НОВАЯ РЕДАКЦИЯ

Серия РЕШЕБНИК

ТОЛЬКО ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

Решение задач ГИА по алгебре

ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ИСПРАВЛЕННОЕ

9

«АЛГЕБРА: СБОРНИК ЗАДАНИЙ для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе»

Л.В. Кузнецова и др.

И.Н. Громова

Решение задач ГИА по алгебре

к учебному изданию
«Алгебра: сб. заданий для подгот.
к гос. итоговой аттестации в 9 кл. /
[Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова,
Е.А. Бунимович и др.]. — 6-е изд. —
М.: Просвещение, 2011»

*Издание шестое,
переработанное и исправленное*

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2012

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21я72
Г87

Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Изображение издания «Алгебра: сб. заданий для подгот. к гос. итоговой аттестации в 9 кл. / [Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. — 6-е изд. — М.: Просвещение, 2011» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Громова, И.Н.

Г87 Решение задач ГИА по алгебре к учебному изданию Л.В. Кузнецовой и др. «Алгебра: сб. заданий для подгот. к гос. итоговой аттестации в 9 кл.» / И.Н. Громова. — 6-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 222, [2] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-04731-5

Предлагаемое пособие содержит подробное решение всех задач из учебного издания «Алгебра: сб. заданий для подгот. к гос. итоговой аттестации в 9 кл. / [Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. — 6-е изд. — М.: Просвещение, 2011».

Пособие адресовано родителям для проверки уровня готовности ученика к экзамену.

УДК 372.8:512
ББК 74.262.21я72

Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс».
Бумага газетная. Уч. изд. л. 7,01. Усл. печ. л. 11,76.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 11037(2)

ISBN 978-5-377-04731-5

Содержание

Раздел I. Первая часть экзаменационной работы. Тренировочные варианты

Работа № 1

Вариант 1

1. $x=-\frac{4}{9}$; $\sqrt{2\left(-\frac{4}{9}\right)+1}=\sqrt{-\frac{8}{9}+1}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$. **Ответ**: В.

2. $N=\frac{A}{t}$; $A=Nt$. **Ответ**: Г.

3. $0<a<1$, сравните a^2 и a^3.

Составим разность $a^2-a^3=a^2(1-a)>0$, $a^2>a^3$.
Ответ: Б.

4. $2{,}5\cdot10^{-5}$ см $=2{,}5\cdot10^{-5}\cdot10$ мм $=25\cdot10^{-5}$ мм $=0{,}00025$ мм
Ответ: В.

5. Пусть в каждой библиотеке было x книг. Через год в I библиотеке стало $x+0{,}5x=1{,}5x$ книг. Через год во II библиотеке стало $2x$ книг. $2x>1{,}5x$. **Ответ**: Б.

6. $(a-4)^2-2a(3a-4)=a^2-8a+16-6a^2+8a=16-5a^2$.
Ответ: А.

7. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{5}{48}}$; $\frac{\sqrt{15}}{12}=\sqrt{\frac{15}{144}}=\sqrt{\frac{5}{48}}$; $\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{5}{48}}$; $\frac{\sqrt{5}}{8}\neq\sqrt{\frac{5}{48}}$. **Ответ**: Г.

8. $\frac{a^2+3a}{9-a^2}=\frac{a(a+3)}{(3-a)(3+a)}=\frac{a}{3-a}$. **Ответ**: $\frac{a}{3-a}$.

9. $3x^2+x=0$, $x(3x+1)=0$, $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

10. $\begin{cases}2x+3y=-12\\4x-6y=0\end{cases}\Bigg|\,2$; $\begin{cases}4x+6y=-24\\4x-6y=0\end{cases}$;

$\begin{cases}8x=-24\\4x-6y=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=-3\\-12=6y\end{cases}$; $\begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$. **Ответ**: $(-3;-2)$.

11[1]. $\begin{array}{l|l|l} v_1 = 15 \text{ км/ч} & t_1 = x \text{ ч} & S_1 = 15x \text{ (км)} \\ v_2 = 10 \text{ км/ч} & t_2 = (1-x) \text{ ч} & S_2 = 10(1-x) \text{ (км)} \end{array}$;

$S_1 = S_2$; $15x = 10(1-x)$.

Ответ: А.

12. $8x - 2 > 10x + 1$;

$8x - 10x > 1 + 2$; $-2x > 3$;

$x < -1{,}5$

Ответ: Б.

13. $y = x^2-x-6$; $x^2-x-6 > 0$; $x < -2$; $x > 3$. **Ответ**: $x < -2$; $x > 3$.

14. (b_n) — геометрическая прогрессия; $b_1 = 64$; $q = -\dfrac{1}{2}$;

$b_2 = -32$; $b_3 = 16$; $b_4 = -8$; $b_5 = 4$; $b_6 = -2$; $b_7 = 1$.

А. $-32 < 16$ верно — В. $-8 > -2$ неверно

Б. $16 > -8$ верно — Г. $4 > 1$ верно.

Ответ: В.

15. а) $y = 2x$

x	0	1
y	0	2

Рисунок 3

б) $y = -2x - 3$

x	0	−1
y	−3	−1

Рисунок 4

в) $y = -2x$

x	0	1
y	0	−2

Рисунок 2

г) $y = 2x - 3$

x	0	1
y	−3	−1

Рисунок 1

Ответ:

1	2	3	4
Г	В	А	Б

16. $v = \dfrac{S}{t}$

S км	t ч	v км/ч
$AB = 4$	1	4
$BC = 3$	1,5	2
$CD = 2$	2	1
$DE = 3$	1,5	2

Ответ: А.

---

[1] В данном пособии мы не записываем в текстах решений ограничения на значения переменных, следующие из условий задачи.

Вариант 2

1. $\sqrt{1+3\cdot(-0,17)}=\sqrt{1-0,51}=\sqrt{0,49}=0,7$. **Ответ**: Б.

2. $c=\dfrac{C}{M}$; $M=\dfrac{C}{c}$ **Ответ**: В.

3. $0 < a < 1$. Составим разность $a-a^2=a(1-a)>0$, $a>a^2$.
Ответ: А.

4. $2\cdot10^{-4}$ см $=2\cdot10^{-4}\cdot10$ мм $=2\cdot10^{-3}$ мм $=2\cdot0,001$ мм $=0,002$ мм
Ответ: Б.

5. Пусть в каждой библиотеке было по x книг. Через год в 1-й библиотеке стало $x+\dfrac{x}{2}=1,5x$ книг, а во 2-й стало $1,5x$ книг. Книг стало поровну. **Ответ**: В.

6. $(c+5)^2-c(10-3c)=c^2+10c+25-10c+3c^2=4c^2+25$.
Ответ: Г.

7. $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{4}{45}}$; $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{4}{45}}$; $\dfrac{4}{3\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{16}{45}}\neq\sqrt{\dfrac{4}{45}}$;

$\dfrac{2\sqrt{5}}{15}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{4}{45}}$. **Ответ**: В.

8. $\dfrac{3a^2-6a}{a^2-4}=\dfrac{3a(a-2)}{(a-2)(a+2)}=\dfrac{3a}{a+2}$. **Ответ**: $\dfrac{3a}{a+2}$.

9. $3x-x^2=0$, $x(3-x)=0$, $x_1=0$, $x_2=3$.
Ответ: $x_1=0$; $x_2=3$.

10. $\begin{cases}4x-10y=0\\3x+5y=25\end{cases}\Big|\,2$ $\begin{cases}4x-10y=0\\6x+10y=50\end{cases}$ $\begin{cases}10x=50\\4x-10y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$

Ответ: (5; 2).

11. $\begin{array}{l|l|l}v_1=15\text{ км/ч} & t_1=(3-x)\text{ ч} & S_1=15(3-x)\text{ (км)}\\ v_2=12\text{ км/ч} & t_2=x\text{ ч} & S_2=12x\text{ (км)}\end{array}$ $S_1=S_2$

$15(3-x)=12x$.

Ответ: А.

12. $3x-4<7x-2$;
$3x-7x<-2+4$;
$-4x<2$;
$x>-0,5$

Ответ: Г.

13. $y = x^2 + x - 6$; $x^2 + x - 6 < 0$; $-3 < x < 2$. **Ответ**: $-3 < x < 2$.

14. $b_1 = 81$; $q = -\frac{1}{3}$; $b_2 = -27$; $b_3 = 9$; $b_4 = -3$; $b_5 = 1$;

$b_6 = -\frac{1}{3}$; $b_7 = \frac{1}{9}$

А. $-27 < 9$ верно

Б. $-3 > -\frac{1}{3}$ неверно

В. $9 > -3$ верно

Г. $1 > \frac{1}{9}$ верно

Ответ: Б.

15.

а) $y = 3x$

x	0	1
y	0	3

Рисунок 3

б) $y = -3x - 2$

x	0	–1
y	–2	1

Рисунок 1

в) $y = -3x$

x	0	1
y	0	–3

Рисунок 2

г) $y = 3x - 2$

x	0	1
y	–2	1

Рисунок 4

Ответ:

1	2	3	4
Б	В	А	Г

16.

S км	t ч	v км/ч
$AB = 3$	2	1,5
$BC = 3$	0,5	6
$CD = 2$	1	2
$DE = 4$	1	4

Ответ: А.

Работа № 2

Вариант 1

1. $\frac{\sqrt{0,04}-1}{\sqrt{0,25}} = \frac{0,2-1}{0,5} = -\frac{0,8}{0,5} = -\frac{8}{5} = -1,6$. **Ответ**: $-1,6$.

2. $Q = cm(t_2 - t_1)$; $t_2 - t_1 = \frac{Q}{cm}$; $t_2 = \frac{Q}{cm} + t_1$. **Ответ**: $t_1 + \frac{Q}{cm}$.

3. Б. $-x > -y$ (верно) **Ответ**: Б.

4. $\sqrt{4000} = \sqrt{400 \cdot 10} = 20\sqrt{10}$ — иррациональное число

$\sqrt{400} = 20$ — рациональное число

$\sqrt{0,04} = 0,2 = \frac{1}{5}$ — рациональное число

Ответ: А.

5. 6500 р. — стоимость машины. 5% от 6500 составляет $6500:100\cdot5 = 325$ р. $6500-325 = 6175$ р.

Ответ: В.

6. $4x^2-6xy = -2x(-2x + 3y)$

Ответ: В.

7. $\left(m^{-6}\right)^{-2}\cdot m^{-14} = m^{12}\cdot m^{-14} = m^{-2}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$.

Ответ: Г.

8. $\frac{15a^2}{3a-2} - 5a = \frac{15a^2 - 15a^2 + 10a}{3a-2} = \frac{10a}{3a-2}$

Ответ: $\frac{10a}{3a-2}$.

9. $3(2 + 1{,}5x) = 0{,}5x + 24$; $6 + 4{,}5x-0{,}5x = 24$; $4x = 18$; $x = 4{,}5$.

Ответ: $x = 4{,}5$.

10. Нет решений. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$. **Ответ**: А.

11.

$v_1 = x$ км/ч	$S_1 = 20$ км	$t_1 = \frac{20}{x}$ ч
$v_2 = (x-3)$ км/ч	$S_2 = 20$ км	$t_2 = \frac{20}{x-3}$ ч

$t_2 > t_1$ на $\frac{1}{3}$ ч. $\frac{20}{x-3} - \frac{20}{x} = \frac{1}{3}$

Ответ: Б.

12.

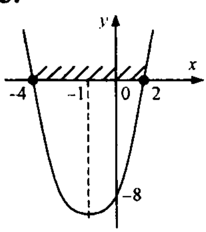
1) $xy > 200$ верно при $x > 10$; $y > 20$

2) $xy > 100$ верно при $x > 10$; $y > 20$

3) $xy > 400$ верно не при любых x и y

Ответ: А.

13.



$x^2 + 2x - 8 \le 0$;
$x_1 = -4$;
$x_2 = 2$.

Ответ: $-4 \le x \le 2$.

14. 3; 6; 9; 12 ...

$d = a_2 - a_1$; $d = 3$; $a_n = a_1 + d(n-1)$

А. $3 + 3(n-1) = 83$; $3(n-1) = 80$

$n - 1 = \dfrac{80}{3}$; $n = 1 + \dfrac{80}{3} = \dfrac{83}{3}$

Б. $3 + 3(n-1) = 95$; $3(n-1) = 92$

$n - 1 = \dfrac{92}{3}$; $n = \dfrac{92}{3} + 1 = \dfrac{95}{3}$

В. $3 + 3(n-1) = 100$; $3(n-1) = 97$

$n - 1 = \dfrac{97}{3}$; $n = \dfrac{97}{3} + 1 = \dfrac{100}{3}$

Г. $3 + 3(n-1) = 102$

$3(n-1) = 99$; $n-1 = 33$; $n = 34$.

$34 \in \mathbb{N}$

Ответ: Г.

15. $y = kx + b$

а) $k > 0$, $b > 0$; прямая образует острый угол с положительным направлением оси OX. Прямая пересекает OY в точке $(0, b)$. Рис. 3.

б) $k > 0$, $b < 0$

в) $k < 0$, $b > 0$; прямая образует тупой угол с положительным направлением оси OX.

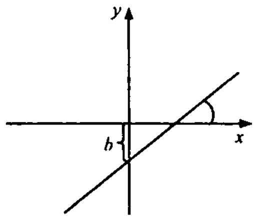


Рис. 1.

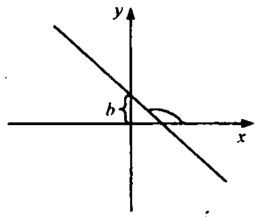


Рис. 2.

Ответ: а) $\to$ 3) б) $\to$ 1) в) $\to$ 2).

16. Первому условию задачи соответствует на графике горизонтальный отрезок длиной 2. В совокупности туристы прошли двойное расстояние от базы до озера. **Ответ:** В.

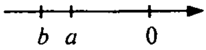
Вариант 2

1. $\dfrac{1}{\sqrt{0,16}} - \sqrt{0,81} = \dfrac{1}{0,4} - 0,9 = \dfrac{1 - 0,36}{0,4} = \dfrac{0,64}{0,4} = \dfrac{6,4}{4} = 1,6$

Ответ: 1,6.

2. $Q = cm(t_2 - t_1)$; $t_2 - t_1 = \dfrac{Q}{cm}$; $t_1 = t_2 - \dfrac{Q}{cm}$.

Ответ: $t_1 = t_2 - \dfrac{Q}{cm}$.

3. 

$a > b$ (1), умножим обе части неравенства (1) на -1; $-a < -b$.
Ответ: А.

4. $\sqrt{9000} = \sqrt{900 \cdot 10} = 30\sqrt{10}$ — иррациональное число

$\sqrt{900} = 30$ — рациональное число

$\sqrt{0,009} = \sqrt{9 \cdot 10^{-3}} = 0,3\sqrt{\frac{1}{10}}$ — иррациональное число

Ответ: Б.

5. 800 р. — плата за коммунальные услуги. 6% от 800 р. составляет 800:100·6 = 48 (р). 800 + 48 = 848 (р) — плата за коммунальные услуги после подорожания. **Ответ**: Г.

6. $9xy - 6y^2 = -3y(-3x + 2y)$. **Ответ**: Б.

7. $\frac{x^{-15}}{\left(x^3\right)^{-4}} = \frac{x^{-15}}{x^{-12}} = x^{-15+12} = x^{-3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$. **Ответ**: Б.

8. $\frac{2x^2}{x-8} - 2x = \frac{2x^2 - 2x^2 + 16x}{x-8} = \frac{16x}{x-8}$. **Ответ**: $\frac{16x}{x-8}$.

9. $2x - 5,5 = 3(2x - 1,5)$; $2x - 5,5 = 6x - 4,5$;

$6x - 2x = -5,5 + 4,5$; $4x = -1$; $x = -\frac{1}{4}$. **Ответ**: $x = -\frac{1}{4}$.

10. Две точки пересечения имеют парабола $y = 1 - x^2$ и прямая $y + 10 = 0$. $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y + 10 = 0 \end{cases}$

Ответ: В.

11. $v_1 = x$ км/ч $v_2 = (x-1)$ км/ч	$S_1 = 5$ км $S_2 = 5$ км	$t_1 = \frac{5}{x}$ ч $t_2 = \frac{5}{x-1}$ ч	$t_2 > t_1$ на $\frac{1}{4}$ ч.

$\frac{5}{x-1} - \frac{5}{x} = \frac{1}{4}$. **Ответ**: А.

12. 1) $x + y < 25$ не является верным при любых значениях x и y, удовлетворяющих условию $x < 10$, $y < 20$. 2) $x + y < 30$ верно при $x < 10$, $y < 20$

2) $x + y < 40$ верно при $x < 10$, $y < 20$. **Ответ**: В.

13.

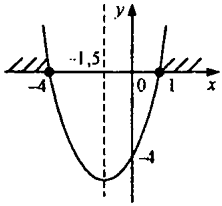
$x^2 + 3x - 4 \geq 0$

$\begin{cases} x_1x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$

$x_1 = -4;$

$x_2 = 1$

Ответ: $x \leq -4;\ x \geq 1$.



14. $d = 12-6 = 6$; $a_n = a_1 + d(n-1)$

А. $6 + 6(n-1) = 303$; $6(n-1) = 297$; $n-1 = \dfrac{297}{6}$; $n = \dfrac{297}{6} + 1 = 50{,}5$

Б. $6 + 6(n-1) = 109$; $6(n-1) = 103$; $n-1 = \dfrac{103}{6}$; $n = \dfrac{103}{6} + 1 = \dfrac{109}{6}$.

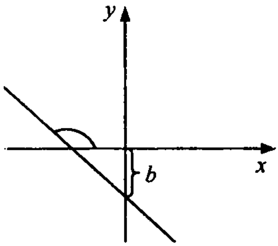
В. $6 + 6(n-1) = 106$; $6(n-1) = 100$; $n = \dfrac{50}{3} + 1 = \dfrac{53}{3}$.

Г. $6 + 6(n-1) = 96$; $1 + n-1 = 16$; $n = 16$; $16 \in \mathbb{N}$.

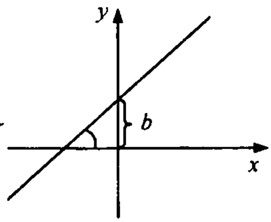
Ответ: Г.

