt{3}$. Наибольшее целое число, меньшее чем $4+3\sqrt{3}$, равно 9:

$9<4+3\sqrt{3}\Leftrightarrow 5<3\sqrt{3}\Leftrightarrow 25<(3\sqrt{3})^2$ – верное неравенство;

$10>4+3\sqrt{3}\Leftrightarrow 6>3\sqrt{3}\Leftrightarrow 36<(3\sqrt{3})^2$ – верное неравенство.

Следовательно, искомым числом a является число 9.

Ответ: $a=9$.

13. Решите неравенство $x-4\sqrt{x+4}-1<0$.

Решение.

Представим левую часть неравенства в виде: $x+4-4\sqrt{x+4}+4-9=$ $=(\sqrt{x+4}-2)^2-9=(\sqrt{x+4}-5)\cdot(\sqrt{x+4}+1)$. Так как $\sqrt{x+4}+1>0$ при всех x, для которых это выражение определено $(x\geqslant -4)$, то исходное неравенство равносильно неравенствам: $\sqrt{x+4}-5<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases} x+4<25 \\ x\geqslant -4 \end{cases}\Leftrightarrow -4\leqslant x<21$. *Ответ:* $x\in[-4;21)$

15. Решите неравенство $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 16 \geqslant 0$.

Решение.

Преобразуем левую часть данного неравенства:
$x^2(x^2 - 6x + 9) - 16 = x^2(x-3)^2 - 16 = \big(x(x-3) - 4\big)\cdot\big(x(x-3)+4\big) = \big(x^2 - 3x - 4\big)\cdot\big(x^2 - 3x + 4\big)$. Квадратный трёхчлен $x^2 - 3x + 4$ положителен при всех значениях x (т.к. его коэффициент при x^2 положителен, а дискриминант меньше нуля). Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$, решая которое методом интервалов, получаем ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

17. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{18}{x^2 - 4x + 8}$.

Решение.

Заметим, что $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 \geqslant 4$. Отсюда следует, что наибольшее значение функции $y = \dfrac{18}{x^2 - 4x + 8}$ достигается при $x = 2$ и равно $\dfrac{18}{4} = 4{,}5$. *Ответ:* 4,5

19. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{3x^2 + 22}{x^2 + 4}$.

Решение.

Преобразуем выражение, определяющее данную функцию:
$\dfrac{3x^2 + 22}{x^2 + 4} = 3 + \dfrac{10}{x^2 + 4}$. Так как $x^2 + 4 \geqslant 4$, то наибольшее значение дроби $\dfrac{10}{x^2 + 4}$ равно $\dfrac{10}{4} = 2{,}5$, а наибольшее значение данной в условии функции равно 5,5.

Ответ: 5,5

4. Последовательности и прогрессии

1. Известно, что сумма первого, второго и шестого членов арифметической прогрессии равна 36. Найдите сумму второго и четвёртого членов этой прогрессии.

Решение.

Пусть a_n — n-ый член данной прогрессии, d — её разность. Тогда:
$a_1 + a_2 + a_6 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 5d) = 3a_1 + 6d = 3(a_1 + 2d)$, $a_2 + a_4 = 2a_1 + 4d = 2(a_1 + 2d)$. По условию, $a_1 + a_2 + a_6 = 36 \Rightarrow 3(a_1 + 2d) = 36$, $a_1 + 2d = 12$, $a_2 + a_4 = 2(a_1 + 2d) = 24$.

Ответ: 24

3. Первый член арифметической прогрессии равен 3, а разность прогрессии равна 4. Известно, что сумма первых n членов данной прогрессии равна 210. Найдите n.

Решение.

Согласно формуле суммы n членов арифметической прогрессии, $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. По условию, $S_n = 210$, $a_1 = 3$, $d = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{6 + 4(n-1)}{2} \cdot n = 210$, $2n^2 + n - 210 = 0$. Полученное уравнение имеет корни $n = -10{,}5$ и $n = 10$. Значение $n = -10{,}5$ не удовлетворяет смыслу задачи, следовательно, $n = 10$.

5. Сумма первых ста членов арифметической прогрессии на 700 меньше, чем сумма следующих ста её членов. На сколько сумма первых трёхсот членов этой прогрессии меньше суммы следующих трёхсот её членов?

Решение.

Пусть a_n — n-ый член данной прогрессии, d — её разность. Заметим, что $a_{101} = a_1 + 100d$, $a_{102} = a_2 + 100d$, ..., $a_{200} = a_{100} + 100d$. Суммируя почленно левые и правые части этих равенств, получим: $a_{101} + a_{102} + \ldots + a_{200} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} + 10000d$. По условию, $(a_{101} + a_{102} + \ldots + a_{200}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}) = 700 \Rightarrow 10000d = 700$. Аналогично, $a_{301} = a_1 + 300d$, $a_{302} = a_2 + 300d$, ..., $a_{600} = a_{300} + 300d \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{301} + a_{302} + \ldots + a_{600} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{300} + 90000d$. Отсюда получаем, что сумма первых трёхсот членов этой прогрессии меньше суммы следующих трёхсот её членов на $90000d$, что равно $9 \cdot 10000d = 9 \cdot 700 = 6300$.

Ответ: 6300

7. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 250, которые при делении на 4 дают в остатке 3.

Решение.

Последовательность натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3, определяется формулой $a_n = 4n + 3$, где $n \geqslant 0$, т.е. является арифметической прогрессией с разностью $d = 4$. Пусть k — номер наибольшего числа из этой последовательности, не превосходящего 250. Тогда $4k + 3 \leqslant 250 < 4(k+1) + 3$, откуда получаем, что $k = 61$. Значит, количество чисел, которые не превосходят 250 и при делении на 4 дают в остатке 3, равно 62 $\left(0 \leqslant n \leqslant 61\right)$, а сумма всех этих чисел равна:

$S = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \dfrac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 61}{2} \cdot 62 = 7750$. *Ответ:* 7750

9. Найдите все значения x, при которых числа $2(x+1)$, x, $x+1$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Решение.

Числа $2(x+1)$, x, $x+1$ являются последовательными членами геометрической прогрессии $\Leftrightarrow \dfrac{x}{2(x+1)} = \dfrac{x+1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2(x+1)^2$ $\left(x \neq 0,\ x \neq -1\right) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $-2 \pm \sqrt{2}$

11. Найдите такое число, что если его вставить между числами 9 и 144, то получится три последовательных члена возрастающей геометрической прогрессии.

Решение.

Пусть x — искомое число. Тогда из определения геометрической прогрессии следует, что $\dfrac{144}{x} = \dfrac{x}{9}$, $x^2 = 144 \cdot 9$, $x = \pm 12 \cdot 3$, $x = \pm 36$. При $x = -36$ данные числа $\left(9, -36, 144\right)$ не являются последовательными членами возрастающей прогрессии, а если $x = 36$, то условие возрастания прогрессии выполнено.

Ответ: 36

13. Найдите такие два числа, что если их вставить между числами 7 и 189, то получится четыре последовательных члена геометрической прогрессии.

Решение.

Допустим, что требуемые два числа найдены, и обозначим знаменатель получившейся геометрической прогрессии через q. Если число 7 принять за первый член $\left(b_1\right)$ этой прогрессии, то 189 — четвёртый её член. Отсюда получаем, что $189 = b_1 \cdot q^3 = 7q^3$, $q^3 = 27$, $q = 3$, а искомые числа равны $b_1 \cdot q = 7 \cdot 3 = 21$, $b_1 \cdot q^2 = 7 \cdot 9 = 63$.

Ответ: $21, 63$

15. Четвёртый член геометрической прогрессии равен 36, а сумма второго и третьего членов равна 16. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что она является возрастающей.

Решение.

Пусть b_n — n-ый член данной прогрессии, q — её знаменатель. Тогда: $b_4 = b_1 q^3$, $b_2 + b_3 = b_1 q(1+q)$. По условию, $b_4 = 36$, $b_2 + b_3 = 16 \Rightarrow$ $\begin{cases} b_1 q^3 = 36 \ (1) \\ b_1 q(1+q) = 16 \ (2). \end{cases}$ Деля уравнение (1) на уравнение (2), получаем:

$\dfrac{b_1q^3}{b_1q(1+q)} = \dfrac{36}{16}$, $\dfrac{q^2}{1+q} = \dfrac{9}{4}$, $4q^2=9(1+q)$, $4q^2-9q-9=0$. Последнее уравнение имеет корни $q = -\dfrac{3}{4}$ и $q = 3$. При $q < 0$ не выполнено условие возрастания прогрессии, при $q = 3$ имеем: $b_1 = \dfrac{36}{q^3} = \dfrac{36}{27} = \dfrac{4}{3}$, геометрическая прогрессия, в которой $b_1 = \dfrac{4}{3}$, $q = 3$ является возрастающей, т.е. при $q = 3$ все условия задачи выполнены.

Ответ: 3

17. Числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа a^2, b^2, c^2 – последовательными членами геометрической прогрессии. Какие значения может принимать отношение $c : a$?

Решение.

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии имеем: $b = \dfrac{a+c}{2}$. А согласно характеристическому свойству геометрической прогрессии – $\left(b^2\right)^2 = a^2 \cdot c^2 \Leftrightarrow \left(b^2 - ac\right)\cdot\left(b^2 + ac\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 - ac = 0 \\ b^2 + ac = 0 \end{array}\right.$ $(*)$. В силу равенства $b^2 = \dfrac{(a+c)^2}{4}$ совокупность $(*)$ равносильна совокупности: $\left[\begin{array}{l} (a+c)^2 - 4ac = 0 \\ (a+c)^2 + 4ac = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a-c)^2 = 0 \ (1) \\ c^2 + 6ac + a^2 = 0 \ (2). \end{array}\right.$ Равенство (1) выполнено лишь при $c = a$. Равенство (2) рассмотрим как квадратное уравнение относительно неизвестной c, коэффициенты которого зависят от a. Корнями этого уравнения являются $c = (-3 \pm 2\sqrt{2})a$. Таким образом, все условия задачи выполнены лишь в одном из следующих случаев: $c = a$, $c = (-3 \pm 2\sqrt{2})a \Leftrightarrow c : a = 1$, $c : a = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ: 1; $-3 \pm 2\sqrt{2}$.

19. Три различных числа a, b, c, сумма которых положительна, являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $a + b$, $b + c$, $c + a$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите отношение большего из чисел a, b, c к меньшему из этих чисел.

Решение.