15. $y = kx + b$

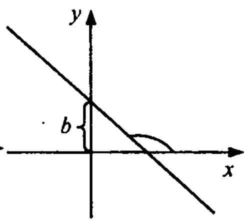
1)



2)



3)



$k < 0$, $b < 0$; соотв. в) $k > 0$, $b > 0$; соотв. а) $k < 0$, $b > 0$; соотв. б)

Ответ: а) $\to$ 2) б) $\to$ 3) в) $\to$ 1)

16. Путь, пройденный от турбазы до озера равен обратному пути. В середине была остановка (горизонтальный участок графика).

Ответ: Б.

Работа № 3

Вариант 1

1. 1 т = 1000 кг = 10^3 кг; 1 млн. = 10^6. $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг =

= $7{,}35 \cdot 10^{22} : (10^3 \cdot 10^6)$ (млн. т) = $7{,}35 \cdot 10^{22} : 10^9$ (млн. т) =

= $7{,}35 \cdot 10^{13}$ (млн т). **Ответ**: Б.

2. $180 : 100 \cdot 120 = 18 \cdot 12 = 216$ **Ответ**: В.

3.

$\sqrt{25} < \sqrt{27} < \sqrt{36}$ $\quad$ $\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$ $\quad$ $\sqrt{36} < \sqrt{39} < \sqrt{49}$

$5 < \sqrt{27} < 6$; $\quad$ $3 < \sqrt{12} < 4$; $\quad$ $6 < \sqrt{39} < 7$;

$P\left(\sqrt{27}\right)$ $\quad$ $M\left(\sqrt{12}\right)$ $\quad$ $Q\left(\sqrt{39}\right)$

Ответ: 1 — P, 2 — M, 3 — Q.

4. $S = vt + 5t^2$; $t = 3$ с; $v = 7$ м/с

1) $S_1 = 7\cdot 3 + 5\cdot 9 = 66$ (м) $\quad$ 2) $h = 80-66 = 14$ (м)

Ответ: 14 м.

5. При $x = 2$ и $x = 3$ не имеет смысла выражение $\dfrac{3}{(x-2)(x-3)}$.

Ответ: В.

6. $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)\cdot\dfrac{1}{a-b} = \dfrac{a^2+b^2-2ab}{ab}\cdot\dfrac{1}{a-b} = \dfrac{(a-b)^2}{ab(a-b)} = \dfrac{a-b}{ab}$

Ответ: $\dfrac{a-b}{ab}$.

7. $\dfrac{4^{-12}}{4^{-8}\cdot 4^{-2}} = \dfrac{4^{-12}}{4^{-10}} = 4^{-12+10} = 4^{-2} = \dfrac{1}{16}$. $\quad$ **Ответ**: А.

8. $(\sqrt{3}-1)^2 = 3+1-2\sqrt{3} = 4-2\sqrt{3}$. $\quad$ **Ответ**: $4-2\sqrt{3}$.

9. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{12} = -5$; $\dfrac{5x}{12} = -5$; $\dfrac{x}{12} = -1$; $x = -12$. $\quad$ **Ответ**: $x = -12$.

10. $\begin{cases} y = x^2-10 \\ y = 4x+11 \end{cases}$. 1) $x^2-10 = 4x+11$; $x^2-4x-21 = 0$; $\begin{cases} x_1x_2 = -21 \\ x_1+x_2 = 4 \end{cases}$;

$x_1 = 7$; $x_2 = -3$; $\begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 39 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$. (7; 39); (–3; –1) — координаты точек пересечения параболы и прямой. $\quad$ **Ответ**: Г.

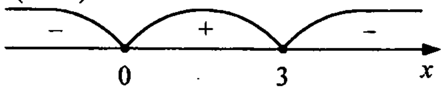
11. x км/ч — собственная скорость лодки; 1 км/ч — скорость течения реки; $(x+1)$ км/ч — скорость лодки по течению; $(x-1)$ км/ч — скорость лодки против течения;

$\dfrac{2}{x+1}$ ч — время движения лодки по течению; $\dfrac{2}{x-1}$ ч — время движения лодки против течения. $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{11}{30}$.

Ответ: Б.

12. $5x-2(x-4)\le 9x+20$; $5x-2x+8\le 9x+20$;
$3x-9x\le 20-8$; $-6x\le 12$; $x\ge -2$.
Ответ: Г.

13. $3x-x^2>0$
$x(3-x)>0$



$0<x<3$
Ответ: Г.

14. 1) 2; 4; 8; 16, …; $a_2-a_1\ne a_3-a_2$. 2) 7; 14; 21, …;
$14-7=21-14=7=d$ (разность арифметической прогрессии)
3) 1, 4, 9, 16, …; $4-1\ne 9-4$. 4) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$, …; $\frac{1}{2}-1\ne\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$.
Ответ: Б.

15. 1) $a>0$. Ветви параболы направлены вверх.
2) Квадратный трехчлен имеет 2 корня.
График пересекает OX в 2-х точках.
3) $x_1>0$; $x_2>0$. **Ответ**: Г.

16. $s=3$ (км); $t=110-70=40$ (мин) $=\frac{2}{3}$ (ч).

$v=\frac{s}{t}$; $v=3:\frac{2}{3}=\frac{9}{2}=4,5$ (км/ч). **Ответ**: 4,5 км/ч.

Вариант 2

1. 1 т = 1000 кг = 10^3 кг; 1 млн. = 10^6. $3,3\cdot 10^{23}$ кг =
$3,3\cdot 10^{23}:(10^3\cdot 10^6)$ (млн. т) = $3,3\cdot 10^{23}:10^9$ (млн. т) = $3,3\cdot 10^{14}$ млн. т.
Ответ: Г.

2. $5500:100\cdot 130=55\cdot 130=7150$ (р)
Ответ: Б.

3.
$\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$
$6<\sqrt{40}<7$; $Q(40)$

$\sqrt{9}<\sqrt{15}<\sqrt{16}$
$3<\sqrt{15}<4$;
$M(\sqrt{15})$

$\sqrt{16}<\sqrt{23}<\sqrt{25}$
$4<\sqrt{23}<5$;
$N(\sqrt{23})$

Ответ:

1	2	3
Q	M	N

4. $h = vt - 5t^2$. $\begin{matrix} v_1 = 18 \text{ км/ч} \\ v_2 = 14 \text{ км/ч} \end{matrix} \Bigg| \; t_1 = t_2 = 1 \text{ с} \; \Bigg| \begin{matrix} h_1 = 18 - 5 = 13 \text{ (м)} \\ h_2 = 14 - 5 = 9 \text{ (м)} \\ h_1 - h_2 = 13 - 9 = 4 \text{ м} \end{matrix}$

Ответ: на 4 м.

5. При $x = 1$ и $x = 5$ выражение $\dfrac{x}{(x-1)(x-5)}$ не имеет смысла.

Ответ: А.

6. $\left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right) \cdot \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \cdot \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{a-b}{ab}$. **Ответ**: $\dfrac{a-b}{ab}$.

7. $\dfrac{6^{-4} \cdot 6^{-9}}{6^{-12}} = \dfrac{6^{-13}}{6^{-12}} = 6^{-13+12} = 6^{-1} = \dfrac{1}{6}$. **Ответ**: Б.

8. $S = (\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$. **Ответ**: 4.

9. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{2} = -3$; $2x - 5x = -30$; $-3x = -30$; $x = 10$.

Ответ: $x = 10$.

10. $\begin{cases} y = x^2 - 15 \\ y = 2x + 9 \end{cases}$; 1) $x^2 - 15 = 2x + 9$; $x^2 - 2x - 24 = 0$; $\begin{cases} x_1 x_2 = -24 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = 6 \\ y_1 = 21 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$. 3) (6; 21); (–4; 1) — координаты точек пересечения параболы и прямой.

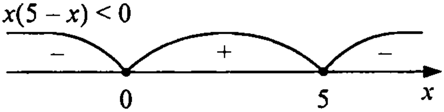
Ответ: Г.

11. x км/ч — скорость течения реки; $(18 + x)$ км/ч — скорость лодки по течению; $(18 - x)$ км/ч — скорость лодки против течения.

$\dfrac{4}{18 - x} - \dfrac{4}{18 + x} = \dfrac{1}{20}$. **Ответ**: А.

12. $2x - 3(x + 4) < x + 12$; $2x - 3x - 12 < x + 12$;
$-x - x < 24$; $-2x < 24$; $x > -12$. **Ответ**: А.

13. $5x - x^2 < 0$
$x(5 - x) < 0$



$x < 0$ или $x > 5$
Ответ: Г.

14. 1) 3, 6, 9, …; $\frac{6}{3} \neq \frac{9}{6}$ 3) 3, 9, 27, …; $\frac{9}{3} = \frac{27}{9} = 3$ ($q = 3$).

2) 1, 8, 27, …; $\frac{8}{1} \neq \frac{27}{8}$; 4) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; …; $\frac{1}{2} : 1 \neq \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$.

Ответ: В.

15. 1) $a < 0$. Ветви параболы направлены вниз.
2) Имеет 2 корня: пересекает OX в 2-х точках.
3) $x_1 < 0$; $x_2 > 0$.
Ответ: В.

16. За 15 мин. велосипедист проехал 5 км; его скорость равна $5 \cdot 4 = 20$ км/ч. **Ответ**: 20 км/ч.

Работа № 4

Вариант 1

1. $\frac{-(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$. **Ответ**: $-\frac{1}{6}$.

2. $v = v_0 + at$; $at = v - v_0$; $t = \frac{v - v_0}{a}$. **Ответ**: А.

3. $0{,}00018 = 1{,}8 \cdot 0{,}0001 = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$.
Ответ: В.

4. $\sqrt{81} < \sqrt{85} < \sqrt{100}$; $9 < \sqrt{85} < 10$; $N(\sqrt{85})$. **Ответ**: Б.

5. $\frac{4}{5} \cdot 100\% = 80\%$ **Ответ**: Г.

6. А. $-\frac{y - x}{2x - y} = \frac{x - y}{2x - y}$. **Ответ**: А.

7. $3(a-1)^2 + 6a = 3(a^2 - 2a + 1) + 6a = 3a^2 - 6a + 3 + 6a = 3a^2 + 3$.
Ответ: $3a^2 + 3$.

8. $2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 10\sqrt{6^2} = 60$. **Ответ**: А.

9. $2x^2 + 63x - 5 = 0$;
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$;

$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 7}{4}$;

$x_1 = 1$; $x_2 = -2{,}5$
Ответ: $-2{,}5$; 1.

10. Точка (4; 0) является точкой пересечения прямых $x-2y=4$ и $x+y=4$. **Ответ**: $\begin{cases} x-2y=4 \\ x+y=4 \end{cases}$.

11. x девочек посадили $2x$ деревьев. y мальчиков посадили $3y$ деревьев. $2x+3y=63$. В классе $x+y$ учащихся; $x+y=25$.

$\begin{cases} x+y=25 \\ 2x+3y=63 \end{cases}$. Эта система уравнений соответствует условию задачи. **Ответ**: Г.

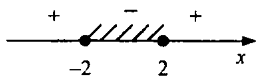
12. А. $a+5>b+5$; верно, т.к. $a>b$.

Б. $-5a<-5b$; верно, т.к. $a>b$; $-a<-b$.

В. $a-5<b-5$; неверно, т.к. $a>b$.

Г. $\frac{a}{2}>\frac{b}{2}$; верно, т.к. $a>b$. **Ответ**: В.

13. $x^2\le 4$; $x^2-4\le 0$; $(x-2)(x+2)\le 0$.



Ответ: $-2\le x\le 2$.

14. (a_n) — арифметическая прогрессия. $a_1=30$; $d=4$;

$a_n=a_1+d(n-1)$; $a_n=30+4(n-1)$; $a_n=26+4n$. **Ответ**: Б.

15. а) $y=\frac{2}{x}$. График — гипербола; рис. 3.

б) $y=2x$. График – прямая, проходящая через точку (0; 0); рис. 1.

в) $y=2-x^2$. График — парабола, ветви вниз; рис. 4.

г) $y=2x+2$. График – прямая $b=2$, пересекает OY в точке (0; 2), рис. 2.

Ответ:

1	2	3	4
б	г	а	в

16. А. Неверно, т.к. $f(-1)=0$; $f(3)=2$;

Б. Функция убывает на $[1;\infty)$ верно, т.к. график на этом участке идет вниз.

В. Неверно, $f(2)>0$.

Г. Неверно, $y_{наиб}=3$. **Ответ**: Б.

Вариант 2

1. $\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=-\frac{5}{6}+1=\frac{1}{6}$. **Ответ**: $\frac{1}{6}$.

2. $s=s_0+vt$; $vt=s-s_0$; $t=\frac{s-s_0}{v}$. **Ответ**: Б.

3. $3{,}6\cdot 10^{-5} = 3{,}6\cdot 0{,}00001 = 0{,}000036.$ **Ответ**: Б.

4. $\sqrt{64} < \sqrt{68} < \sqrt{81}$; $8 < \sqrt{68} < 9$; $M(\sqrt{68})$. **Ответ**: А.

5. $\frac{3}{5}\cdot 100\% = 60\%$ **Ответ:** А.

6. А. $-\frac{m-n}{m-2n} = \frac{n-m}{m-2n}$; В. $\frac{n-m}{m-2n} = \frac{m-n}{2n-m}$;

Б. $\frac{m-n}{2n-m} = \frac{n-m}{m-2n}$; Г. $\frac{n-m}{2n-m} = \frac{m-n}{m-2n}$

Ответ: Г.

7. $8x + 4(1-x)^2 = 8x + 4(1-2x + x^2) = 8x + 4-8x + 4x^2 = 4x^2 + 4.$

Ответ: $4x^2 + 4$.

8. $3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{10}\cdot\sqrt{5} = 12\sqrt{100} = 120$. **Ответ**: В.

9. $5x^2 + 4x - 1 = 0$

$D = 4^2 - 4\cdot 5\cdot(-1) = 16 + 20 = 36$

$x_{1/2} = \frac{-4\pm 6}{10}$;

$x_1 = -1$; $x_2 = -0{,}2$

Ответ: –1; 0,2.

10. Решение системы — координаты точек пересечения прямых $x + y = 4$ и $7x - 5y = -8$. Это точка (1; 3).

Ответ: (1; 3).

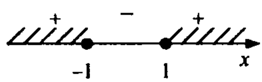
11. x девочек принесли $2x$ ведер воды. y мальчиков принесли $5y$ ведер воды. Всего принесено $2x + 5y$ ведер воды; $2x + 5y = 57$. Всего учащихся 18: $x + y = 18$.

Ответ: А.

12. А. $x-3 > y-3$; $x > y$ В. $x + 3 > y + 3$; $x > y$

Б. $-x < -y$; $x > y$ Г. $\frac{x}{3} < \frac{y}{3}$; $x < y$ (по условию $x > y$)

Ответ: Г.

13. $x^2 \geq 1$ $x^2 - 1 \geq 0$; $x \leq -1$; $x \geq 1$. 

Ответ: $x \leq -1$; $x \geq 1$.

14. (a_n) — арифметическая прогрессия

1) $a_1 = 200$ руб; $d = 10$ руб 3) $a_n = 200 + 10(n-1)$

2) $a_n = a_1 + d(n-1)$ 4) $a_n = 190 + 10n$

Ответ: А.

15. а) $y = -\frac{1}{x}$. График — гипербола; рис. 3.

б) $y = x^2-1$. График — парабола, ветви вверх; рис. 4.

в) $y = -x$. График – прямая, проходящая через начало координат рис. 1.

г) $y = 1-x$. График — прямая $b = 1$; $k = -1$, рис. 2.

Ответ:

1	2	3	4
в	г	а	б

16. А. Неверно, т.к. $f(-1) = 3$; $f(2) = -1$;

Б. Функция убывает на $(-\infty; 1]$. Верно; график на этом промежутке идет вниз.

В. Неверно, $f(0) = -1$.

Г. Неверно. Наименьшее значение функция принимает при $x = 1$.

Ответ: Б.

Работа № 5

Вариант 1

1. $2(-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} + 3 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3 = -\frac{1}{8} + 3 = 2\frac{7}{8}$.

Ответ: $2\frac{7}{8}$.

2. x (р) — цена телевизора до уценки. $0,8x$ (р) — новая цена телевизора. 0,8 составляет 80%, т.к. $0,8 \cdot 100\% = 80\%$.

Ответ: Г.

3. Неверно утверждение Г, так как число c по модулю больше числа a, поэтому $a + c > 0$. **Ответ:** Г.

4. $v_M = \frac{a}{3}$ км/ч; $v_B = \frac{a}{6}$ км/ч. $s = \frac{5a}{6}$ км. (путь велосипедиста за 5 ч.)

Ответ: А.

5. a — четное число; b — нечетное число.

А. ab– четное число;

Б. $2(a + b)$– четное число;

В. $a + b$– нечетное число;

Г. $a + b + 1$– четное число.

Ответ: В.

6. $\frac{2x-2y}{y} \cdot \frac{3y^2}{x^2-y^2} = \frac{2(x-y) \cdot 3y^2}{y(x-y)(x+y)} = \frac{6y}{x+y}$. **Ответ**: $\frac{6y}{x+y}$.

7. $(1,2 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^{-1}) = 3,6 \cdot 10^{-4} = 3,6 \cdot 0,0001 = 0,00036$.

Ответ: Б.

8. $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$; $3=\sqrt{9}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{12}$; 3; $\sqrt{10}$; $2\sqrt{3}$. **Ответ**: А.

9.

1) $x^2=x$	2) $x^2=-x$	3) $x^2=-1$	4) $x^2=1$
$x^2-x=0$	$x^2+x=0$	уравнение не	$x_1=1$
$x(x-1)=0$	$x(x+1)=0$	имеет корней	$x_2=-1$
$x_1=0$; $x_2=1$	$x_1=0$; $x_2=-1$		
1) → б)	2) → в)		4) → а)

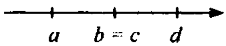
Ответ:

1	2	3	4
б	в	г	а

10. x лет Борису; $1{,}5x$ лет Олегу; $(1{,}5x+4)$ лет Андрею
$x+1{,}5x+1{,}5x+4=36$; $4x+4=36$; $4x=32$; $x=8$. **Ответ**: В.

11. Решение системы уравнений — координаты точек пересечения изображенных графиков функций. Их точки пересечения $(-2; 5)$; $(2; -3)$.