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, $b = \dfrac{a+c}{2}$, а согласно характеристическому свойству геометрической прогрессии – $(b+c)^2 = (a+b)(c+a)$. Выполняя в последнее равенство подстановку $c = 2b - a$, получаем: $(3b-a)^2 = (a+b)\cdot 2b$, $a^2 - 8ab + 7b^2 = 0$,

$(a-b)(a-7b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=7b. \end{array}\right.$ Если $a=b$, то не выполнено условие того, что числа a, b, c различны. Следовательно, $a=7b$ и $c=2b-a=-5b$. При этом имеем: $a+b+c=7b+b-5b=3b$. Так как по условию $a+b+c>0$, то $b>0$, и, значит, $a=7b$ — большее из данных чисел, $c=-5b$ — меньшее из них, а искомое отношение равно $-1{,}4$.

Ответ: $-1{,}4$

5. Текстовые задачи

1. Лодка прошла 10 км по течению реки, а затем 2 км против течения, затратив на весь путь 1,5 часа. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч — собственная скорость лодки. Тогда $(v+3)$ км/ч — скорость лодки по течению, а $(v-3)$ км/ч — её скорость против течения, и по условию задачи получаем уравнение: $\frac{10}{v+3}+\frac{2}{v-3}=1{,}5$,

$\frac{10(v-3)+2(v+3)}{(v+3)(v-3)}=1{,}5$, $12v-24=1{,}5(v^2-9)$, $1{,}5v^2-12v+10{,}5=0$.

Последнее уравнение имеет корни $v=1$ и $v=7$. Значение $v=1$ не удовлетворяет смыслу задачи (имея собственную скорость 1 км/ч, лодка не смогла бы плыть против течения). Следовательно, $v=7$.

Ответ: 7 км/ч

3. Ракета типа «А» за секунду пролетает на 500 метров больше, чем ракета типа «В», и поэтому она преодолевает расстояние в 45 км на 1 секунду быстрее. Для каждой из ракет найдите время, за которое она пролетит 9000 км.

Решение.

Пусть v км/с — скорость ракеты типа «В». Тогда скорость ракеты типа «А» равна $(v+0{,}5)$ км/с, и согласно условию имеем: $\frac{45}{v}-\frac{45}{v+0{,}5}=1$,

$\frac{45\cdot 0{,}5}{v(v+0{,}5)}=1$ $(*\,2v(v+0{,}5)) \Rightarrow 45=2(v^2+0{,}5v)$, $2v^2+v-45=0$.

Последнее уравнение имеет корни $v=-5$ и $v=4{,}5$. Значение $v=-5$ не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому скорость ракеты типа «В» равна 4,5 км/с, скорость ракеты типа «А» — 5 км/с, а расстояние в 9000 км они пролетят за $\frac{9000}{4{,}5}=2000$ секунд и $\frac{9000}{5}=1800$ секунд соответственно.

Ответ: ракета типа «А» — 30 мин., ракета типа «В» — 33 мин. 20 с.

5. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 3 км, одновременно вышли два пешехода. Пешеход, шедший из пункта А, пришёл в пункт В через 12 минут после того, как повстречал пешехода, идущего из В. Пешеход, идущий из пункта В, пришёл в пункт А через 48 минут после встречи с пешеходом, идущим из А. Определите, на каком расстоянии от пункта А произошла встреча пешеходов.

Решение.

Пусть v_1 – скорость пешехода, идущего из А, v_2 – скорость пешехода, идущего из В, а t – время, прошедшее от момента выхода пешеходов до момента их встречи.

Если через С обозначить точку встречи пешеходов, см. рис. 1, то для длин участков AC и BC имеем: $AC = v_1t$, $BC = v_2t$.

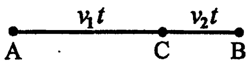


Рис. 1.

По условию, участок BC был пройден пешеходом, идущим из А, за 12 минут, а участок AC был пройден пешеходом, идущим из В, за 48 минут. Поэтому если считать, что величина t выражена в минутах, то имеем равенства: $v_1 \cdot 12 = v_2 \cdot t$, $v_2 \cdot 48 = v_1 \cdot t$. (С одной стороны, $BC = v_2t$, а с другой стороны – $BC = v_1 \cdot 12$, откуда и получается первое равенство. Второе равенство получается аналогично из рассмотрения участка АС.)

Перемножив левые и правые части указанных равенств, получим: $v_1 \cdot v_2 \cdot 12 \cdot 48 = v_1 \cdot v_2 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = 12^2 \cdot 4$, $t = 12 \cdot 2 = 24$. Подставляя $t = 24$ в равенство $v_1 \cdot 12 = v_2 \cdot t$, получаем: $v_1 \cdot 12 = v_2 \cdot 24$, $v_1 = 2v_2$. Таким образом, скорость пешехода, идущего из А, была в 2 раза больше скорости пешехода, идущего из В. Поэтому если S – расстояние, пройденное к моменту встречи пешеходом из В, то $2S$ – расстояние, пройденное к моменту встречи пешеходом из А. По условию, $AB = 3$ км, а так как $AB = AC + BC = 2S + S = 3S$, то $S = 1$ км, $AC = 2$ км. Итак, встреча произошла в 2 км от пункта А.

Ответ: 2 км.

7. При двух одновременно работающих принтерах расход бумаги составляет 1 пачку за 12 минут. Определите, за сколько минут израсходует пачку бумаги первый принтер, если известно, что он сделает это на 10 минут быстрее, чем второй.

Решение.

Пусть первый принтер расходует x листов в минуту, а второй — y. Тогда оба принтера вместе за 12 минут расходуют $12(x+y)$ листов, что по условию составляет одну пачку. Так как первый принтер израсходует пачку бумаги на 10 минут быстрее, чем второй, то справедливо равенство: $\frac{12(x+y)}{y} - 10 = \frac{12(x+y)}{x}$, $\frac{12x+2y}{y} = \frac{12(x+y)}{x}$, $(12x+2y)\cdot x = = 12(x+y)\cdot y$, $12x^2 - 10xy - 12y^2 = 0$. Деля обе части последнего равенства на $2y^2$ и совершая замену $\frac{x}{y} = t$, получаем уравнение: $6t^2 - 5t - 6 = 0$. Данное квадратное уравнение имеет корни $t = -\frac{2}{3}$ и $t = 1{,}5$. Значения $t < 0$ не удовлетворяют смыслу задачи ($x > 0, y > 0$), поэтому $t = 1{,}5$, т.е. $x = 1{,}5y$. Отсюда находим, что искомое количество минут, за которое израсходует пачку бумаги первый принтер, равно $\frac{12(x+y)}{x} = \frac{12\cdot 2{,}5y}{1{,}5y} = 20$. *Ответ:* 20

9. Работу по обновлению фасада здания первый маляр выполнит на 1 день быстрее, чем второй, и на 4 дня быстрее, чем третий. Второй и третий маляры, работая вместе, выполнят эту работу за то же время, что и первый маляр, работая один. За сколько дней выполнит эту работу первый маляр?

Решение.

Примем весь объём работы за 1. Пусть первый маляр выполняет эту работу за x дней. Тогда, по условию, второй маляр выполняет эту работу за $x+1$ день, а третий — за $x+4$ дня. Объёмы работ, выполняемых за один день первым, вторым и третьим малярами, равны соответственно $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+4}$. Из условия следует, что второй и третий маляры вместе за день выполняют такой же объём работы, как и первый, работая один. Поэтому имеем уравнение: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x}$. Решим это уравнение: $\frac{x+4+x+1}{(x+1)\cdot(x+4)} = \frac{1}{x}$, $(2x+5)\cdot x = (x+1)\cdot(x+4)$, $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: 2

11. Первый наборщик набирает за час 5 страниц текста, второй — 6 страниц, а третий — 7 страниц. Определите, по сколько страниц текста нужно отдать для набора каждому из них, если требуется, чтобы весь текст, объём которого 216 страниц, был набран как можно быстрее.

Решение.

Весь текст будет набран максимально быстро, если в работе ни одного из наборщиков не будет «простоя», т.е. все три наборщика закончат работу одновременно. Так как в сумме за час они набирают $5+6+7=18$ страниц, то на набор 216 страниц (без простоев в работе) уйдёт $\frac{216}{18}=12$ часов. Для того, чтобы каждый из наборщиков работал втечении 12 часов, необходимо первому отдать в набор $5\cdot 12=60$, второму — $6\cdot 12=72$, а третьему — $7\cdot 12=84$ страниц текста.

Ответ: 60, 72, 84

13. Влажность свежескошенной травы составила 70%. Сколько кг сена, влажность которого 20%, получится из 6 тонн этой травы?

Решение.

Так как влажность травы равна 70%, то содержание в ней «сухого вещества» (всё, кроме воды) равно 30%. Поэтому в 6 тоннах этой травы содержится $0{,}3\cdot 6=1{,}8$ тонн «сухого вещества». Влажность сена должна составить 20%, т.е. 1,8 тонн «сухого вещества» должны составить 80% массы сена. Отсюда, обозначив через x массу сена (в тоннах), имеем пропорцию: $1{,}8 - 80\%$

$x - 100\%$

По правилу пропорции находим: $x=\dfrac{1{,}8\cdot 100}{80}=2{,}25.$

Ответ: 2250 кг

15. В бидон налили 3 литра молока 8% жирности, некоторое количество молока 2% жирности и тщательно перемешали. Определите, сколько литров молока 2% жирности было налито в бидон, если известно, что жирность молока, полученного после перемешивания, составила 6%.

Решение.

Пусть было налито x литров молока 2% жирности. Тогда после перемешивания в бидоне будет содержаться $3+x$ литров молока, в котором $3\cdot 0{,}08+x\cdot 0{,}02$ «литров жира». Следовательно, жирность полученного молока составит $\dfrac{0{,}24+0{,}02x}{3+x}\cdot 100\%$, что по условию равно 6%. Отсюда получаем: $\dfrac{24+2x}{3+x}=6,\ \ 24+2x=18+6x,\ \ x=1{,}5.$

Ответ: 1,5

17. Стоимость туристической путёвки складывается из стоимости авиабилетов и стоимости проживания в отеле. В связи с тем, что авиабилеты подорожали на 30%, а проживание в отеле подорожало на 15%, стоимость путёвки увеличилась на 18%. Сколько процентов от стоимости путёвки составляла стоимость авиабилетов до подорожания?

Решение.