Ответ: $(-2; 5)$; $(2; -3)$.

12. 

$a<d$ **Ответ**: В.

13. $3x+5\le 7x-3$; $3x-7x\le -3-5$; $-4x\le -8$; $x\ge 2$.
Ответ: А.

14. $a_1=3$; $d=3$.

$14=3+3(n-1)$; $n=\dfrac{14}{3}$; $18=3+3(n-1)$; $n=6\in\mathbb{N}$;

$22=3+3(n-1)$; $n=\dfrac{22}{3}$; $25=3+3(n-1)$; $n=\dfrac{25}{3}$.

Ответ: Б.

15. Ветви параболы на рисунке направлены вверх, поэтому коэффициент перед x^2 положителен, значит ответы А и В можно отбросить. Парабола пересекает ось Ox в точках $(-1; 0)$ и $(3; 0)$.

-1; 3 — корни квадратного трехчлена x^2-2x-3, поэтому ответ Г. **Ответ:** Г.

16. Мяч подбросили с высоты 1 м; $t=3$ с, $s=8-1+2=9$ (м).
Ответ: 9 м.

Вариант 2

1. $2\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{4}+1=2\cdot\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}+1=-\dfrac{1}{8}+1=\dfrac{7}{8}$.

Ответ: $\dfrac{7}{8}$.

2. x -- число дорожно-транспортных происшествий зимой. $0{,}7x$ — число дорожно-транспортных происшествий летом.

$x - 0{,}7x = 0{,}3x$; 0,3 составляет 30%. **Ответ**: Б.

3. Так как $a < 0$, $b < 0$, то $ab > 0$. Неверно утверждение В.
Ответ: В.

4. $v_п = \frac{17}{a}$ км/ч; $v_в = \frac{17}{a} \cdot 3 = \frac{51}{a}$ км/ч; $s_в = \frac{51b}{a}$ км (путь велосипедиста за b ч.) **Ответ**: А.

5. a — четное число; b — нечетное число.
А. $a + b$ — нечетное число; В. $(a + 1)b$ — нечетное число;
Б. $3(a + b)$ — нечетное число; Г. ab– четное число.
Ответ: Г.

6. $\frac{x^2 - y^2}{2xy} \cdot \frac{2y}{3x - 3y} = \frac{(x-y)(x+y)2y}{2xy \cdot 3(x-y)} = \frac{x+y}{3x}$. **Ответ**: $\frac{x+y}{3x}$.

7. $(2{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^{-2}) = 4{,}8 \cdot 10^{-5} = 4{,}8 \cdot 0{,}00001 = 0{,}000048$.
Ответ: Б.

8. $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$; $4 = \sqrt{16}$; $\sqrt{15}; \sqrt{16}; \sqrt{18}$; $\sqrt{15}; 4; 3\sqrt{2}$.

Ответ: Г.

9.

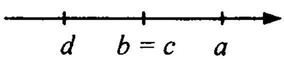
1) $x^2 - 1 = 0$	2) $x^2 + 1 = 0$	3) $x = x^2$	4) $x^2 = -x$
$x^2 = 1$	уравнение	$x - x^2 = 0$	$x^2 + x = 0$
$x_1 = 1$; $x_2 = -1$	не имеет	$x(1 - x) = 0$	$x(x + 1) = 0$
	решений	$x_1 = 0$; $x_2 = 1$	$x_1 = 0$; $x_2 = -1$

Ответ:

1	2	3	4
в	г	б	а

10. x лет дочери; $5x$ лет маме; $(5x + 20)$ лет бабушке
$x + 5x + 5x + 20 = 86$; $11x = 66$; $x = 6$. **Ответ**: Г.

11. Решением системы уравнений являются координаты точек пересечения изображенных графиков функций. Графики пересекаются в точках: (–2; –5); (2; 3). **Ответ**: (–2; –5); (2; 3).

12. 

$a > d$ **Ответ**: Б.

13. $x + 4 \ge 4x - 5$; $x - 4x \ge -5 - 4$; $-3x \ge -9$; $x \le 3$. **Ответ**: Г.

14. $a_1 = 4$; $d = 4$;

$38 = 4 + 4(n - 1)$; $n = \frac{19}{2}$; $30 = 4 + 4(n - 1)$; $n = \frac{15}{2}$;

$28 = 4 + 4(n - 1)$; $n = 7 \in \mathbb{N}$; $22 = 4 + 4(n - 1)$; $n = \frac{11}{2}$. **Ответ**: В.

15. Корни: -1; 5 — это корни квадратного трехчлена x^2-4x-5.
Ответ: Б.

16. Мяч бросали с высоты 1 м: $t=2$ с, $s=7-1+1=7$ м.
Ответ: Б.

Работа № 6

Вариант 1

1. $\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$. **Ответ**: 13.

2. $F=1{,}8C+32$; $1{,}8C=F-32$; $C=\dfrac{F-32}{1{,}8}$. **Ответ**: А.

3. $a>0$, $b>0$; $a>b$; $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$. **Ответ**: Б.

4. 1) Голоса распределились между кандидатами в количестве $2x$ и $7x$. 2) $2x+7x=252$; $9x=252$; $x=28$.
3) Проигравший кандидат получил 56 голосов. **Ответ**: В.

5. $\dfrac{3}{4}\cdot 100\%=75\%$; $\dfrac{1}{2}\cdot 100\%=50\%$; $0{,}08\cdot 100\%=8\%$
$0{,}8\cdot 100\%=80\%$
Ответ:

1	2	3	4
в	а	г	б

6. $4x^2-6xy=-2x(-2x+3y)$ **Ответ**: Б.

7. $\dfrac{a^2+4a+4}{a}:(a^2+2a)=\dfrac{(a+2)^2}{a}\cdot\dfrac{1}{a(a+2)}=\dfrac{a+2}{a^2}$

Ответ: $\dfrac{a+2}{a^2}$.

8. $\left(a^{-6}\right)^{-2}\cdot a^{-14}=a^{+12}\cdot a^{-14}=a^{-2}$ **Ответ**: a^{-2}.

9. $\dfrac{x+9}{3}-\dfrac{x-1}{5}=2$; $5x+45-3x+3=30$;
$2x+48=30$; $2x=-18$; $x=-9$. **Ответ**: Г.

10. $\begin{cases} y=2x^2-5 \\ y=4x-5 \end{cases}$ 1) $2x^2-5=4x-5$; $2x^2=4x$; $x^2-2x=0$; $x(x-2)=0$;
$x_1=0$; $x_2=2$. $(0;\ -5)$; $(2;\ 3)$ — координаты точек пересечения параболы и прямой. **Ответ**: Г.

11. 1-й принтер за 10 мин печатает $10x$ страниц; 2-й принтер за 15 мин печатает $15(x - 4)$ стр.

Вместе они напечатали $10x + 15(x–4) = 340$ стр. **Ответ**: В.

12. $3(3x–1) > 10x–14$; $9x–3 > 10x–14$;
$9x–10x > –14 + 3$; $–x > –11$; $x < 11$. **Ответ**: А.

13. Решением этого неравенства будут значения x, при которых $y \le 0$. $y \le 0$ при $-2 \le x \le 0$. **Ответ**: $-2 \le x \le 0$.

14. Дана арифметическая прогрессия. $a_1 = 1$; $d = 2$; $a_{20} = a_1 + 19d$
$a_{20} = 1 + 38 = 39$. **Ответ**: Б.

15. График этой функции прямая, в уравнении которой $k > 0$ и $b = 4$. Функция задана аналитически: $y = 2x + 4$. **Ответ**: А.

16. Петр затратил на отрезок дистанции от 8-го до 16-го километра 70 – 20 = 50 минут.

Иван затратил 60 – 40 = 20 минут. 50 – 20 = 30.

Ответ: Иван, на 30 минут.

Вариант 2

1. $\sqrt{10^2 - (-6)^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$. **Ответ**: 8.

2. $v = 20–2{,}5t$; $2{,}5t = 20–v$; $t = \dfrac{20 - v}{2{,}5}$. **Ответ**: В.

3. $a < 0$; $b < 0$; $a > b$. Так как $a > b$, то $-a < -b$. **Ответ**: Б.

4. 1) Голоса распределились между кандидатами: $8x$ и $3x$.
2) $8x + 3x = 198$; $11x = 198$; $x = 18$.
3) Победитель получил $18 \cdot 8 = 144$ (голоса). **Ответ**: Б.

5. $\dfrac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$; $\dfrac{4}{5} \cdot 100\% = 80\%$; $0{,}4 \cdot 100\% = 40\%$;

$0{,}04 \cdot 100\% = 4\%$.

Ответ:

1	2	3	4
б	в	а	г

6. $10ab–6b^2 = –2b(–5a + 3b)$. **Ответ**: Г.

7. $(x-3) : \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x+3} = (x-3) \cdot \dfrac{x+3}{(x-3)^2} = \dfrac{x+3}{x-3}$. **Ответ**: $\dfrac{x+3}{x-3}$.

8. $\dfrac{a^{-9}}{(a^2)^{-3}} = \dfrac{a^{-9}}{a^{-6}} = a^{-9+6} = a^{-3}$ **Ответ**: a^{-3}.

9. $\frac{x-4}{2}-\frac{x-2}{5}=2$; $5x-20-2x+4=20$; $3x-16=20$; $3x=36$; $x=12$.

Ответ: Г.

10. $\begin{cases} y=3x^2+2 \\ y=-6x+2 \end{cases}$

1) $3x^2+2=-6x+2$; $3x^2=-6x$; $x^2+2x=0$; $x(x+2)=0$; $x_1=0$; $x_2=-2$.

2) $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=14 \end{cases}$. (0; 2); (–2; 14) — координаты точек пересечения параболы и прямой. **Ответ**: Б.

11. За 10 мин 1-й автомат упаковал $10x$ пачек. За 20 мин 2-й автомат упаковал $20(x-2)$ пачек; вместе $10x+20(x-2)=320$.

Ответ: А.

12. $5x+20<2(4x-5)$; $5x+20<8x-10$; $5x-8x<-10-20$; $-3x<-30$; $x>10$. **Ответ**: В.

13. $y=x^2-3x$; $x^2-3x\geq 0$; $x\leq 0$; $x\geq 3$. **Ответ**: $x\leq 0$; $x\geq 3$.

14. Дана арифметическая прогрессия
$a_1=3$; $d=2$; $a_{15}=a_1+14d$; $a_{15}=3+28=31$.

Ответ: В.

15. Так как ветви параболы направлены вниз, то $y=-x^2+4$.

Ответ: Г.

16. За вторые полчаса тренировки Петр пробежал 14 – 10 = 4 километра. За вторые полчаса тренировки Иван пробежал 16 – 6 = 10 километров. 10 – 4 = 6 (км).

Ответ: Иван, на 6 км.

Работа № 7

Вариант 1

1. I результат — 24,31; II результат — 27,31; III результат — 27,80.

Ответ: Б.

2. 48 кг составляет 100%; x кг составляет 120%; x кг — вес Сергея.

$\frac{48}{x}=\frac{100}{120}$; $\frac{48}{x}=\frac{5}{6}$ $x=\frac{48\cdot 6}{5}=57,6$. **Ответ**: Б.

3. $2,8^2=7,84$; $8-7,84=0,16$; $2,7^2=7,29$; $8-7,29=0,71$.

Лучшим приближением числа $\sqrt{8}$ является 2,8. **Ответ**: В.

4. В область определения выражения $\sqrt{4-x}$ не входит число 8.
Ответ: Г.

5. $s = 5t^2$; $s = 80$ м; $5t^2 = 80$; $t^2 = 16$; $t_1 = -4$; $t_2 = 4$; t_1 не удовлетворяет условию задачи. **Ответ**: 4 с.

6. $4c(c-2)-(c-4)^2 = 4c^2-8c-c^2 + 8c-16 = 3c^2-16$.
Ответ: $3c^2-16$.

7. $(1{,}6\cdot 10^{-5})\cdot(4\cdot 10^2) = 6{,}4\cdot 10^{-3} = 6{,}4\cdot 0{,}001 = 0{,}0064$. **Ответ**: В.

8. $\dfrac{x}{x^2-y^2}\left(xy-y^2\right) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}(x-y) = \dfrac{xy(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{xy}{x+y}$.

Ответ: $\dfrac{xy}{x+y}$.

9. $4x-4{,}5 = 5x-3(2x-1{,}5)$; $4x-4{,}5 = 5x-6x + 4{,}5$; $4x + x = 9$; $5x = 9$; $x = 1{,}8$.
Ответ: Г.

10. x км — расстояние от города до поселка; $t_1 = 3$ ч — время движения автомобиля от города до поселка; $t_2 = 2$ ч — время движения автомобиля с увеличенной на 25 км/ч скоростью.

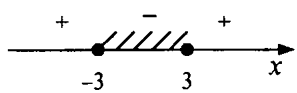
$v = \dfrac{s}{t}$; $v_1 = \dfrac{x}{3}$ км/ч; $v_2 = \dfrac{x}{2}$ км/ч. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3} = 25$
Ответ: А.

11. $\begin{cases} x^2-3y=-9 \\ x+y=3 \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{cases} x^2-3y=-9 & (1) \\ 3x+3y=9 & (2) \end{cases}$. Сложим почленно (1) и (2)

1) $x^2 + 3x = 0$; $x(x + 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -3$. 2) $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-3 \\ y=6 \end{cases}$

3) Решения системы: (0; 3); (–3; 6).
Ответ: (0; 3); (–3; 6).

12. $x^2-9 \le 0$; $(x-3)(x+3) \le 0$



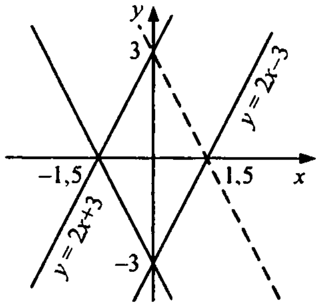
$-3 \le x \le 3$
Ответ: А.

13. $x > y$
$x - y > 0 \Rightarrow$ 1) неверно
$x - y > -5$ — заведомо верно, т.к. $x - y > 0$, т.е. 2) верно
$y - x < 0$, поэтому $y - x < -3$ не всегда верно (3)), а $y - x < 1$ верно всегда (4)).
Ответ: В.

14. (b_n) — геометрическая прогрессия. $b_1 = 3$; $b_{n+1} = b_n \cdot 2$; $q = 2$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Ответ: В.

15.



А. $y = 2x + 3$; $k_1 = 2$

x	0	–1,5
y	3	0

Б. $y = 2x - 3$; $k_2 = 2$

В. $y = -2x + 3$

x	0	1,5
y	3	0

Нет на рисунке.

Ответ: В.

16. $f(-2) = 4, f(2) = -4; f(5) = 0$

Ответ: $f(2); f(5); f(-2)$.

Вариант 2

1. Худший результат — 90,30 с. (максимальное время).

Ответ: Г.

2. 36 кг составляют 100%; x кг составляют 110%;
36:100·110 = 39,6 (кг) (вес Маши). **Ответ**: Б.

3. $3{,}4^2 = 11{,}56$; $12 - 11{,}56 = 0{,}44$; $3{,}6^2 = 12{,}96$; $12{,}96 - 12 = 0{,}96$.

Лучшим приближением числа $\sqrt{12}$ является 3, 4.

Ответ: Б.

4. Число –4 обращает подкоренное выражение в отрицательное.

Ответ: В.

5. $s = 5t^2$; $s = 45$ м; $5t^2 = 45$; $t^2 = 9$; $t_1 = 3$; $t_2 = -3$; t_2 не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3 с.

6. $3a(a + 2) - (a + 3)^2 = 3a^2 + 6a - a^2 - 6a - 9 = 2a^2 - 9$. **Ответ**: $2a^2 - 9$.

7. $(6 \cdot 10^3) \cdot (1{,}4 \cdot 10^{-6}) = 8{,}4 \cdot 10^{-3} = 8{,}4 \cdot 0{,}001 = 0{,}0084$.

Ответ: В.

8. $\frac{x^2 - y^2}{y} : \left(xy - y^2\right) = \frac{x^2 - y^2}{y} : y(x - y) = \frac{x^2 - y^2}{y^2(x - y)} = \frac{x + y}{y^2}$.

Ответ: $\frac{x + y}{y^2}$.

9. $3(2 + 1{,}5x) = 0{,}5x + 24$; $6 + 4{,}5x = 0{,}5x + 24$; $4{,}5x - 0{,}5x = 24 - 6$; $4x = 18$; $x = 4{,}5$. **Ответ**: Г.

10. x км — расстояние от дома до школы

$v_1 = 10$ км/ч, $v_2 = 12$ км/ч; $t_1 = \frac{x}{10}$ ч; $t_2 = \frac{x}{12}$ ч; $\frac{x}{10} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}$.

Ответ: А.

11. $\begin{cases} x^2 - 3y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases} \Bigg| -3 \quad \begin{cases} x^2 - 3y = 9 & (1) \\ -3x + 3y = -9 & (2) \end{cases}$

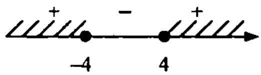
Сложим почленно равенства (1) и (2)

1) $x^2 - 3x = 0$; $x(x-3) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$. (0; –3); (3; 0) — решения данного неравенства.

Ответ: (0; –3); (3; 0).

12. $x^2 - 16 \ge 0$; $(x-4)(x+4) \ge 0$.



$x \le -4$; $x \ge 4$

Ответ: Г.

13. $x < y$

$x - y < 0$, поэтому 1) неверно, 4) верно

$y - x > 0$, поэтому 3) верно, 2) не всегда верно.

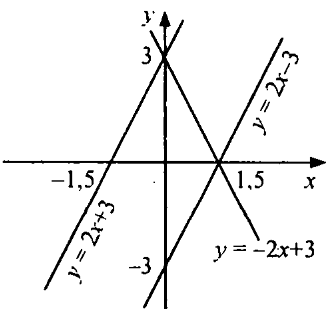
Ответ: В.

14. (b_n) — геометрическая прогрессия. $b_1 = 2$;

$b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{3}$; $q = \frac{1}{3}$; $b_n = b_1 q^{n-1}$; $b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $b_n = 2 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{2}{3^{n-1}}$.

Ответ: В.

15.