Пусть x — стоимость авиабилетов, y — стоимость проживания в отеле до подорожания. Тогда после подорожания стоимость авиабилетов составит $1{,}3x$, стоимость проживания в отеле — $1{,}15y$, а стоимость путёвки — $1{,}3x + 1{,}15y$. По условию, стоимость путёвки увеличилась на 18%, т.е. стала равна $1{,}18(x + y)$. Значит, имеет место следующее соотношение: $1{,}3x + 1{,}15y = 1{,}18(x + y) \Rightarrow 0{,}12x = 0{,}03y$, $4x = y$. Отсюда получаем, что до подорожания стоимость путёвки была равна $x + y = 5x$, а стоимость авиабилетов составляла $\frac{x}{5x} \cdot 100\% = 20\%$ от стоимости путёвки.

Ответ: 20

19. Магазин выставил на продажу товар с некоторой наценкой по отношению к закупочной цене. После продажи 9/10 всего товара магазин снизил назначенную цену на 30% и распродал оставшийся товар. В результате прибыль магазина составила 35,8% от закупочной цены товара. Сколько процентов от закупочной цены составляла первоначальная наценка магазина?

Решение.

Пусть c — закупочная цена товара, s — цена на товар, назначенная магазином. Количество всего товара примем за единицу. Тогда после продажи 0,9 товара магазин выручил сумму в $0{,}9s$. Так как оставшиеся 0,1 товара магазин продавал на 30% дешевле, т.е. по цене $s - 0{,}3s = 0{,}7s$, то сумма выручки за весь товар составила $0{,}9s + 0{,}1 \cdot (0{,}7s) = 0{,}97s$. Прибыль, полученная магазином, равна $0{,}97s - c$, что по условию составляет $0{,}358c$. Значит, $0{,}97s - c = 0{,}358c \Rightarrow s = \frac{1{,}358c}{0{,}97} = 1{,}4c$. Следовательно, первоначальная наценка магазина равна $s - c = 0{,}4c$ и составляет 40% от закупочной цены.

Ответ: 40

6. Уравнения и неравенства с параметром

1. Найдите все значения a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 15x + 3a - 1 = 0$ являются целыми числами, а их произведение положительно и не больше 30.

Решение.

Предположим, что n, m – корни уравнения $x^2 - 15x + 3a - 1 = 0$ и выполнены все условия задачи, т.е. $n, m \in Z$, $0 < n \cdot m \leqslant 30$. Тогда по теореме Виетта имеем: $n + m = 15$, $n \cdot m = 3a - 1$. Так как $n \cdot m > 0$, то числа n, m одного знака, а поскольку $n + m > 0$, то оба числа n, m положительны. Число 15 может быть представлено в виде суммы двух целых положительных чисел одним из следующих способов: $1+14$, $2+13$, $3+12$, $4 + 11$, $5 + 10$, $6 + 9$, $7 + 8$. Можно считать (без ограничения общности), что n – меньшее из чисел в указанных парах, а m – большее.

Легко видеть, что $n \cdot m \leqslant 30$ только для двух из перечисленных выше пар чисел: $n = 1, m = 14$ и $n = 2, m = 13$.

При $n = 1, m = 14$ имеем: $n \cdot m = 14$, $3a - 1 = 14$, $a = 5$.

При $n = 2, m = 13$ имеем: $n \cdot m = 26$, $3a - 1 = 26$, $a = 9$.

Ответ: $a = 5, a = 9$.

3. Найдите все значения a, при которых неравенство $ax^2 + (5a + 22)x + 9a \geqslant 0$ имеет ровно одно решение.

Решение.

Данное неравенство имеет ровно одно решение только в том случае, если ветви параболы $y = ax^2 + (5a + 22)x + 9a$ направлены вниз и эта парабола имеет ровно одну общую точку с осью Ox. А эти два условия, в свою очередь, равносильны условиям: $a < 0$ и $D = (5a + 22)^2 - 36a^2 = 0$. Воспользовавшись формулой разности квадратов, получим:

$D = (5a + 22 - 6a) \cdot (5a + 22 + 6a)$. Поэтому $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 22 \\ a = -2. \end{array}\right.$

Из корней уравнения $D = 0$ условию $a < 0$ удовлетворяет лишь $a = -2$.

Ответ: -2

5. Найдите все значения a, при которых уравнение $8x^2 - 6ax + a^2 = 0$ имеет два корня, один из которых больше 0,5, а другой меньше 0,5.

Решение.

Ветви параболы $y = 8x^2 - 6ax + a^2$ направлены вверх, поэтому эта парабола пересекает ось Ox в двух точках, одна из которых лежит правее, а другая – левее точки $x = 0{,}5$, только в том случае, если $y(0{,}5) < 0$, см. рисунок 2. Далее, $y(0{,}5) = 8 \cdot (0{,}5)^2 - 6a \cdot 0{,}5 + a^2 = a^2 - 3a + 2 =$
$= (a - 1)(a - 2)$, $(a - 1)(a - 2) < 0 \Leftrightarrow a \in (1; 2)$.

Ответ: $a \in (1; 2)$

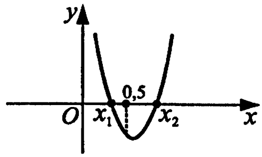


Рис. 2.

7. Найдите все значения a, при которых неравенство
$x^2 + \frac{1}{x^2} - a + 2 \leqslant 0$ имеет не менее трёх целых решений.

Решение.