А. $y = 2x + 3$; $k = 2$; $b = 3$

x	0	–1,5
y	3	0

Б. $y = 2x - 3$; $k = 2$; $b = -3$

В. $y = -2x + 3$

x	0	1,5
y	3	0

Г. $y = -2x - 3$. Нет на рисунке.

Ответ: Г.

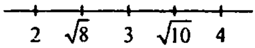
16. $f(-2) = -4$; $f(2) = 4$; $f(5) = 0$

Ответ: $f(-2)$; $f(5)$; $f(2)$.

Работа № 8

Вариант 1

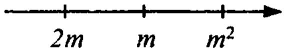
1. $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$; $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$; $2<\sqrt{8}<3$; $3<\sqrt{10}<4$.



Ответ: Б.

2. 60 р. — первоначальная цена товара. 10% от 60 р. составляют 6 р. Через 1 неделю товар стал стоить 54 р. На 12-й день товар стоил 54 р (12 дней меньше двух недель).

Ответ: Г.

3. 

$m<0$

На этом рисунке точки с координатами m, $2m$, m^2 расположены на координатной прямой в правильном порядке.

Ответ: А.

4. $s=\dfrac{40v+v^2}{200}=\dfrac{v(40+v)}{200}$; $v_1=100$ км/ч; $v_2=80$ км/ч

$s_1=\dfrac{100\cdot140}{200}=70$ (м); $s_2=\dfrac{80\cdot120}{200}=48$ (м); $s_1-s_2=70-48=22$ (м).

Ответ: 22 м.

5. при $x=0$ выражения $\dfrac{x-5}{x}$ и $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{5}$ не имеют смысла, так как содержат x в зменателе дробей. **Ответ**: В.

6. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a}{ab+b^2}=\dfrac{a(a-b)(a+b)}{a^2b(a+b)}=\dfrac{a-b}{ab}$ **Ответ**: $\dfrac{a-b}{ab}$.

7. $\dfrac{a^{-9}}{a^{-2}a^{-5}}=\dfrac{a^{-9}}{a^{-7}}=a^{-9+7}=a^{-2}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$ **Ответ**: Г.

8. $\sqrt{15\cdot32\cdot30}=\sqrt{15\cdot32\cdot2\cdot15}=8\cdot15=120$. **Ответ**: 120.

9. $2x^2-8=0$; $x^2-4=0$; $x^2=4$; $x_1=-2$; $x_2=2$. **Ответ**: -2; 2.

10. $\begin{cases}y=2x-2\\ y=2x+4\end{cases}$. Графики этих функций — параллельные прямые. Они образуют с положительным направлением оси Ox острый угол ($k=2$). **Ответ**: А.

11. Стороны прямоугольника: $a=4+2x$ (м); $b=5+2x$ (м).
$S=ab$; $S=(4+2x)(5+2x)$ (м^2); $(4+2x)(5+2x)=56$.

Ответ: Г.

12. $6-3x < 19-(x-7)$; $6-3x < 19-x+7$; $-2x < 20$; $x > -10$.

Ответ: $x > -10$.

13. $x > 0, y < 0$; А. $xy < 0$; Б. $(x-y)x > 0$; В. $(x-y)y < 0$; Г. $(y-x)x < 0$.
Ответ: Б.

14. $c_n = n^2-1$; $c_1 = 0$; $c_2 = 3$; $c_3 = 8$. **Ответ**: В.

15. График функции — парабола. Ветви параболы направлены вниз, а вершина находится в т. (0; 4), следовательно коэффициент при x^2 отрицателен, а свободный член положителен и равен 4.

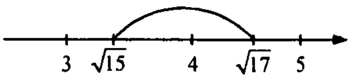
Ответ: Г.

16. 1 мин. 40 с. = 100 с. За 100 с пловец проплыл $2\cdot50 + 30 = 130$ м.

Ответ: В.

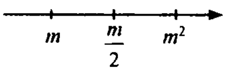
Вариант 2

1. $\sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}$; $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$;
$3 < \sqrt{15} < 4$; $4 < \sqrt{17} < 5$.



Ответ: Б.

2. 800 р. — начальная цена; 10% составляют 80 р. Через месяц товар стал стоить 800–80 = 720 р. На 50-й день товар будет стоить 720 р.
Ответ: А.

3. 

$m < 0$, $m < \dfrac{m}{2} < m^2$ **Ответ**: Б.

4. $s = \dfrac{40v + v^2}{200} = \dfrac{v(40+v)}{200}$; $v_1 = 120$ км/ч; $v_2 = 100$ км/ч

$s_1 = \dfrac{120\cdot160}{200} = 6\cdot16 = 96$ (м); $s_2 = \dfrac{100\cdot140}{200} = 70$ (м); $s_1 - s_2 = 26$ (м).
Ответ: 26 м.

5. При $x = 1$ имеем $x - 1 = 0$ и, следовательно, не имеют смысла выражения 1) и 3), т.к. они содержат ноль в знаменателе.
Ответ: Б.

6. $\dfrac{x^2-y^2}{2x}\cdot\dfrac{2xy}{xy-y^2} = \dfrac{(x-y)(x+y)2xy}{2xy(x-y)} = x+y$. **Ответ**: $x + y$.

7. $\dfrac{a^{-4}a^{-3}}{a^{-5}} = \dfrac{a^{-7}}{a^{-5}} = a^{-7+5} = a^{-2}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$. **Ответ**: Г.

8. $\sqrt{27\cdot 6\cdot 50}=\sqrt{3\cdot 9\cdot 3\cdot 2\cdot 25\cdot 2}=9\cdot 2\cdot 5=90$. **Ответ**: 90.

9. $3x^2-27=0$; $x^2-9=0$; $x^2=9$; $x_1=-3$; $x_2=3$. **Ответ**: –3; 3.

10. $\begin{cases} y=-2x+4 \\ y=2x+4 \end{cases}$. График каждой из функций проходит через точку (0; 4). **Ответ**: Б.

11. Стороны песочницы соответственно равны $(12-2x)$ м и $(13-2x)$ м. Площадь детской площадки равна $(12-2x)(13-2x)$ м^2.

$S=12\cdot 13=156$ (м^2) площадь всей детской площадки. Получаем уравнение $156-(12-2x)(13-2x)=130$. **Ответ**: В.

12. $3(1-x)-(2-x)<5$; $3-3x-2+x-5<0$; $-2x<4$; $x>-2$.

Ответ: $x>-2$.

13. $x<0$, $y>0$. А. $(x-y)x>0$; Б. $xy<0$; В. $(x-y)y<0$; Г. $(y-x)x<0$
Ответ: А.

14. $c_n=n^2+1$; $c_1=2$; $c_2=5$; $c_3=10$. **Ответ**: В.

15. График функции — парабола, проходящая через точку (0; –4).
Ответ: В.

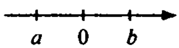
16. 2 мин. 20 с. = 140 с. $s=3\cdot 50+25=175$ м. **Ответ**: Г.

Работа № 9

Вариант 1

1. $1{,}49\cdot 10^8$ км $=1{,}49\cdot 10^8:10^6$ млн. км $=1{,}49\cdot 10^2$ млн. км $=$ $=149$ млн. км. **Ответ**: В.

2. $123\cdot 70$ делится на 6, т.к. $123:3$; $70:2$. **Ответ**: Б.

3. 

А. $a+b>b$ неверно

Б. $a+b>a$ верно

В. $ab>b$ неверно

Г. $a-b>b$ неверно

Ответ: Б.

4. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; $a=-\sqrt{2}$. $\frac{(-\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{4}=-\frac{(\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{4}=-\frac{(\sqrt{2})^4}{4}=-\frac{4}{4}-1$.

5. x р. — цена товара до уценки.

$\frac{x}{4}$ р. составляет 25% от x р. $\left(x-\frac{x}{4}\right)$р. — новая цена.

Ответ: В.

6. $\frac{1}{x^{-1}}\cdot\frac{1}{x^{-4}}=\frac{1}{x^{-5}}=x^5$; $(-2)^5=-32$. **Ответ**: А.

7. Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2+5x-3$:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4}.\ x_1=-3;\ x_2=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $2x^2+5x-3=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$. **Ответ**: $x-\frac{1}{2}$.

8. $(\frac{1}{2a}+\frac{1}{6a})\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{4a^2}{6a\cdot 4}=\frac{a}{6}$. **Ответ**: $\frac{a}{6}$.

9. $\frac{5}{1-x}=\frac{4}{3-x}$ 1) $x\neq 1; 3$

2) $5(3-x)=4(1-x)$; $15-5x=4-4x$; $-5x+4x=4-15$; $-x=-11$; $x=11$.

Ответ: 11.

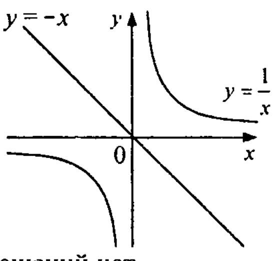
10. Пусть $a=x$ (м) — ширина участка; $b=(x+4)$ (м) — длина участка. $x(x+4)=165$; $x^2+4x-165=0$. $\begin{cases}x_1x_2=-165\\ x_1+x_2=-4\end{cases}$ $x_1=-15$; $x_2=11$.

11 м — ширина участка, 15 м — длина участка.

Ответ: 15 м.

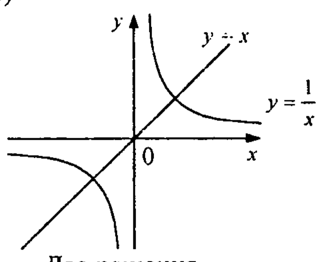
11.

а)



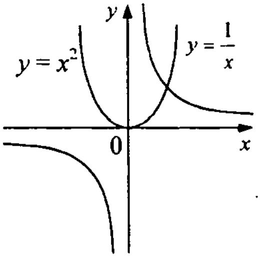
Решений нет.

б)



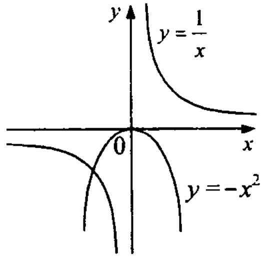
Два решения.

в)



Одно решение.

г)



Одно решение.

Ответ: Б.

12. $\begin{cases} 2x+6>0 \\ 3-x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<2$; $x \in (-3; 2)$. **Ответ**: Б.

13. Известно, что $x > y - z$

А. $x-y > z$; $x > y + z$
Б. $y > x + z$; $x < -z + y$
В. $z-x > y$; $-x > y-z$; $x < z-y$
Г. $z > y-x$; $x > y-z$

Ответ: Г.

14. (a_n) — арифметическая прогрессия; $a_n = -10$

А. $2n + 10 = -10$; $2n = -20$; $n = -10$; $-10 \notin \mathbb{N}$

Б. $-3n = -10$; $n = \frac{10}{3}$; $\frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$

В. $2-3n = -10$; $n = 4$; $4 \notin \mathbb{N}$

Г. $-4n-8 = -10$; $n = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ **Ответ**: В.

15. а) $y = x$. График — прямая, проходящая через (0; 0). Рис. 3.

б) $x = 2$. Графиком уравнения является прямая, параллельная прямой OY и проходящая через точку (2; 0). Рис. 4.

в) $y = 2$. Графиком функции является прямая, параллельная прямой OX и проходящая через точку (0; 2). Рис. 2.

г) $y = -2$. Графиком функции является прямая, параллельная прямой OX и проходящая через точку (0; –2). Рис. 1.

Ответ:

1	2	3	4
г	в	а	б

16. А и Б не могут быть ответом (0 кг не стоят 20 р.). Г не может быть ответом; по условию сахар продавали по разным ценам. График В, т.к.: за 30 кг получили 600 р. и дальше за 40 кг — 400 р. (по стоимости 10р/кг). **Ответ**: В.

Вариант 2

1. $2{,}27 \cdot 10^8$ км $= 2{,}27 \cdot 10^8 : 10^6$ млн. км $= 2{,}27 \cdot 10^2$ млн. км $=$ $= 227$ млн. км. **Ответ**: В.

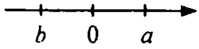
2. А. $122 \cdot 85$ не делится на 4, т.к. 122 не делится на 4 и 85 нечетное число.

Б. $122 \cdot 85$ не делится на 25, т.к. 85 не делится на 25, а 122 не делится на 5.

В. $122 \cdot 85$ не делится на 9, т.к. по признаку делимости на 3 ни один из сомножителей не делится на 3, а $9 = 3 \cdot 3$.

Г. $122 \cdot 85$ делится на 10, т.к. $122 = 61 \cdot 2$, а $85 = 17 \cdot 5$.

Ответ: Г.

3. 

А. $a + b < b$ неверно
Б. $a + b > a$ неверно
В. $ab > a$ неверно
Г. $a - b > b$ верно

Ответ: Г.

4. $-\frac{4\sqrt{2}}{(-\sqrt{2})^3} = -\frac{4\sqrt{2}}{(-1)^3(\sqrt{2})^3} = \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2$. **Ответ**: 2.

5. x (р.) — цена бензина в начале года

20% от x р. — $\frac{x}{5}$ р. $(x + \frac{x}{5})$ р. — новая цена бензина.

Ответ: Б.

6. $\frac{1}{x^{-1}} : \frac{1}{x^{-4}} = \frac{x^{-4}}{x^{-1}} = x^{-4+1} = x^{-3}$; $2^{-3} = \frac{1}{8}$ **Ответ**: В.

7. Разложим на множители $3x^2 + 5x - 2$. Найдем корни этого квадратного трехчлена: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$. $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{3}$. Тогда $3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)(x - \frac{1}{3})$. **Ответ**: $x - \frac{1}{3}$.

8. $\left(\frac{1}{5c} - \frac{1}{10c}\right) \cdot \frac{2c^2}{3} = \frac{1}{10c} \cdot \frac{2c^2}{3} = \frac{c}{15}$. **Ответ**: $\frac{c}{15}$.

9. $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x-4}$ 1) $x \neq -2; 4$

2) $5(x-4) = 3(x+2)$; $5x - 20 = 3x + 6$; $2x = 26$; $x = 13$.

Ответ: 13.

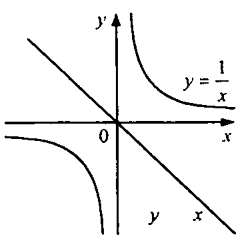
10. x м — длина участка; $(x-10)$ м — ширина участка; $S = x(x-10)$ м^2; $x(x-10) = 875$; $x^2 - 10x - 875 = 0$; $x = 5 \pm \sqrt{25 + 875} = 5 \pm 30$; $x_1 = 35$; $x_2 = -25$; 35 м — длина участка.

Ответ: 35 м.

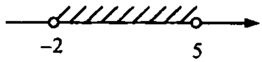
11.

$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = -x \end{cases}$ система не имеет решений.

Ответ: А.



12. $\begin{cases} 2x+4>0 \\ 15-3x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x>1-4 \\ -3x>-15 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2 \\ x<5 \end{cases}$



4 — наибольшее целое решение системы неравенств.
Ответ: В.

13. $x–y > z$. А. $z–x + y < 0$; $z < x–y$; верно

Б. $y > x–z$; $z > x–y$; неверно
В. $z + y > x$; $z > x–y$; неверно
Г. $x–y–z < 0$; $–z < –x + y$; $z > x–y$; неверно
Ответ: А.

14. (a_n) — геометрическая прогрессия; $a_n = 9$
А. $a_n = –3^n$; все члены этой прогрессии отрицательные числа.
Б. $a_n = 3^n$; $a_1 = 3$; $q = 3$ имеем; $a_2 = 9$, $n = 2$.
В. Пусть $3 \cdot 2^{n-1} = 9$, тогда $3 \cdot 2^n = 18$, $2^n = 6$, $n \notin N$.
Г. Пусть $2 \cdot 3^{n-1} = 9n$, все члены прогрессии — четные числа.
Ответ: Б.

15. а) $y = –x$. График функции прямая, является биссектрисой 2-й и 4-й координатных четвертей. **Ответ:** Рис. 2.

б) $x = –2$. График уравнения прямая, параллельная OY и проходящая через точку (–2; 0). Рис. 4.

в) $y = x$. График функции — прямая, являющаяся биссектрисой 1-й и 3-й координатных четвертей. Рис. 3.

г) $y = –2$. Графиком функции является прямая, параллельная OX и проходящая через точку (0; –2). Рис. 1.

Ответ:

1	2	3	4
г	а	в	б

16. Решением не могут быть А и Б (т.к. наполнялся пустой бассейн). Решением не может быть Г (при 2-х открытых кранах (по истечении восьми минут), количество поступающей в бассейн воды в 1 мин уменьшилось по сравнению с первыми 8 минутами при открытом 1-м кране). **Ответ**: В.

Работа № 10

Вариант 1

1. А. $5{,}6 \cdot 10^{-3} = 5{,}6 \cdot 0{,}001 = 0{,}0056$;
Б. $5{,}6 \cdot 10^{-4} = 5{,}6 \cdot 0{,}0001 = 0{,}00056$. **Ответ**: Б.

2. $6x$ — количество девочек; $5x$ — число мальчиков.
$6x + 5x = 66$; $11x = 66$; $x = 6$. Было 36 девочек и 30 мальчиков.
Из этого количества детей можно составить 30 пар.
Ответ: В.

3. $\sqrt{30}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt{30,25}$ — данные числа;

$\sqrt{27} < \sqrt{30} < \sqrt{30,25}$; $3\sqrt{3} < \sqrt{30} < 5,5$. **Ответ**: Г.

4. $1 - 7(-0,1) + 30(-0,1)^2 = 1 + 0,7 + 30 \cdot 0,01 = 1,7 + 0,3 = 2$.
Ответ: 2.

5. a (р) — первоначальный счет в банке; 20% от a (р) составляет $0,2a$ (р); $(a + 0,2a)$ р — сумма на счету через 1 год.
Ответ: А.

6. 1) разложим на множители; $x^2 + 2x - 3$.

2) $\begin{cases} x_1 x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$ $x_1 = -3; x_2 = 1$.

3) $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ **Ответ**: $(x - 1)(x + 3)$.

7. $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} =$

$= \dfrac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{4xy}{x^2 - y^2}$. **Ответ**: $\dfrac{4xy}{x^2 - y^2}$.

8. $4 \cdot 2^n = 2^2 \cdot 2^n = 2^{2+n}$
Ответ: Г.

9. $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-3} = 0$ $\begin{cases} (x-2)(x+3) = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$ $x_1 = 2; x_2 = -3$.

Ответ: В.

10. x — количество марок на спортивную тему. $x-20$ — количество марок на тему «Фауна». $3x$ — количество марок на тему «Автомобили»; $x + (x-20) + 3x = 85$. **Ответ**: Г.

11. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases} \Bigg| (-2)$ $\begin{cases} -4x - 2y = -2 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$ **Ответ**: (–2; 5).

12. При любом значении x верно неравенство $x^2 + 1 > 0$.
Ответ: Б.

13. $a > 0$; $b > 0$; $a > b$.

А. $-a < -b$; верно

В. $a^2 > b^2$; верно

Б. $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$; неверно

Г. $\sqrt{a} > \sqrt{b}$; верно

Ответ: Б.

14. В — геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$; $q = 2$.
Ответ: В.

15. $y = ax^2 + c$; при $x = 0$, $y = c$; при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

Рис. 1. $a < 0$; $c < 0$; соответств. в);

Рис. 2. $a > 0$; $c < 0$; соответств. б);

Рис. 3. $a < 0$; $c > 0$; соответств. а).

Ответ:

1	2	3
в	б	а

16. 5 л. воды вытекло в 1 мин; $5x$ л. воды вытекло за x мин. Остаток $y = 100 - 5x$; y — количество воды, остающейся в баке.

Ответ: А.

Вариант 2

1. В. $1{,}9 \cdot 10^{-5} = 1{,}9 \cdot 0{,}00001 = 0{,}000019$. **Ответ**: В.

2. $2x$ — число девочек; $5x$ — число мальчиков; $2x + 5x = 28$; $7x = 28$; $x = 4$. Было 8 девочек и 20 мальчиков. Могут одновременно выступать 8 девочек и 16 мальчиков, т.е. 8 троек. **Ответ**: Б.

3. $\sqrt{49}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{48} < \sqrt{49} < \sqrt{50}$; $4\sqrt{3} < \sqrt{49} < 5\sqrt{2}$.

Ответ: Г.

4. $1 - 10(-0{,}2) + 5(-0{,}2)^2 = 1 + 2 + 5 \cdot 0{,}04 = 3 + 0{,}2 = 3{,}2$. **Ответ**: 3,2.

5. a р — получает клиент через банкомат; 3% от a р составляет $0{,}03a$ (р); $(a + 0{,}03a)$ р будет снято со счета клиента. **Ответ:** Б.

6. Разложим на множители $x^2 + 3x - 10$.

$$\begin{cases} x_1 x_2 = -10 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases} \quad x_1 = -5;\ x_2 = 2. \quad x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$$

Ответ: $(x-2)(x+5)$.

7. $$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2+y^2}{(x-y)(x+y)} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2+y^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2+y^2-x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Ответ: $\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

8. $9 \cdot 3^k = 3^2 \cdot 3^k = 3^{2+k}$. **Ответ**: А.

9. $$\frac{(x-3)(x+2)}{x-2} = 0 \quad \begin{cases} (x-3)(x+2) = 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \quad x_1 = 3;\ x_2 = -2.$$

Ответ: В.

10. x — количество страниц, прочитанных в 1-й день; $2x$ — количество страниц, прочитанных во 2-й день; $2x-4$ — количество страниц, прочитанных в 3-й день; $x + 2x + (2x-4) = 84$.

Ответ: В.

11. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \Big| -2 \quad \begin{cases} -4x-2y=-2 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ **Ответ**: (2; –3).

12. $x^2 + 1 < 0$. Это неравенство не имеет решений. **Ответ**: Г.

13. $x > 0; y > 0; x < y$

А. $-x > -y$; верно

Б. $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$; верно

В. $x^2 < y^2$; верно

Г. $\sqrt{x} > \sqrt{y}$; неверно

Ответ: Г.

14. Г — арифметическая прогрессия с $a_1 = 2$, $d = 2$.

Ответ: Г.

15. Рис. 1. $a > 0$; $c < 0$; соответств. г); Рис. 2. $a > 0$; $c > 0$; соответств. а); Рис. 3. $a < 0$; $c > 0$; соответств. б)

Ответ:

1	2	3
г	а	б

16. 40 л. бензина было в баке. На 10 км. пути расход 1 л. бензина; $\dfrac{x}{10}$ — расход бензина за x км; остаток $40-\dfrac{x}{10}$ л.

Ответ: А.

Работа № 11

Вариант 1

1. Найдем наименьшее из чисел $\dfrac{7}{10};\dfrac{7}{9};\dfrac{4}{5}$. Приведем дроби к одному числителю.

$\dfrac{7}{10}=\dfrac{28}{40}$; $\dfrac{7}{9}=\dfrac{28}{36}$; $\dfrac{4}{5}=\dfrac{28}{35}$. Наименьшее число $\dfrac{28}{40}=\dfrac{7}{10}$.

Ответ: А.

2. 80% составляет 680 р. 680:80·100 = 850 (р.); 850 р. — цена товара до распродажи. **Ответ**: Г.

3. $\dfrac{-0,7-0,3}{-0,7+0,3}=\dfrac{-1}{-0,4}=\dfrac{10}{4}=2,5$. **Ответ**: 2,5.

4. $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}=\frac{a-c}{ac}$; $b=\frac{ac}{a-c}$. **Ответ**: Г.

5. Выражение $\sqrt{-2x}$ имеет смысл, если $-2x \geq 0$ $x \leq 0$.
Ответ: Б.

6. $(c+2)(c-3)-(c-1)^2 = c^2+2c-3c-6-c^2+2c-1 = c-7$
Ответ: А.

7. $\sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} \cdot \sqrt{21} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10 \cdot 21}{10 \cdot 9}} = \sqrt{7}$ **Ответ**: $\sqrt{7}$.

8. $2^{k-3}=\frac{2^k}{2^3}$. **Ответ**: Б.

9. $\frac{1}{3}x^2-12=0$; $x^2-36=0$; $(x-6)(x+6)=0$; $x_1=6$; $x_2=-6$.
Ответ: –6; 6.

10. x карандашей в маленькой коробке; y карандашей в большой коробке. $\begin{cases} 2y+3x=38 & (1) \\ 3y+2x=42 & (2) \end{cases}$. Сложим почленно (1) и (2); $5y+5x=80$; $x+y=16$.
Ответ: 16.

11. Графики функций $y=x^3$ и $y=2x+4$ пересекаются в точке (2; 8). Решением уравнения $x^3-2x-4=0$ является абсцисса точки пересечения. 2 — решение этого уравнения.
Ответ: $x=2$.

12. 1) $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$ — рисунок а)

2) $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -4$ — рисунок г)

3) $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ — рисунок в)

Ответ:

1	2	3
а)	г)	в)

13. Неверно неравенство 5, так как $\frac{p}{3}<\frac{q}{3} \Leftrightarrow p<q$, а по условию $p>q$.
Ответ: Б.

14. $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $\frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5} \neq \frac{1}{5}$. **Ответ**: В.

15. $\begin{cases} y = -2x^2 + 4x + 6 \\ y = 0 \end{cases}$

1) $-2x^2 + 4x + 6 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $\begin{cases} x_1 x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$; $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

Ответ: (3; 0).

16. Пешеход затратил на путь из A в B 60 минут, а велосипедист 50 – 20 = 30 минут. 60 – 30 = 30.

Ответ: на 30 минут.

Вариант 2

1. Сравните числа $\frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{9}{8}, \frac{3}{5}$ и укажите наименьшее из них.

Приведем дроби $\frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{3}{5}$ к одному знаменателю.

$\frac{36}{45}; \frac{40}{45}; \frac{27}{45}$. Наименьшее из них $\frac{27}{45} = \frac{3}{5}$. **Ответ**: Г.

2. 780 р. составляет 130%; 780:130·100 = 600 (р).
Ответ: Г.

3. $\frac{-0,4+0,5}{-0,4-0,5} = \frac{0,1}{-0,9} = -\frac{1}{9}$. **Ответ**: $-\frac{1}{9}$.

4. $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$; $\frac{1}{a} = \frac{b+c}{bc}$; $a = \frac{bc}{b+c}$. **Ответ:** А.

5. Выражение $\sqrt{1-x}$ имеет смысл, если $1 - x \geq 0$; $x \leq 1$.
Ответ: Б.

6. $(a-1)^2-(a+1)(a-2) = a^2-2a+1-(a^2+a-2a-2) =$
$= a^2-2a+1-a^2+a+2 = -a+3$
Ответ: Б.

7. $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{\frac{5 \cdot 4 \cdot 15}{12 \cdot 5}} = \sqrt{5}$. **Ответ:** $\sqrt{5}$.

8. $2^{5-k} = \frac{2^5}{2^k}$. **Ответ:** Б.

9. $\frac{1}{4}x^2 - 16 = 0$; $x^2 - 64 = 0$; $(x-8)(x+8) = 0$; $x_1 = 8$; $x_2 = -8$.

Ответ: –8; 8.

10. x (р) — цена 1 тюльпана; y (р) — цена 1 нарцисса

$$\begin{cases} 3x + 2y = 80 & (1) \\ 2x + 3y = 70 & (2) \end{cases}$$

Сложим почленно (1) и (2); $5x + 5y = 150$; $x + y = 30$.

Ответ: 30.

11. $y = x^3$; $y = -x + 2$; 1) $x^3 = -x + 2$; $x = 1$. **Ответ**: $x = 1$.

12. 1) $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$ — рисунок в)

2) $\begin{cases} x \le -1 \\ x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -1$ — рисунок а)

3) $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 5 \end{cases}$ — рисунок б).

Ответ:

1	2	3
в)	а)	б)

13. Неверно неравенство Г, так как $-\frac{a}{2} < -\frac{b}{2} \Leftrightarrow a > b$, а по условию $a < b$.

Ответ: Г.

14. $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $\frac{(-1)^6}{6} = \frac{1}{6} \ne -\frac{1}{6}$; $\frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$;

$\frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$; $\frac{(-1)^1}{1} = -1$

Ответ: Г.

15. $\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 6 \\ y = 0 \end{cases}$; $2x^2 - 4x - 6 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $\begin{cases} x_1 x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

$x_1 = 3$; $x_2 = -1$; А (–1; 0).

Ответ: (–1; 0).

16. Пешеход затратил на путь из A в B 60 минут, а велосипедист на путь из B в A 50 – 30 = 20 минут.

60 – 20 = 40

Ответ: на 40 минут.

Работа № 12

Вариант 1

1. 1) $(a^2)^3a^2 = a^6 \cdot a^2 = a^8$ — в) 2) $(a^2a^3)^2 = (a^5)^2 = a^{10}$ — б)

3) $\dfrac{(a^3)^3}{a^2} = \dfrac{a^9}{a^2} = a^7$ — г)

Ответ:

1	2	3
в)	б)	г)

2. $4y(y-4) - (y-8)^2 = 4y^2 - 16y - (y^2 - 16y + 64) =$
$= 4y^2 - 16y - y^2 + 16y - 64 = 3y^2 - 64$
Ответ: $3y^2 - 64$.

3. $\dfrac{a^2-4}{4a^2-8a} = \dfrac{(a-2)(a+2)}{4a(a-2)} = \dfrac{a+2}{4a}$. **Ответ:** $\dfrac{a+2}{4a}$.

4. При $x = -3$ $\sqrt{3-2x} = \sqrt{3-2\cdot(-3)} = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$ — рациональное число.
Ответ: Г.

5. Стороны раздевалки равны b и $(a-b)$. Площадь оставшейся части зала равна $S = a^2 - b(a-b) = a^2 - ab + b^2$.
Ответ: Г.

6. $\dfrac{1}{2}$ и $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ меньше 1; 2 и $\sqrt{2}$ больше 1.

$\dfrac{1}{2} < \sqrt{\dfrac{1}{2}}$, т.к. $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$; $\sqrt{2} < 2$, т.к. $2 < 4$ **Ответ:** В.

7. Признак делимости на 3: число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.
$2 + 0 + 2 + 9 + 3 = 16$ — не делится на 3, поэтому число 20293 не делится на 3.
Ответ: В.

8. Число абонентов за год уменьшилось на 10 тыс. человек, что составляет $\dfrac{10}{200} \cdot 100\% = 5\%$. **Ответ:** А.

9. $2x^2 + 3x - 2 = 0$
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 5}{4}$; $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = -2$.
Ответ: -2; $0{,}5$.

10. Пусть x км/ч — скорость автобуса, тогда скорость автомобиля рана $(x + 25)$ км/ч.

Составим уравнение:

$3x = 2(x + 25)$;

$3x = 2x + 50$;

$x = 50$ (км/ч)

Искомое расстояние равно $3x = 3 \cdot 50 = 150$ км.

Ответ: 150 км.

11. Уравнение прямой l: $y = kx + b$.

$M \in l : 9 = 11k + b$

$N \in l : 11 = 15k + b$

$$\begin{cases} 11k + b = 9; \\ 15k + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11k + b = 9; \\ 4k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3,5 \\ k = 0,5 \end{cases}$$

$y = 0,5x + 3,5 \Leftrightarrow 2y = x + 7 \Leftrightarrow x - 2y = -7$

Ответ: В.

12. $3 - x \geq 3x + 5$

$-x - 3x \geq 5 - 3$

$-4x \geq 2 \,|\, : (-4)$

$x \leq -0,5$

Ответ: $x \in (-\infty; -0,5]$.

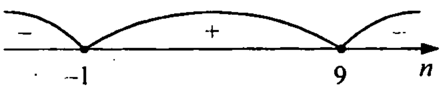
13. Так как $b < c$, то разность $b - c$ отрицательна.

Ответ: Б.

14. $a_n = \dfrac{10}{n+1} > 1$

$\dfrac{10}{n+1} - 1 > 0$

$\dfrac{10 - n - 1}{n+1} > 0$



$\dfrac{9 - n}{n+1} > 0$

$-1 < n < 9 \Leftrightarrow$ (т.к. $n \in \mathbb{N}$) $1 \leq n \leq 8$.

Ответ: 8 членов.

15. 1) $x^2 + 1 = 0$; $x^2 = -1$ — нет решений

2) $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $x \neq 1$. Точки пересечения с осью Ox $(1; 0)$ и $(-1; 0)$.

3) $-x^2 + 1 = 0$; $x^2 = 1$. Точки пересечения с осью Ox (1; 0) и (–1; 0).
4) $-x^2 - 1 = 0$; $x^2 = -1$ — нет решений.
Ответ: А.

16. При расходах 400 р. (по схеме II 200 минут, по схеме I 160 минут). **Ответ:** Г.

Вариант 2

1. 1) $(c^4c^2)^2 = (c^6)^{12} = c^{12}$ — г) 2) $(c^3)^2c^4 = c^6 \cdot c^4 = c^{10}$ — в)

3) $\left(\frac{c^6}{c^2}\right) = (c^4)^2 = c^8$ — б)

Ответ:

1	2	3
г)	в)	б)

2. $4b(b + 2) - (4 + b)^2 = 4b^2 + 8b - (16 + 8b + b^2) =$
$= 4b^2 + 8b - 16 - 8b - b^2 = 3b^2 - 16$ **Ответ:** $3b^2 - 16$.

3. $\frac{3x^2 - 12x}{x^2 - 16} = \frac{3x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{3x}{x+4}$. **Ответ:** $\frac{3x}{x+4}$.

4. При $x = 6$ $\sqrt{2x-7} = \sqrt{2\cdot 6-7} = \sqrt{12-7} = \sqrt{5}$ — иррациональное число.

5. Стороны помещения для марки машин равны a и $(c - a)$. площадь оставшейся части равна $S = c^2 - a(c - a) = c^2 - ac + a^2$
Ответ: Б.

6. $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}}$ меньше 1; 3 и $\sqrt{3}$ больше 1.

$\frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{3}}$, т.к. $\frac{1}{9} < \frac{1}{3}$; $\sqrt{3} < 3$, т.к. $3 < 9$. **Ответ:** В.

7. Признак делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. 3 + 2 + 1 + 9 = 15 — не делится на 9, поэтому число 3219 не делится на 2.
Ответ: Г.

8. Библиотечный фонд увеличился на 6 тыс. книг, что составляет $\frac{6}{50}\cdot 100\% = 124$. **Ответ:** Б.

9. $3x^2 + 8x - 3 < 0$
$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 64 + 36 = 100$;
$x_{1/2} = \frac{-8 \pm 10}{6}$; $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{1}{3}$. **Ответ:** –3; $\frac{1}{3}$.

10. Пусть скорость грузового автомобиля равна x км/ч, тогда скорость автобуса равна $(x + 20)$ км/ч.

Составим уравнение:

$3(x + 20) = 4x$;

$3x + 60 = 4x$;

$x = 60$ (км/ч)

Расстояние между городами равно $4x = 4 \cdot 60 = 240$ км.

Ответ: 240 км.

11. Уравнение искомой прямой l: $y = kx + b$.

$P \in l : 6 = 10k + b$

$Q \in l : 10 = 12k + b$

$$\begin{cases} 10k + b = 6, \\ 12k + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k + b = 6, \\ 2k = 4 \end{cases}$$

$k = 2$; $b = 6 - 10 \cdot 2 = 6 - 20 = -14$

Уравнение прямой: $y = 2x - 14 \Leftrightarrow 2x - y = 14$. **Ответ:** Г.

12. $x - 1 < 3x + 2$;

$x - 3x < 2 + 1$

$-2x < 3 \mid : (-2)$

$x > -1{,}5$

Ответ: $x \in (-1{,}5; +\infty)$.

13. Так как $c < m$, то разность $(c - m)$ отрицательна.

Ответ: Г.

14. $a_n = \dfrac{n+1}{11} < 1$

$\dfrac{n+1}{11} - 1 < 0$

$\dfrac{n+1-11}{11} < 0$

$n - 10 < 0$

$n < 10$

Т.к. $n \in \mathbb{N}$, то $n = 1; 2; \ldots; 9$.

15. 1) $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$;

2) $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$; $\varnothing$;

3) $-x^2 - 1 = 0$; $x^2 = -1$; $\varnothing$;

4) $-x^2 + 1 = 0$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$. **Ответ:** В.

16. При расходах 60 р. (стоимость разговоров по схеме I будет меньше). **Ответ:** В.