Заметим, что $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, поэтому данное неравенство преобразуется к виду: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \leqslant a$ $(*)$. Если неравенство $(*)$ имеет не менее трёх целых решений, то $x = 2$ должно являться его решением, т.е. $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant a$. В самом деле, если $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 > a$, то при $|x| > 3$ тем более $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 > a$, и целыми решениями $(*)$ могут быть лишь $x = \pm 1$.
Легко видеть, что при всех $a \geqslant 2{,}5^2$ неравенство $(*)$ действительно имеет не менее трёх целых решений: $x = \pm 1, x = \pm 2$ удовлетворяют неравенству $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \leqslant 6{,}25 \leqslant a$.

Ответ: $[6{,}25; +\infty)$

9. Найдите все значения a, при которых уравнение
$|x^2 + 2x - 3| = 4a - 2$ имеет не менее трёх различных корней.

Решение.

Данное уравнение имеет не менее трёх различных корней $\Leftrightarrow$ прямая $y = 4a - 2$ пересекает график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$ не менее чем в трёх различных точках. График функции $y = |x^2 + 2x - 3|$ изображён на рисунке 3. Из этого рисунка следует, что искомыми являются те значения a, которые удовлетворяют неравенствам: $0 < 4a - 2 \leqslant 4 \Leftrightarrow 2 < 4a \leqslant 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0{,}5 < a \leqslant 1{,}5$.

Ответ: $a \in (0{,}5; 1{,}5]$

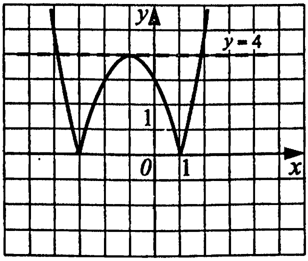


Рис. 3.

11*. Найдите все значения a, при каждом из которых существует прямая, параллельная оси абсцисс и имеющая чётное число общих точек с графиком функции $f(x)=(4a+3)x-(x+6)\cdot|x-a|$.

Решение.

1) Так как $(x+6)\cdot(x-a)=x^2+(6-a)x-6a$, то раскрывая знак модуля в выражении $(4a+3)x-(x+6)\cdot|x-a|$, получим, что

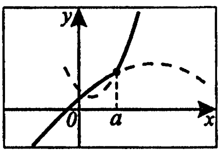
$$f(x)=\begin{cases} x^2+(3a+9)x-6a, & \text{при } x\leqslant a; \\ -x^2+(5a-3)x+6a, & \text{при } x\geqslant a. \end{cases}$$

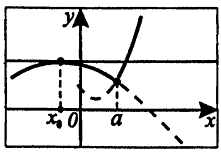
Для каждого значения a имеются лишь две взаимоисключающие возможности:

а) каждая из функций $y=x^2+(3a+9)x-6a$ и $y=-x^2+(5a-3)x+6a$ монотонна на том участке, где она совпадает с функцией $y=f(x)$.

б) хотя бы одна из функций $y=x^2+(3a+9)x-6a$ и $y=-x^2+(5a-3)x+6a$ не является монотонной на том участке, где она совпадает с функцией $y=f(x)$.

На рис. а), б) изображён график $y=f(x)$ в каждом из этих случаев.

а) 

б) 

Как легко видеть из этих рисунков, требуемое в задаче условие — «для функции $f(x)$ существует прямая, параллельная оси абсцисс и имеющая чётное число точек с графиком $y=f(x)$» выполнено в том и только том случае, если реализуется случай б) (в случае а) любая прямая, параллельная оси абсцисс пересекает график $y = f(x)$ лишь в одной точке, а в случае б) прямая $y = f(x_0)$, где x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, имеет с графиком $y = f(x)$ ровно две общие точки).

Отсюда следует, что значение a является искомым $\Leftrightarrow$ либо вершина параболы $y = x^2 + (3a+9)x - 6a$ расположена левее точки $x = a$, либо вершина параболы $y = -x^2 + (5a-3)x + 6a$ расположена правее точки $x = a$.

2) Вершиной параболы $y = x^2 + (3a+9)x - 6a$ является точка $x = -\dfrac{3a+9}{2}$, а вершиной параболы $y = -x^2 + (5a-3)x + 6a$ — точка $x = \dfrac{5a-3}{2}$. Таким образом, искомыми значениями a являются решения совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{3a+9}{2} < a \\ \dfrac{5a-3}{2} > a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3a-9 < 2a \\ 5a-3 > 2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5a > -9 \\ 3a > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow a > -1{,}8.$$

Ответ: $a > -1{,}8$

Примечание. Задача, аналогичная рассмотренной выше (отличающаяся от данной задачи лишь «цифрами»), предлагалась выпускникам 11-го класса на ЕГЭ по математике, проходившем в июне 2010 года, в качестве задания С5. В наш сборник эта задача включена для того, чтобы с одной стороны — показать учащимся 9 класса существенное усложнение заданий ЕГЭ по сравнению с заданиями ГИА, а с другой стороны — продемонстрировать, что уже имеющегося у них багажа знаний вполне достаточно для того, чтобы решать некоторые из заданий части С единого государственного экзамена по математике.

13*. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $y + 5x \geqslant 3a$ и $y - 3x \geqslant -5a$ являются решениями неравенства $y + 2ax > x + 2a - 2$.

Решение.