Раздел II. Задания для второй части экзаменационной работы

1. Выражения и преобразования

2 балла

1.1(1) $a^3-ab-a^2b+a^2 = (a^3+a^2)-(ab+a^2b) = a^2(a+1)-ab(1+a) = (a+1)(a^2-ab) = a(a+1)(a-b)$.

Ответ: $a(a+1)(a-b)$.

1.1(2) $x^2y+x^3-x^2-xy = (x^2y+x^3)-(x^2+xy) = x^2(x+y)-x(x+y) = (x+y)(x^2-x) = x(x-1)(x+y)$.

Ответ: $x(x-1)(x+y)$.

1.2(1) $ac^2-c^2-ac+c = c^2(a-1)-c(a-1) = (a-1)(c^2-c) = c(c-1)(a-1)$

Ответ: $c(c-1)(a-1)$.

1.2(2) $x^2y-xy-x^2+x = xy(x-1)-x(x-1) = (x-1)(xy-x) = x(y-1)(x-1)$

Ответ: $x(y-1)(x-y)$.

1.3(1) $16x^2-24xy+9y^2-4x+3y = (16x^2-24xy+9y^2)-(4x-3y) = (4x-3y)^2-(4x-3y) = (4x-3y)(4x-3y-1)$.

Ответ: $(4x-3y)(4x-3y-1)$.

1.3(2) $(4c^2-20ac+25a^2)+5a-2c = (2c-5a)^2-(2c-5a) = (2c-5a)(2c-5a-1)$

Ответ: $(2c-5a)(2c-5a-1)$.

1.4(1) $2x+y+y^2-4x^2 = (2x+y)+(y^2-4x^2) = (2x+y)+(y-2x)(y+2x) = (2x+y)(1+y-2x)$.

Ответ: $(2x+y)(1+y-2x)$.

1.4(2) $a-3b+9b^2-a^2 = (a-3b)-(a^2-9b^2) = (a-3b)-(a-3b)(a+3b) = (a-3b)(1-a-3b)$.

Ответ: $(a-3b)(1-a-3b)$.

1.5(1) $a^2-9b^2+12bc-4c^2 = a^2-(9b^2-12bc+4c^2) = a^2-(3b-2c)^2 = (a-3b+2c)(a+3b-2c)$.

Ответ: $(a-3b+2c)(a+3b-2c)$.

1.5(2) $1-4x^2-4xy-y^2 = 1-(4x^2+4xy+y^2) = 1-(2x+y)^2 = (1-2x-y)(1+2x+y)$.

Ответ: $(1-2x-y)(1+2x+y)$.

1.6(1) 1) Разложим $3x^2-7x+2$ на множители

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6};\ x_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{3}$$

$3x^2-7x+2=3(x-2)(x-\frac{1}{3})=(x-2)(3x-1)$

2) $\frac{3x^2-7x+2}{2-6x}=\frac{(x-2)(3x-1)}{2(1-3x)}=-\frac{x-2}{2}=\frac{2-x}{2}$. **Ответ:** $\frac{2-x}{2}$.

1.6(2) 1) Разложим $5x^2-12x+4$ на множители

$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{5}=\frac{6\pm4}{5}$ $x_1=2$ $x_2=\frac{2}{5}$

$5x^2-12x+4=5(x-2)(x-\frac{2}{5})=(x-2)(5x-2)$

2) $\frac{5x^2-12x+4}{6-15x}=\frac{(x-2)(5x-2)}{3(2-5x)}=-\frac{x-2}{3}=\frac{2-x}{3}$

Ответ: $\frac{2-x}{3}$.

1.7(1) 1) Разложим на множители $3x^2+7x-6$

$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\frac{-7\pm11}{6}$; $x_1=-3$; $x_2=\frac{2}{3}$

2) $\frac{2x-3x^2}{3x^2+7x-6}=\frac{x(2-3x)}{3(x+3)\left(x-\frac{2}{3}\right)}=\frac{x(2-3x)}{(x+3)(3x-2)}=-\frac{x}{x+3}$

Ответ: $-\frac{x}{x+3}$.

1.7(2) 1) Разложим на множители $7x^2+13x-2$

$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{169+56}}{14}=\frac{-13\pm15}{14}$; $x_1=-2$; $x_2=\frac{1}{7}$

2) $\frac{x-7x^2}{7x^2+13x-2}=\frac{x(1-7x)}{7\left(x-\frac{1}{7}\right)(x+2)}=\frac{x(1-7x)}{(7x-1)(x+2)}=-\frac{x}{x+2}$

Ответ: $-\frac{x}{x+2}$.

1.8(1) $\frac{16a^2-8a+1}{1-4a+x-4ax}=\frac{(4a-1)^2}{(1+x)-4a(1+x)}=\frac{(4a-1)^2}{(1+x)(1-4a)}=$

$\frac{(1-4a)^2}{(1+x)(1-4a)}=\frac{1-4a}{1+x}$. **Ответ:** $\frac{1-4a}{1+x}$.

1.8(2)

$$\frac{6c-1-y+6cy}{1-12c+36c^2}=\frac{6c(1+y)-(1+y)}{(1-6c)^2}=\frac{(1+y)(6c-1)}{(6c-1)^2}=\frac{1+y}{6c-1}.$$

Ответ: $\frac{1+y}{6c-1}$.

1.9(1)

$$\frac{3x+xy^2-x^2y-3y}{y^2-x^2}=\frac{3(x-y)+xy(y-x)}{(y-x)(y+x)}=\frac{(y-x)(xy-3)}{(y-x)(y+x)}=\frac{xy-3}{y+x}.$$

Ответ: $\frac{xy-3}{y+x}$.

1.9(2)

$$\frac{b^2-a^2}{a^2b+2b-ab^2-2a}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)+ab(a-b)}=\frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)(2-ab)}=\frac{b+a}{2-ab}.$$

Ответ: $\frac{b+a}{2-ab}$.

1.10(1) $\left(\frac{2m}{2m+n}-\frac{4m^2}{4m^2+4mn+n^2}\right):\left(\frac{2m}{4m^2-n^2}+\frac{1}{n-2m}\right)=$

$$=2m\left(\frac{1}{2m+n}-\frac{2m}{(2m+n)^2}\right):\left(\frac{2m}{(2m-n)(2m+n)}+\frac{1}{n-2m}\right)=$$

$$=2m\left(\frac{2m+n-2m}{(2m+n)^2}\right):\left(\frac{2m-2m-n}{(2m-n)(2m+n)}\right)=$$

$$=2m\cdot\frac{n}{(2m+n)^2}:\frac{-n}{(2m-n)(2m+n)}=-\frac{2m(2m-n)(2m+n)}{(2m+n)^2}=$$

$$=-\frac{2m(2m-n)}{2m+n}=\frac{2m(n-2m)}{2m+n}.$$

Ответ: $\frac{2m(n-2m)}{2m+n}$

1.10(2) $\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+y^2+2xy}\right):\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x^2}{y^2-x^2}\right)=$

$$=x^2\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}\right):\left(x\left(\frac{1}{x+y}+\frac{x}{(y-x)(y+x)}\right)\right)=$$

$$=x\left(\frac{x+y-x}{(x+y)^2}\right):\left(\frac{y-x+x}{(y-x)(x+y)}\right)=x\cdot\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right):\frac{y}{(y-x)(x+y)}=$$

$$=\frac{x(y-x)(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{x(y-x)}{x+y}.$$

Ответ: $\frac{x(y-x)}{x+y}$.

1.11(1) $\left(\frac{y}{x^2-xy}-\frac{1}{x-y}\right):\left(\frac{x+y}{x^2-xy}-\frac{y}{xy-y^2}\right)=$

$=\left(\frac{y}{x(x-y)}-\frac{1}{x-y}\right):\left(\frac{x+y}{x(x-y)}-\frac{y}{y(x-y)}\right)=$

$=\left(\frac{y-x}{x(x-y)}\right):\left(\frac{y(x+y)-xy}{xy(x-y)}\right)=-\frac{1}{x}:\left(\frac{xy+y^2-xy}{xy(x-y)}\right)=$

$=-\frac{1}{x}:\frac{y^2}{xy(x-y)}=-\frac{1}{x}:\frac{y^2}{xy(x-y)}=-\frac{1}{x}:\frac{y}{x(x-y)}=-\frac{x-y}{y}=\frac{y-x}{y}$

Ответ: $\frac{y-x}{y}$.

1.11(2) $\left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{b^2+ab}\right)\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}-\frac{b}{a^2-ab}\right)=$

$=\left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{b(a+b)}\right)\left(\frac{b^2}{a\left(a^2-b^2\right)}-\frac{b}{a(a-b)}\right)=$

$=\left(\frac{b-a}{b(a+b)}\right)\cdot b\cdot\left(\frac{b}{a(a-b)(a+b)}-\frac{1}{a(a-b)}\right)=$

$=\frac{b-a}{a+b}\cdot\frac{(b-a-b)}{a(a-b)(a+b)}=\frac{a(a-b)}{a(a-b)(a+b)^2}=\frac{1}{(a+b)^2}$

Ответ: $\frac{1}{(a+b)^2}$.

1.12(1) $\left(\frac{2}{c-2}+\frac{3c-21}{c^2+c-6}+\frac{2c}{c+3}\right)\cdot\frac{c}{2c-5}=$

$=\left(\frac{2}{c-2}+\frac{3c-21}{(c-2)(c+3)}+\frac{2c}{c+3}\right)\cdot\frac{c}{2c-5}=$

$=\frac{2(c+3)+3c-21+2c(c-2)}{(c-2)(c+3)}\cdot\frac{c}{2c-5}=$

$=\frac{2c+6+3c-21+2c^2-4c}{(c-2)(c+3)}\cdot\frac{c}{2c-5}=\frac{\left(2c^2+c-15\right)\cdot c}{(c-2)(c+3)\cdot(2c-5)}$

Разложим на множители $2c^2+c-15$:

$2c^2+c-15=2(c+3)(c-2{,}5)=(c+3)(2c-5)$

$c_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{4}=\frac{-1\pm 11}{4}$; $c_1=-3$; $c_2=2{,}5$.

Искомое разложение будет: $\dfrac{(c+3)(2c-5)\cdot c}{(c-2)(c+3)(2c-5)}=\dfrac{c}{c-2}$.

Ответ: $\dfrac{c}{c-2}$.

1.12(2) $\left(\dfrac{3}{y-4}+\dfrac{4y-6}{y^2-3y-4}+\dfrac{2y}{y+1}\right)\cdot\dfrac{y}{2y-3}=$

$=\left(\dfrac{3}{y-4}+\dfrac{4y-6}{(y-4)(y+1)}+\dfrac{2y}{y+1}\right)\cdot\dfrac{y}{2y-3}=$

$=\left(\dfrac{3(y+1)+4y-6+2y(y-4)}{(y-4)(y+1)}\right)\cdot\dfrac{y}{2y-3}=$

$=(\dfrac{3y+3+4y-6+2y^2-8y}{(y-4)(y+1)})\cdot\dfrac{y}{2y-3}=\dfrac{(2y^2-y-3)\cdot y}{(y-4)(y+1)(2y-3)}$

Разложим на множители $2y^2-y-3$

$y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\dfrac{1\pm 5}{4}$; $y_1=-1$; $y_2=\dfrac{3}{2}$

$2y^2-y-3=2(y+1)(y-\dfrac{3}{2})=(y+1)(2y-3)$

Искомое разложение $\dfrac{y(2y-3)(y+1)}{(y-4)(y+1)(2y-3)}=\dfrac{y}{y-4}$.

Ответ: $\dfrac{y}{y-4}$.

1.13(1) $\dfrac{4x^2-1}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{x-2}{2x+1}-\dfrac{1+x}{x-3}$

1) Разложим на множители x^2-5x+6: $\begin{cases}x_1x_2=6\\ x_1+x_2=5\end{cases}$

$x_1=2$; $x_2=3$; $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

$\dfrac{(2x-1)(2x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)(2x+1)}-\dfrac{1+x}{x-3}=\dfrac{2x-1}{x-3}-\dfrac{1+x}{x-3}=\dfrac{2x-1-1-x}{x-3}=\dfrac{x-2}{x-3}$

Ответ: $\dfrac{x-2}{x-3}$.

1.13(2) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x+1}{3x+1}\cdot\dfrac{9x^2-1}{x^2-x-2}$

1) Разложим на множители x^2-x-2:

$$\begin{cases} x_1x_2=-2 \\ x_1+x_2=1 \end{cases}; x_1=2;\ x_2=-1;\ x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

2) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{(x+1)(3x-1)(3x+1)}{(3x+1)(x-2)(x+1)}=\frac{x-1}{x-2}-\frac{3x-1}{x-2}=\frac{x-1-3x+1}{x-2}=$

$=\frac{-2x}{x-2}=\frac{2x}{2-x}$. **Ответ:** $\frac{2x}{2-x}$.

1.14(1) $\frac{3c-6}{c+2}-\frac{c}{(c+2)^2}:\frac{c}{c^2-4}-\frac{4c}{c+2}=\frac{3c-6}{c+2}-$

$-\frac{c}{(c+2)^2}:\frac{1}{(c-2)(c+2)}-\frac{4c}{c+2}=\frac{3c-6}{c+2}-\frac{1}{c+2}:\frac{1}{c-2}-\frac{4c}{c+2}=$

$=\frac{3c-6}{c+2}-\frac{c-2}{c+2}-\frac{4c}{c+2}=\frac{3c-6-c+2-4c}{c+2}=\frac{-2c-4}{c+2}=\frac{-2(c+2)}{c+2}=-2$

Ответ: -2.

1.14(2) $\frac{6}{a-1}-\frac{10}{(a-1)^2}:\frac{10}{a^2-1}-\frac{2a+2}{a-1}=\frac{6}{a-1}-$

$-\frac{1}{(a-1)^2}:\frac{1}{(a-1)(a+1)}-\frac{2a+2}{a-1}=\frac{6}{a-1}-\frac{1}{a-1}:\frac{1}{a+1}-\frac{2a+2}{a-1}=$

$=\frac{6}{a-1}-\frac{a+1}{a-1}-\frac{2a+2}{a-1}=\frac{6-a-1-2a-2}{a-1}=\frac{3-3a}{a-1}=\frac{3(1-a)}{a-1}=-3$

Ответ: -3.

1.15(1) $\frac{8\cdot100^n}{2^{2n+1}\cdot5^{2n-2}}=\frac{2^3\cdot(25\cdot4)^n}{2^{2n+1}\cdot5^{2n-2}}=\frac{2^3\cdot5^{2n}\cdot2^{2n}}{2^{2n+1}\cdot5^{2n-2}}=$

$=2^{3+2n-2n-1}\cdot5^{2n-2n+2}=2^2\cdot5^2=10^2=100$.

Ответ: 100.

1.15(2) $\frac{4\cdot36^n}{3^{2n-3}\cdot2^{2n+2}}=\frac{4\cdot(9\cdot4)^n}{3^{2n-3}\cdot2^{2n+2}}=\frac{2^2\cdot3^{2n}\cdot2^{2n}}{3^{2n-3}\cdot2^{2n+2}}=$

$=2^{2+2n-2n-2}\cdot3^{2n-2n+3}=2^0\cdot3^3=27$.

Ответ: 27.

1.16(1) $\frac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2\cdot5^n}=\frac{5^{n-1}\left(5^{n+1-n+1}-1\right)}{2\cdot5^n}=\frac{5^{n-1}\cdot\left(5^2-1\right)}{2\cdot5^n}=$

$=\frac{5^{n-1}\cdot24}{2\cdot5^n}=\frac{5^n\cdot24}{5\cdot2\cdot5^n}=\frac{12}{5}=2{,}4$. **Ответ:** 2,4.

1.16(2)

$$\frac{10\cdot 2^n}{2^{n+1}+2^{n-1}}=\frac{10\cdot 2^n}{2^{n-1}\left(2^{n+1-n+1}+1\right)}=\frac{10\cdot 2^n}{2^{n-1}\cdot\left(2^2+1\right)}=\frac{10\cdot 2^n\cdot 2}{2^n\cdot 5}=4$$

Ответ: 4.

1.17(1) $3\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^2-2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)-1=\frac{3(1-\sqrt{2})^2}{9}-\frac{2(1-\sqrt{2})}{3}-1=$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{3}-\frac{2\left(1-\sqrt{2}\right)}{3}-1=\frac{1-2\sqrt{2}+2-2+2\sqrt{2}-3}{3}=-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

1.17(2) $2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2-6\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)+3=\frac{(3-\sqrt{5})^2}{2}-\frac{6(3-\sqrt{5})}{2}+3=$

$$=\frac{9-6\sqrt{5}+5-18+6\sqrt{5}+6}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

Ответ: 1.

1.18(1)

$$\left(\sqrt{5}+4\right)^2-6\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+4\right)-1=5+8\sqrt{5}+16-30-24\sqrt{5}-1=$$

$$=-10-16\sqrt{5}.$$

Ответ: $-10-16\sqrt{5}$

1.18(2)

$$\left(\sqrt{2}-3\right)^2-4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)+2=2-6\sqrt{2}+9-8+12\sqrt{2}+2=5+6\sqrt{2}.$$

Ответ: $5+6\sqrt{2}$.

1.19(1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=$

$$=\frac{5+3-2\sqrt{15}-5-3-2\sqrt{15}}{5-3}=-\frac{4\sqrt{15}}{2}=-2\sqrt{15}.$$

Ответ: $-2\sqrt{15}$

1.19(2) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)^2}{\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)}=$

$$=\frac{10+6+2\sqrt{60}-10-6+2\sqrt{60}}{10-6}=\frac{4\sqrt{60}}{4}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}.$$

Ответ: $2\sqrt{15}$.

1.20(1)

$$\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{10}-2)(\sqrt{10}+2)}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{10-4}}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.20(2)

$$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{\sqrt{15}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{15}-3}}=\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{(\sqrt{15}+3)(\sqrt{15}-3)}}=\frac{\sqrt{6\cdot 9}}{\sqrt{(\sqrt{15})^2-9}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=3$$

Ответ: 3.

1.21(1) Докажите, что $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$

$(3-2\sqrt{2})^2=9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}$

1.21(2) Докажите, что $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$

$(2\sqrt{3}-3)^2=12-12\sqrt{3}+9=21-12\sqrt{3}$

4 балла

1.22(1) $ab^2-b^2y-ax+xy+b^2-x=(ab^2-b^2y+b^2)-(ax-xy+x)=b^2(a-y+1)-x(a-y+1)=(a-y+1)(b^2-x)$

Ответ: $(a-y+1)(b^2-x)$.

1.22(2) $a^2b-ab^2-ax+ab+bc-c=(a^2b-ab^2+ab)-(ac-bc+c)=$
$=ab(a-b+1)-c(a-b+1)=(a-b+1)(ab-c)$

Ответ: $(a-b+1)(ab-c)$.

1.23(1) $ax^2-2ax-bx^2+2bx-b+a=(ax^2-2ax+a)-(bx^2-2bx+b)=$
$=a(x^2-2x+1)-b(x^2-2x+1)=(x^2-2x+1)(a-b)=(x-1)^2(a-b)$

Ответ: $(x-1)^2(a-b)$.

1.23(2) $by^2+4by-cy^2-4cy-4c+4b=y^2(b-c)+4y(b-c)+4(b-c)=$
$=(b-c)(y^2+4y+4)=(b-c)(y+2)^2$

Ответ: $(b-c)(y+2)^2$.

1.24(1) $x^4-7x^2-18=(x^2-9)(x^2+2)=(x-3)(x+3)(x^2+2)$

пусть $x^2=y$; $y^2-7y-18=(y-9)(y+2)$; $\begin{cases} y_1y_2=-18 \\ y_1+y_2=7 \end{cases}$; $y_1=9, y_2=-2$.

Ответ: $(x-3)(x+3)(x^2+2)$.

1.24(2) $x^4-x^2-12=(x^2-4)(x^2+3)=(x-2)(x+2)(x^2+3)$

$x^2=y$; $y^2-y-12=(y-4)(y+3)$; $\begin{cases} y_1y_2=-12 \\ y_1+y_2=1 \end{cases}$; $y_1=4, y_2=-3$.

Ответ: $(x-2)(x+2)(x^2+3)$.

1.25(1) $4x^4-5x^2+1=(x^2-1)(4x^2-1)$;

$x^2=y;\ 4y^2-5y+1=4(y-1)\left(y-\frac{1}{4}\right)=(y-1)(4y-1)$, поскольку

$y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{5\pm3}{8}$; $y_1=1;\ y_2=\frac{1}{4}$.

Далее $x^2=1$; $x^2=\frac{1}{4}$; $x_{1,2}=\pm1$; $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$; имеем:

$4x^4-5x^2+1=4(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$.

Ответ: $(x-1)(x+1)(2x-1)(2x+1)$.

1.25(2) $9x^4-13x^2+4=(x^2-1)(9x^2-4)=(x-1)(x+1)(3x-2)(3x+2)$

$x^2=y;\ 9y^2-13y+4=9(y-1)\left(y-\frac{4}{9}\right)=(y-1)(9y-4)$

$y_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{18}=\frac{13\pm5}{18}$; $y_1=1;\ y_2=\frac{4}{9}$;

$x_{1,2}=\pm1$; $x_{3,4}=\pm\frac{2}{3}$;

$9x^4-13x^2+4=9(x+1)(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

Ответ: $(x-1)(x+1)(3x-2)(3x+2)$.

1.26(1) $x^2y^2-5xy^2+6y^2-x^2+5x-6=(x^2y^2-x^2)-(5xy^2-5x)+(6y^2-6)=$
$=x^2(y^2-1)-5x(y^2-1)+6(y^2-1)=(y^2-1)(x^2-5x+6)=(y-1)(y+1)(x-2)(x-3)$

Ответ: $(y-1)(y+1)(x-2)(x-3)$.

1.26(2) $x^2y^2-5x^2y+4x^2-y^2+5y-4=(x^2y^2-y^2)-(5x^2y-5y)+(4x^2-4)=$
$=y^2(x^2-1)-5y(x^2-1)+4(x^2-1)=(x^2-1)(y^2-5y+4)=(x-1)(x+1)(y-4)(y-1)$

Ответ: $(x-1)(x+1)(y-4)(y-1)$.

1.27(1) $\frac{2a^2-2b^2-a+b}{1-2a-2b}=\frac{2\left(a^2-b^2\right)-(a-b)}{1-2a-2b}=$

$=\frac{2(a-b)(a+b)-(a-b)}{1-2a-2b}=\frac{(a-b)(2a+2b-1)}{1-2a-2b}=-(a-b)=b-a$.

Ответ: $b-a$.

1.27(2) $\frac{y-x-3y^2+3x^2}{3x+3y-1}=\frac{(y-x)-3(y^2-x^2)}{3x+3y-1}=$

$=\frac{(y-x)-3(y-x)(y+x)}{3x+3y-1}=\frac{(y-x)(1-3y-3x)}{3x+3y-1}=-(y-x)=x-y$.

Ответ: $x-y$.

1.28(1) $\frac{x^2-10xy+25y^2-1}{(1-x+5y)(x+5y+1)}=\frac{(x-5y)^2-1}{(1-x+5y)(x+5y+1)}=$

$=\frac{(x-5y-1)(x-5y+1)}{(1-x+5y)(x+5y+1)}=-\frac{x-5y+1}{x+5y+1}=\frac{5y-x-1}{x+5y+1}$.

Ответ: $\frac{5y-x-1}{x+5y+1}$.

1.28(2) $\frac{a^2-6ab+9b^2-4}{(2-a+3b)(a+3b+2)}=\frac{(a-3b)^2-4}{(2-a+3b)(a+3b+2)}=$

$=\frac{(a-3b-2)(a-3b+2)}{(2-a+3b)(a+3b+2)}=-\frac{a-3b+2}{a+3b+2}=\frac{3b-a-2}{3b+a+2}$.

Ответ: $\frac{3b-a-2}{3b+a+2}$.

1.29(1) $\frac{6a^2-a-1}{8a+b-2ab-4}=\frac{6\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)}{2a(4-b)-(4-b)}=\frac{(2a-1)(3a+1)}{(4-b)(2a-1)}=$

$=\frac{3a+1}{4-b}$, т.к. если разложить на множители $6a^2-a-1$, то

$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm5}{12}$; $a_1=-\frac{1}{3}$; $a_2=\frac{1}{2}$;

$6a^2-a-1=6\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)=(2a-1)(3a+1)$. **Ответ:** $\frac{3a+1}{4-b}$.

1.29(2)

$\frac{10a-3b-2ab+15}{4a^2+4a-3}=\frac{2a(5-b)+3(5-b)}{4\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)}=\frac{(5-b)(2a+3)}{(2a+3)(2a-1)}=$

$=\frac{5-b}{2a-1}$. Если разложить на множители $4a^2+4a-3$, то получим

$a_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}=\frac{-2\pm4}{4}$; $a_1=-\frac{3}{2}$; $a_2=\frac{1}{2}$;

$4a^2+4a-3=4\left(a+\frac{3}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)=(2a+3)(2a-1)$.

Ответ: $\frac{5-b}{2a-1}$.

1.30(1) $\frac{(x+1)^2+(x-1)^3}{2x^2+6}=\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{2\left(x^2+3\right)}=$

$=\frac{2x^3+6x}{2\left(x^2+3\right)}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{2\left(x^2+3\right)}=x$. **Ответ:** x.

1.30(2) $\frac{6x^2+2}{(x+1)^3-(x-1)^3}=\frac{6x^2+2}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1}=$

$=\frac{6x^2+2}{6x^2+2}=1$. **Ответ:** 1

1.31(1) $\frac{a-3}{4a^2+24a+36}:\left(\frac{a}{3a-9}-\frac{3}{a^2+3a}+\frac{a^2+9}{27-3a^2}\right)=$

$=\frac{a-3}{4\left(a^2+6a+9\right)}:\left(\frac{a}{3(a-3)}-\frac{3}{a(a+3)}+\frac{a^2+9}{3\left(9-a^2\right)}\right)=$

$=\frac{a-3}{4(a+3)^2}:\left(\frac{a^2(a+3)-9(a-3)-\left(a^2+9\right)a}{3a(a-3)(a+3)}\right)=$

$=\frac{a-3}{4(a+3)^2}:\left(\frac{a^3+3a^2-9a+27-a^3-9a}{3a(a-3)(a+3)}\right)=$

$=\frac{a-3}{4(a+3)^2}:\frac{3a^2-18a+27}{3a(a-3)(a+3)}=\frac{a-3}{4(a+3)^2}:\frac{3\left(a^2-6a+9\right)}{3a(a-3)(a+3)}=$

$=\frac{(a-3)\cdot 3a\cdot(a-3)(a+3)}{4(a+3)^2\cdot 3(a-3)^2}=\frac{a(a-3)^2(a+3)}{4(a+3)^2(a-3)^2}=\frac{a}{4(a+3)}=\frac{a}{4a+12}$

Ответ: $\frac{a}{4a+12}$.

1.31(2) $\left(\frac{x}{4x+16}-\frac{x^2+16}{4x^2-64}-\frac{4}{x^2-4x}\right)\cdot\frac{3x^2-24x+48}{x+4}=$

$=\left(\frac{x}{4(x+4)}-\frac{x^2+16}{4\left(x^2-16\right)}-\frac{4}{x(x-4)}\right)\cdot\frac{3\left(x^2-8x+16\right)}{x+4}=$

$=\left(\frac{x^2(x-4)-x\left(x^2+16\right)-16(x+4)}{4x(x+4)(x-4)}\right)\cdot\frac{3(x-4)^2}{x+4}=$

$$=\frac{\left(x^3-4x^2-x^3-16x-16x-16x-64\right)\cdot 3\cdot(x-4)^2}{4x(x+4)(x-4)(x+4)}=$$

$$=\frac{\left(-4x^2-32x-64\right)\cdot 3\cdot(x-4)^2}{4x(x+4)^2(x-4)}=\frac{-4\left(x^2+8x+16\right)\cdot 3\cdot(x-4)}{4x(x+4)^2}=$$

$$=\frac{-3(x+4)^2(x-4)}{x(x+4)^2}=\frac{-3(x-4)}{x}=\frac{12-3x}{x}.$$

Ответ: $\frac{12-3x}{x}$.

1.32(1) $\frac{36-y^2}{y-8}\cdot\left(\frac{y}{y-6}-\frac{2y}{y^2-12y+36}\right)+\frac{12y}{y-6}=$

$$=\frac{36-y^2}{y-8}\cdot\left(\frac{y}{y-6}-\frac{2y}{(y-6)^2}\right)+\frac{12y}{y-6}=$$

$$=\frac{36-y^2}{y-8}\cdot\left(\frac{y(y-6)-2y}{(y-6)^2}\right)+\frac{12y}{y-6}=$$

$$=\frac{36-y^2}{y-8}\cdot\left(\frac{y^2-6y-2y}{(6-y)^2}\right)+\frac{12y}{y-6}=\frac{(6-y)(6+y)\left(y^2-8y\right)}{(y-8)(6-y)^2}+\frac{12y}{y-6}=$$

$$=\frac{(6+y)\cdot y\cdot(y-8)}{(y-8)(6-y)}+\frac{12y}{y-6}=\frac{y(6+y)}{6-y}+\frac{12y}{y-6}=\frac{6y+y^2-12y}{6-y}=$$

$$=\frac{y^2-6y}{6-y}=\frac{y(y-6)}{6-y}=-y.$$

Ответ: $-y$.

1.32(2) $\left(\frac{3x}{x-4}-\frac{6x}{x^2-8x+16}\right):\frac{x-6}{16-x^2}+\frac{24x}{x-4}=$

$$=\left(\frac{3x}{x-4}-\frac{6x}{(x-4)^2}\right):\frac{x-6}{16-x^2}+\frac{24x}{x-4}=$$

$$=\left(\frac{3x(x-4)-6x}{(x-4)^2}\right):\frac{x-6}{16-x^2}+\frac{24x}{x-4}=$$

$$=\frac{\left(3x^2-12x-6x\right)(4-x)(4+x)}{(x-4)^2(x-6)}+\frac{24x}{x-4}=\frac{\left(3x^2-18x\right)(4+x)}{(4-x)(x-6)}+\frac{24x}{x-4}=$$

$$=\frac{3x(x-6)(4+x)}{(4-x)(x-6)}+\frac{24x}{x-4}=\frac{3x(4+x)}{4-x}+\frac{24x}{x-4}=\frac{12x+3x^2-24x}{4-x}=$$

$$=\frac{3x^2-12x}{4-x}=\frac{3x(x-4)}{-(x-4)}=-3x.$$

Ответ: $-3x$.

1.33(1) $\left(\frac{a+b}{b-a}-\frac{b-a}{b+a}-\frac{4a^2}{a^2-b^2}\right):\left(\frac{a^2}{b^3-ab^2}+\frac{a-b}{b^2}-\frac{2}{b}\right)=$

$$=\left(\frac{(a+b)^2-(b-a)^2+4a^2}{b^2-a^2}\right):\left(\frac{a^2}{b^2(b-a)}+\frac{a-b}{b^2}-\frac{2}{b}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2+2ab+b^2-b^2+2ab-a^2+4a^2}{b^2-a^2}\right):\left(\frac{a^2+(a-b)(b-a)-2b(b-a)}{b^2(b-a)}\right)=$$

$$=\left(\frac{4ab+4a^2}{b^2-a^2}\right):\left(\frac{a^2-(a-b)^2-2b^2+2ab}{b^2(b-a)}\right)=$$

$$=\frac{4a(a+b)\cdot b^2\cdot(b-a)}{(b^2-a^2)(a^2-a^2+2ab-b^2-2b^2+2ab)}=\frac{4ab^2}{4ab-3b^2}=$$

$$=\frac{4ab^2}{b(4a-3b)}=\frac{4ab}{4a-3b}.$$

Ответ: $\frac{4ab}{4a-3b}$

1.33(2) $\left(\frac{1}{b^3+b^2}-\frac{1-b}{b^2}-1\right):\left(\frac{b+2}{2-b}-\frac{2-b}{2+b}-\frac{4b^2}{b^2-4}\right)=$

$$=\left(\frac{1}{b^2(b+1)}-\frac{1-b}{b^2}-1\right):\left(\frac{(b+2)^2-(2-b)^2+4b^2}{4-b^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1-\left(1-b^2\right)-b^2(b+1)}{b^2(b+1)}\right):\left(\frac{b^2+4b+4-4+4b-b^2+4b^2}{4-b^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1-1+b^2-b^3-b^2}{b^2(b+1)}\right):\left(\frac{8b+4b^2}{4-b^2}\right)=\frac{-b^3(4-b^2)}{b^2(b+1)\cdot 4b(2+b)}=$$

$$=\frac{-b(2-b)(2+b)}{(b+1)\cdot 4b\cdot(2+b)}=\frac{-(2-b)}{4(b+1)}=\frac{b-2}{4b+4}.$$

Ответ: $\frac{b-2}{4b+4}$

1.34(1) $\frac{c+40}{c^3-16c}:\left(\frac{c-4}{3c^2+11c-4}-\frac{16}{16-c^2}\right).$

Разложим $3c^2+11c-4$ на множители

$$c_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121+48}}{6}=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{6}=\frac{-11\pm 13}{6};\ c_1=-4;\ c_2=\frac{1}{3}$$

$$3c^2+11c-4=3(c+4)\left(c-\frac{1}{3}\right)=(c+4)(3c-1)$$

$$=\frac{c+40}{c(c^2-16)}:\left(\frac{c-4}{(c+4)(3c-1)}-\frac{16}{16-c^2}\right)=$$

$$=\frac{c+40}{c(c^2-16)}:\left(\frac{-(4-c)^2-16(3c-1)}{(3c-1)(16-c^2)}\right)=$$

$$=\frac{(c+40)(3c-1)\left(16-c^2\right)}{c\left(c^2-16\right)\left(-16+8c-c^2-48c+16\right)}=\frac{-(c+40)(3c-1)}{c\left(-c^2-40c\right)}=$$

$$=\frac{(c+40)(3c-1)}{c^2(c+40)}=\frac{3c-1}{c^2}.$$

Ответ: $\frac{3c-1}{c^2}$.

1.34(2) $\frac{a-4}{a^3-a}:\left(\frac{a-1}{2a^2+3a+1}-\frac{1}{a^2-1}\right)$; разложим на множители

$2a^2+3a+1$; $a=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm1}{4}$ $a_1=-1$; $a_2=-\frac{1}{2}$

$$\frac{a-4}{a\left(a^2-1\right)}:\left(\frac{a-1}{2(a+1)(a+\frac{1}{2})}-\frac{1}{a^2-1}\right)=\frac{a-4}{a\left(a^2-1\right)}:$$

$$:\left(\frac{a-1}{(a+1)(2a+1)}-\frac{1}{(a-1)(a+1)}\right)=\frac{a-4}{a(a^2-1)}\cdot\left(\frac{\left(a^2-1\right)(2a+1)}{(a-1)^2-(2a+1)}\right)=$$

$$=\frac{(a-4)(2a+1)}{a\left(a^2-2a+1-2a-1\right)}=\frac{(a-4)(2a+1)}{a\left(a^2-4a\right)}=\frac{(a-4)(2a+1)}{a^2(a-4)}=\frac{2a+1}{a^2}$$

Ответ: $\frac{2a+1}{a^2}$.

1.35(1) $\left(\frac{m}{m^2-2m+1}-\frac{m+2}{m^2+m-2}\right):\frac{1}{(2m-2)^2}$

Разложм m^2+m-2 на множители $\begin{cases} m_1m_2=-2 \\ m_1+m_2=-1 \end{cases}$

$m_1=-2$; $m_2=1$; $m^2+m-2=(m+2)(m-1)$

$$\left(\frac{m}{(m-1)^2}-\frac{m+2}{(m+2)(m-1)}\right):\frac{1}{\left(2(m-1)\right)^2}=$$

$$=\left(\frac{m}{(m-1)^2}-\frac{1}{m-1}\right):\frac{1}{4(m-1)^2}=\left(\frac{m-(m-1)}{(m-1)^2}\right):\frac{1}{4(m-1)^2}=$$

$$=\frac{m-m+1}{(m-1)^2}:\frac{1}{4(m-1)^2}=4.$$

Ответ: 4.