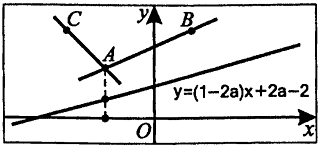
Сформулируем вопрос задачи в следующем виде (равносильном исходному): найдите все значения a, при каждом из которых все решения системы неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant -5x + 3a, & (1) \\ y \geqslant 3x - 5a, & (2) \end{cases}$$

удовлетворяют неравенству $y > (1-2a)x + 2a - 2$ (3). Данную задачу будем решать графически.

1) На рисунке 1 в координатной плоскости Oxy изображены прямые $y = -5x + 3a$, $y = 3x - 5a$ и $y = (1 - 2a)x + 2a - 2$.

рис.1



Очевидно, что решением системы неравенств (1), (2) является множество точек плоскости Oxy, расположенных внутри угла CAB (включая стороны этого угла), а решением неравенства (3) является множество точек, расположенных в верхней из двух полуплоскостей, на которые плоскость Oxy делится прямой $y = (1 - 2a)x + 2a - 2$.

Все решения системы неравенств (1),(2) удовлетворяют неравенству (3) $\Leftrightarrow$ множество точек, которое является решением системы неравенств (1), (2), содержится внутри множества точек, являющегося решением неравенства (3) $\Leftrightarrow$ выполнены два условия:

1) точка A расположена выше прямой $y = (1 - 2a)x + 2a - 2$;

2) прямая $y = (1 - 2a)x + 2a - 2$ не имеет общих точек с лучами AB и AC (именно так это изображено на рисунке 1).

Переведём сформулированные выше геометрические условия, при которых выполнено требование задачи, на алгебраический язык.

1) Точка A – это точка пересечения прямых $y = 3x - 5a$ и $y = -5x + 3a$. Поэтому координаты точки A – это решение системы уравнений

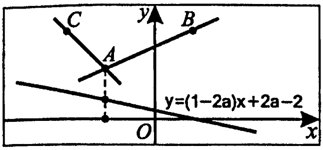
$$\begin{cases} y = 3x - 5a, \\ y = -5x + 3a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3a = 3x - 5a, \\ y = -5x + 3a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ y = -2a. \end{cases}$$

Точка $A(a; -2a)$ расположена выше прямой $y = (1-2a)x + 2a - 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -2a > (1 - 2a)a + 2a - 2$, $2a^2 - 5a + 2 > 0$ (при подстановке в уравнение прямой абсциссы точки A, т.е. $x = a$, мы должны получить значение меньшее, чем ордината точки A). Решив неравенство $2a^2 - 5a + 2 > 0$ методом интервалов, получаем, что значения a, при которых точка A лежит не ниже прямой $y = (1 - 2a)x + 2a - 2$, это $a \in (-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$.

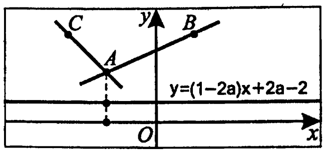
2) Заметим, что угловой коэффициент прямой AB положителен, а угловой коэффициент прямой AC отрицателен. Поэтому если точка A лежит выше прямой $y = (1 - 2a)x + 2a - 2$, то эта прямая не пересекает лучи AB и AC в одном из следующих случаев: либо угловой коэффициент этой прямой положителен и не больше углового коэффициента пря-

мой AB, либо угловой коэффициент этой прямой отрицателен и не меньше углового коэффициента прямой AC, либо угловой коэффициент этой прямой равен нулю. На рисунке 1 изображён первый из этих случаев, а на рисунках 2а) и 2б) — второй и третий случаи.

2 а)



2б)



Так как угловой коэффициент прямой AB равен 3, угловой коэффициент прямой AC равен -5, а угловой коэффициент прямой $y = (1-2a)x + +2a - 2$ равен $1 - 2a$, то сформулированные выше условия равносильны следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 1-2a \leqslant 3 \\ -5 \leqslant 1-2a < 0 \\ 1-2a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leqslant a < 0{,}5 \\ 0{,}5 < a \leqslant 3 \\ a = 0{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \in [-1; 3].$$

Пересекая множества $a \in (-\infty; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$ и $a \in [-1; 3]$, получаем ответ: $a \in [-1; 0{,}5) \cup (2; 3]$.

Ответ: $a \in [-1; 0{,}5) \cup (2; 3]$

15*. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (6-4a)x + 3a^2 \leqslant 27$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 12 + a) \geqslant 0$.

Решение.

1) Заметим, что ровно одно решение неравенства $x^2 + (6-4a)x + 3a^2 \leqslant 27$ удовлетворяет неравенству $ax(x-12+a) \geqslant 0$ $\Leftrightarrow$ система $\begin{cases} x^2 + (6-4a)x + 3a^2 \leqslant 27 \ (1), \\ ax(x-12+a) \geqslant 0 \ (2). \end{cases}$ имеет ровно одно решение (проверка равносильности этих утверждений очевидна в обе стороны).

Поэтому искомыми значениями a являются те, для которых система неравенств (1), (2) имеет единственное решение.

2) Чтобы преобразовать неравенство (1), найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 + (6-4a)x + 3a^2 - 27$: $D = (6-4a)^2 - 4(3a^2 - 27) = = 4a^2 - 48a + 144 = 4(a-6)^2$, $x_{1,2} = \dfrac{4a - 6 \pm 2(a-6)}{2}$, $x_1 = 3a - 9$, $x_2 = a + 3$. Значит, $x^2 + (6-4a)x + 3a^2 - 27 = \big(x - (3a-9)\big)\cdot\big(x - (a+3)\big)$.

Отсюда, согласно методу интервалов, решением неравенства (1) является либо отрезок $[3a-9; a+3]$, если $3a-9 < a+3$, $a < 6$, либо отрезок $[a+3; 3a-9]$, если $a > 6$, либо единственная точка $x = a+3$, если $a = 6$. При $a = 6$ неравенство (2) принимает вид $6x(x-6) \geqslant 0$, и поскольку $x = a+3 = 9$ удовлетворяет этому неравенству, то $a = 6$ — одно из искомых значений параметра a.

Согласно методу интервалов, при $a > 0$ решением неравенства (2) является объединение двух промежутков: либо $(-\infty; 12-a]$ и $[0; +\infty)$, если $12-a \leqslant 0$, либо $(-\infty; 0]$ и $[12-a; +\infty)$, если $12-a \geqslant 0$. А при $a < 0$ решением неравенства (2) является отрезок $[0; 12-a]$. Поэтому далее положительные и отрицательные значения a исследуем отдельно. (При $a = 0$ решением неравенства (2) является вся числовая ось, а решением системы неравенств (1), (2) — отрезок $[-9; 3]$, т.е $a = 0$ не является искомым).

3) Пусть $a > 0$, $a \neq 6$. Очевидно, что отрезок $[3a-9; a+3]$ или отрезок $[a+3; 3a-9]$ могут иметь ровно одну общую точку с объединением промежутков $(-\infty; 12-a]$ и $[0; +\infty)$ или объединением промежутков $(-\infty; 0]$ и $[12-a; +\infty)$ только в одном из следующих четырёх случаев: $a+3 = 0$, $a = -3$; $a+3 = 12-a$, $a = 4{,}5$; $3a-9 = 0$, $a = 3$; $3a-9 = 12-a$, $a = 5{,}25$ (граничная точка отрезка должна совпадать с граничной точкой одного из промежутков). Значение $a = -3$ не входит в рассматриваемый случай ($a > 0$). Проверим выполнение условия задачи для остальных значений a: $a = 3$, $a = 4{,}5$, $a = 5{,}25$. Если $a = 3$, то решением неравенства (1) являются $x \in [0; 6]$, а решением неравенства (2) $x \in (-\infty; 0] \cup [9; +\infty)$, т.е. решением системы неравенств (1), (2) является единственная точка $x = 0$, и $a = 3$ принадлежит к искомым значениям параметра. Если $a = 4{,}5$, то решением неравенства (1) являются $x \in [4{,}5; 7{,}5]$, а решением неравенства (2) $x \in (-\infty; 0] \cup [7{,}5; +\infty)$, т.е. решением системы неравенств (1), (2) является единственная точка $x = 7{,}5$, и $a = 4{,}5$ принадлежит к искомым значениям параметра. Если $a = 5{,}25$, то решением неравенства (1) являются $x \in [6{,}75; 8{,}25]$, а решением неравенства (2) $x \in (-\infty; 0] \cup [6{,}75; +\infty)$, т.е. решением системы неравенств (1), (2) является отрезок $[6{,}75; 8{,}25]$, и $a = 5{,}25$ не входит в искомые значения параметра. Итак, среди положительных значений a искомыми являются $a = 3$, $a = 4{,}5$ и $a = 6$ ($a = 6$ найдено в пункте 2). Остаётся лишь исследовать значения $a < 0$.

4) Если $a < 0$, то $3a-9 < a+3$ и решением неравенства (1) являются $x \in [3a-9; a+3]$, а решением неравенства (2) $x \in (-\infty; 0] \cup [12-a; +\infty)$.

Множества $[3a-9; a+3]$ и $(-\infty; 0] \cup [12-a; +\infty)$ могут иметь ровно одну общую точку в одном из двух случаев: $a+3=0$, $a=-3$ или $3a-9=12-a$, $a=5{,}25$. Легко видеть, что при $a=-3$ эти множества действительно имеют ровно одну общую точку ($x=0$), т.е. $a=-3$ принадлежит к искомым значениям параметра. Значение $a=5{,}25$ не входит в рассматриваемый случай ($a<0$). Итак, среди отрицательных значений a искомым является лишь $a=-3$.

Ответ: $a \in \{-3;\ 3;\ 4{,}5;\ 6\}$

Примечание. Задача, похожая на рассмотренную выше, предлагалась в качестве задания С5 на досрочном ЕГЭ по математике, проходившем в апреле 2010 года.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Под редакцией Мальцева Дмитрия Александровича

Алгебра 9 класс. Решебник

Итоговая аттестация 2011

Художественное оформление,
разработка серии: *Е. Пономарёва*
Компьютерная вёрстка: *В. Соболев*
Корректор: *Н. Абрамова*

Подписано в печать с оригинал-макета 25.10.2010.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,5. Тираж 3000 экз. Заказ № 3065-10.

ИП «Мальцев Д. А.»
Свидетельство № 307616811500042 от 25.04.2007 г.
Тел.: (863) 221-35-73. www.afina-r.ru

ООО «НИИ школьных технологий»
109202, Москва, ш-се Фрезер, д.17
Тел./факс: (495) 345-52-00. market@narodnoe.org

Отпечатано с оригинал-макета в типографии ЗАОр «НПП Джангар»
358000, г. Элиста, ул. Ленина, 245