1.35(2) $\left(\frac{n+2}{n^2-n-6}-\frac{n}{n^2-6n+9}\right)\cdot(2n-6)^2$

Разложим на множители n^2-n-6; $\begin{cases} n_1n_2=-6 \\ n_1+n_2=1 \end{cases}$

$n_1=3$; $n_2=-2$; $n^2-n-6=(n-3)(n+2)$

$$\left(\frac{n+2}{(n-3)(n+2)}-\frac{n}{(n-3)^2}\right)\cdot(2(n-3))^2=$$

$$=\left(\frac{1}{n-3}-\frac{n}{(n-3)^2}\right)\cdot 4(n-3)^2=\frac{n-3-n}{(n-3)^2}\cdot 4(n-3)^2=-12$$

Ответ: -12.

1.36(1) Докажите тождество.

$$\frac{a^6-b^6}{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}-\left(a^2-b^2\right)=0$$

$$\frac{(a^2)^3-(b^2)^3}{((a^2+b^2)+ab)((a^2+b^2)-ab)}-\left(a^2-b^2\right)=\frac{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}$$

$$-\left(a^2-b^2\right)==\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)}{a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2}-\left(a^2-b^2\right)=$$

$$=\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)}{a^4+a^2b^2+b^4}-\left(a^2-b^2\right)=0.$$

1.36(2) Докажите тождество.

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{x^6-1}=0$$

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{\left(\left(x^2+1\right)+x\right)\left(\left(x^2+1\right)-x\right)}{x^6-1}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{\left(x^2+1\right)^2-x^2}{x^6-1}=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x^4+2x^2+1-x^2}{x^6-1}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x^4+x^2+1}{\left(x^2\right)^3-1^3}=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x^4+x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)}=\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^2}=0$$

1.37(1) Докажите тождество.

$$\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}=\frac{1}{x+y};\quad \frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y(x-y)^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}=$$

$$=\frac{x\left(x^2-y^2\right)-y(x-y)^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}=\frac{x(x-y)(x+y)-y(x-y)^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}=$$

$$=\frac{(x-y)\left(x^2+xy-xy+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}=\frac{(x-y)\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}=\frac{1}{x+y}.$$

1.37(2) Докажите тождество.

$$\frac{b(a+b)^2}{a^4-b^4}+\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{b(a+b)^2}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}+\frac{a}{a^2+b^2}=\frac{b(a+b)^2+a(a-b)(a+b)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(ab+b^2+a^2-ab\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}=\frac{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}=\frac{1}{a-b}.$$

1.38(1) $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{2-\sqrt{a}}$

1) Разложим на множители $a-\sqrt{a}-2$; пусть $\sqrt{a}=x;\ a=x^2$.

2) Разложим на множители x^2-x-2: $\begin{cases}x_1x_2=-2\\ x_1+x_2=1\end{cases}$ $x_1=2;\ x_2=-1$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$; $a-\sqrt{a}-2=(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)$.

3) $\dfrac{a-\sqrt{a}-2}{2-\sqrt{a}}=\dfrac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+1)}{2-\sqrt{a}}=-(\sqrt{a}+1)=-\sqrt{a}-1$

Ответ: $-\sqrt{a}-1$.

1.38(2) $\dfrac{b-2\sqrt{b}-3}{3-\sqrt{b}}$

1) Разложим на множители $b-2\sqrt{b}-3$; пусть $\sqrt{b}=x;\ b=x^2$.

2) Разложим на множители x^2-2x-3: $\begin{cases}x_1x_2=-3\\ x_1+x_2=2\end{cases}$ $x_1=3;\ x_2=-1$

3) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

4) $b-2\sqrt{b}-3=(\sqrt{b}-3)(\sqrt{b}+1)$

5) $\dfrac{b-2\sqrt{b}-3}{3-\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{b}-3)(\sqrt{b}+1)}{3-\sqrt{b}}=-\left(\sqrt{b}+1\right)=-\sqrt{b}-1$

Ответ: $-\sqrt{b}-1$.

1.39(1)

$$\frac{\sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}+\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1}}=\frac{2\sqrt{3}-3+4-2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.39(2) $\frac{\sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}+\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{3\sqrt{2}-4+5-3\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}}=1$

Ответ: 1.

1.40(1) $\frac{\left(\sqrt{\sqrt{20}-4}+\sqrt{\sqrt{20}+4}\right)^2}{\sqrt{\left(4-\sqrt{20}\right)^2}}=$

$$=\frac{\sqrt{20}-4+2\sqrt{\left(\sqrt{20}-4\right)\left(\sqrt{20}+4\right)}+\sqrt{20}+4}{\sqrt{20}-4}=$$

$$=\frac{\sqrt{20}-4+2\sqrt{\left(\sqrt{20}-4\right)\left(\sqrt{20}+4\right)}+\sqrt{20}+4}{\sqrt{20}-4}=\frac{2\sqrt{20}+2\sqrt{20-16}}{\sqrt{20}-4}=$$

$$=\frac{2\sqrt{20}+4}{\sqrt{20}-4}=\frac{4\sqrt{5}+4}{\sqrt{20}-4}=\frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\left(2\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}=$$

$$=10+2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+4=6\sqrt{5}+14=3\sqrt{20}+14=6\sqrt{5}+14.$$

Ответ: $6\sqrt{5}+14$.

1.40(2) $\frac{\left(\sqrt{\sqrt{8}+2}+\sqrt{\sqrt{8}-2}\right)^2}{\sqrt{\left(2-\sqrt{8}\right)^2}}=$

$$=\frac{\sqrt{8}+2+\sqrt{8}-2+2\sqrt{\left(\sqrt{8}+2\right)\left(\sqrt{8}-2\right)}}{\sqrt{8}-2}=\frac{2\sqrt{8}+4}{\sqrt{8}-2}=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{8}+4\right)\left(\sqrt{8}+2\right)}{\left(\sqrt{8}-2\right)\left(\sqrt{8}+2\right)}=\frac{16+4\sqrt{8}+8+4\sqrt{8}}{4}=\frac{24+8\sqrt{8}}{4}=6+2\sqrt{8}=6+4\sqrt{2}$$

Ответ: $6+4\sqrt{2}$.

1.41(1)

$$A=\frac{x-y}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}=\frac{x-y}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}};\ B=\frac{\sqrt{y}}{y}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}};\ A=B.$$

1.41(2) $A=\dfrac{b-a}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

$$B=\frac{\sqrt{a}}{a}-\frac{\sqrt{b}}{b}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}};\ A=B.$$

6 баллов

1.42(1) $x(x+1)(x+2)(x+3)-15=\big(x(x+3)\big)\big((x+1)(x+2)\big)-15=$
$=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)-15$

1) Пусть $x^2+3x=y$.
2) Тогда $y(y+2)-15=y^2+2y-15$.
3) Разложим $y^2+2y-15$ на множители $\begin{cases} y_1y_2=-15 \\ y_1+y_2=-2 \end{cases}$; $y_1=-5$; $y_2=3$
4) $y^2+2y-15=(y+5)(y-3)$
5) Заменим y ($y=x^2+3x$); $x(x+1)(x+2)(x+3)-15=(x^2+3x+5)(x^2+3x-3)$

Ответ: $(x^2+3x+5)(x^2+3x-3)$.

1.42(2) $(x+3)(x-2)(x+1)x+8=((x+3)(x-2))(x(x+1))+8=$
$=(x^2+x-6)(x^2+x)+8$

1) Пусть $x^2+x=y$.
2) Тогда $(y-6)y+8=y^2-6y+8$.
3) Разложим на множители y^2-6y+8; $\begin{cases} y_1y_2=8 \\ y_1+y_2=6 \end{cases}$

$y_1=4$; $y_2=2$. $y^2-6y+8=(y-4)(y-2)$
4) Сделаем замену $x(x+1)(x+3)(x-2)+8=(x^2+x-4)(x^2+x-2)$

Ответ: $(x^2+x-4)(x^2+x-2)$.

1.43(1) $2a^2-x^2-ax-a+x=a^2+a^2-x^2-ax-a+x=(a^2-x^2)+(a^2-ax)-(a-x)$
$=(a-x)(a+x)+a(a-x)-(a-x)=(a-x)(a+x+a-1)=(a-x)(2a+x-1)$

Ответ: $(a-x)(2a+x-1)$.

1.43(2) $x^2-2y^2-xy-x-y=x^2-y^2-y^2-xy-x-y=(x^2-y^2)-(y^2+xy)-(x+y)$
$=(x+y)(x-y)-y(x+y)-(x+y)=(x+y)(x-y-y-1)=(x+y)(x-2y-1)$

Ответ: $(x+y)(x-2y-1)$.

1.44(1) $x^4+3x^2-x+3=x^4+2x^2+\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+3=$

$=x^4+2x^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2,75>0$

1.44(2) $x^4+2x^2-x+5=x^4+x^2+\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+5=$

$=x^4+x^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4,75>0$.

1.45(1) $6y-4x-x^2-y^2=-(x^2+y^2-6y+4x)=-(x^2+4x+4+y^2-6y+9-13)=$ $=-\left((x+2)^2+(y-3)^2-13\right)=-(x+2)^2-(y-3)^2+13$. Данное выражение принимает наибольшее значение при $x=-2$; $y=3$.

Ответ: $x=-2$; $y=3$.

1.45(2) $x^2+y^2-10x+2y=x^2-10x+25+y^2+2y+1-26=(x-5)^2+(y+1)^2-26$.

Данное выражение принимает наименьшее значение при $x=5$; $y=-1$.

Ответ: $x=5$; $y=-1$.

1.46(1) $\frac{10}{x^2+y^2+4x-6y+14}=\frac{10}{\left(x^2+4x+4\right)+\left(y^2-6y+9\right)+1}=$

$=\frac{10}{(x+2)^2+(y-3)^2+1}$.

При $x=-2$; $y=3$ наибольшее значения выражения равно 10.

Ответ: Наибольшее значение выражения, равное 10, достигается при $x=-2$; $y=3$.

1.46(2) $\frac{8}{x^2+y^2-2x-10y+30}=\frac{8}{x^2-2x+1+y^2-10y+25+4}=$

$=\frac{8}{(x-1)^2+(y-5)^2+4}$.

Наибольшее значение выражения достигается при $x-1=0$; $y-5=0$ ($x=1$; $y=5$).

Ответ: Наибольшее значение выражения, равное 2, достигается при $x=1$; $y=5$.

1.47(1) $m+n=1$; $m=1-n$; $4m^2+2mn-n^2$ при $m=1-n$ примет вид:

$4(1-n)^2+2n(1-n)-n^2=4(1-2n+n^2)+2n-2n^2-n^2=$

$=4-8n+4n^2+2n-2n^2-n^2=n^2-6n+4=n^2-6n+9-9+4=(n-3)^2-5$.

Наименьшее значение выражение $(n-3)^2-5$ принимает при $n-3=0$, т.е. при $n=3$. Данное выражение принимает наименьшее значение при $m=-2$ и оно равно -5.

Ответ: Наименьшее значение выражения, равное -5, достигается при $m=-2$; $n=3$.

1.47(2) $m-n=1$; $m=1+n$. При $m=1+y$ выражение $m^2+2mn-4n^2$ примет вид:

$(1+n)^2+2n(1+n)-4n^2=1+2n+n^2+2n+2n^2-4n^2=-n^2+4n+1=$
$=-(n^2-4n-1)=-(n^2-4n+4-4-1)=$
$=-\left(\left(n^2-4n+4\right)-5\right)=-\left((n-2)^2-5\right)=-(n-2)^2+5.$

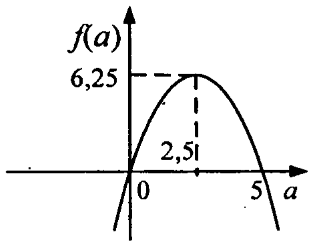
Наибольшее значение выражение $-(n-2)^2+5$ принимает при $n-2=0$, т.е. при $n=2$. Данное выражение принимает наибольшее значение, равное 5. при $m=3$, $n=2$.

Ответ: Выражение принимает наибольшее значение, равное 5, при $m=3$; $n=2$.

1.48 (1) $1\le a\le 3$ и $b=5-a$; $ab=a(5-a)=5a-a^2$.

Рассмотрим функцию $f(a)=5a-a^2$.

Ее график — парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы: $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ для функции $f(x)=ax^2+bx+c$.



В данном случае $a_0=-\dfrac{5}{-2}=2{,}5$;

$f(2{,}5)=5\cdot 2{,}5-(2{,}5)^2=12{,}5-6{,}25.$

Наибольшее значение функции достигается при $a=2{,}5$, и оно равно 6,25.

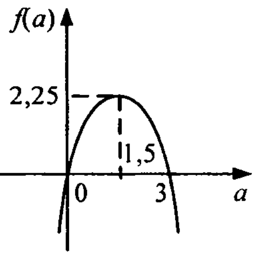
Ответ: 6,25.

1.48(2) $b=3-a$; $1\le a\le 2$;
$ab=a(3-a)=3a-a^2$.

Рассмотрим функцию $f(a)=3a-a^2$.

Ее график — парабола, ветви которой направлены вниз.

Абсцисса вершины параболы



$a_0=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$;

следовательно наибольшее значение функции достигается при $a_0=1{,}5$; $f(1{,}5)=3\cdot 1{,}5-2{,}25=2{,}25$.

Ответ: 2,25.

1.49(1) 1) $3a^2-2b^2=5ab$; $3a^2-5ab-2b^2=0$.

$$a_{1,2}=\frac{5b\pm\sqrt{25b^2+24b^2}}{6}=\frac{5b\pm7b}{6};$$

$$a_1=2b;\ a_2=-\frac{1}{3}b.$$

По условию $a>0$, $b>0$. Условию удовлетворяет только a_1.

2) При $a=2b$ выражение $\frac{2b-a}{a+3b}$ примет вид: $\frac{2b-2b}{2b+3b}=0$.

Ответ: 0.

1.49(2) 1) $5a^2-2b^2=3ab$; $5a^2-3ab-2b^2=0$

$$a_{1,2}=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2+40b^2}}{10}=\frac{3b\pm7b}{10};\ a_1=b;\ a_2=-0{,}4b.$$

По условию $a<0$, $b<0$. Условию удовлетворяет a_1.

2) При $a=b$ выражение $\frac{3a(a+b)}{b(2a-b)}$ примет вид: $\frac{3b\cdot2b}{b(2b-b)}=6$

Ответ: 6.

1.50(1) $\frac{2x^2+5xy-3y^2}{2x^2-xy}$.

1) Разложим на множители $2x^2+5xy-3y^2$

$$x=\frac{-5y\pm\sqrt{25y^2+24y^2}}{4}=\frac{-5y\pm7y}{4};\ x_1=-3y;\ x_2=\frac{1}{2}y.$$

2) $$\frac{2(x+3y)\left(x-\frac{1}{2}y\right)}{x(2x-y)}=\frac{(x+3y)(2x-y)}{x(2x-y)}=\frac{x+3y}{x}.$$

Ответ: $\frac{x+3y}{x}$.

1.50(2) 1) Разложим на множители $2y^2-3xy-9x^2$

$$y=\frac{3x\pm\sqrt{9x^2+72x^2}}{4}=\frac{3x\pm9x}{4};\ y_1=3x;\ y_2=-\frac{3}{2}x.$$

2) $$\frac{2y^2-3xy-9x^2}{y^2-3xy}=\frac{2(y-3x)\left(y+\frac{3}{2}x\right)}{y(y-3x)}=\frac{2y+3x}{y}$$

Ответ: $\frac{2y+3x}{y}$.

1.51(1) $\frac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}-x\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{x-\sqrt{x}-2}{2-\sqrt{x}}$

Разложим на множители $x-\sqrt{x}-2$; пусть $\sqrt{x}=y$.

Тогда $x-\sqrt{x}-2$ примет вид: y^2-y-2; $\begin{cases} y_1y_2=-2 \\ y_1+y_2=1 \end{cases}$

$y_1=2$; $y_2=-1$; $y^2-y-2=(y-2)(y+1)$;

$x-\sqrt{x}-2=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$

$$\frac{x-\sqrt{x}-2}{2-\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2-\sqrt{x}}=-\sqrt{x}-1$$

Ответ: $-\sqrt{x}-1$.

1.51(2) $\frac{3\sqrt{x}-2x-x\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(3-2\sqrt{x}-x\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)}=-\frac{x+2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$

Разложим на множители $x+2\sqrt{x}-3$; пусть $\sqrt{x}=y$. Тогда $x+2\sqrt{x}-3$ примет вид: y^2+2y-3. $\begin{cases} y_1y_2=-3 \\ y_1+y_2=-2 \end{cases}$.

$y_1=-3$; $y_2=1$; $y^2+2y-3=(y+3)(y-1)$;
$x+2\sqrt{x}-3=(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)$

$$-\frac{x+2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\frac{-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+3}=1-\sqrt{x}$$

Ответ: $1-\sqrt{x}$.

1.52(1) $1-\frac{a\sqrt{a}+1}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{a}}=1-\frac{\sqrt{a^3}+1}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{a}}=$

$=1-\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{a\left(\sqrt{a}+1\right)}-\frac{1}{\sqrt{a}}=1-\frac{a-\sqrt{a}+1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=$

$=\frac{a-a+\sqrt{a}-1-\sqrt{a}}{a}=-\frac{1}{a}$; при $a=0{,}9$ выражение $-\frac{1}{a}$ равно $-\frac{1}{0{,}9}=-\frac{10}{9}=-1\frac{1}{9}$.

Ответ: $-1\frac{1}{9}$.

1.52(2) $\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1-a\sqrt{a}}{a\left(1-\sqrt{a}\right)}+1=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1-\sqrt{a^3}}{a\left(1-\sqrt{a}\right)}+1=\frac{1}{\sqrt{a}}-$

$$-\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}+a\right)}{a\left(1-\sqrt{a}\right)}+1=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1+\sqrt{a}+a}{a}+1=\frac{\sqrt{a}-1-\sqrt{a}-a+a}{a}=$$

$=-\frac{1}{a}$. При $a=0{,}4$ выражение $-\frac{1}{a}$ равно $-\frac{1}{0{,}4}=-2{,}5$.

Ответ: –2,5.

1.53(1) $A=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1) $(1-\sqrt{3})^2=1-2\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3}=2(2-\sqrt{3})$

$\sqrt{3}-1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

2) $\sqrt{3}+1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

4) проверим, является ли $\sqrt{6}$ корнем уравнения

$x^2-3\sqrt{6}x+12=0$; $\left(\sqrt{6}\right)^2-3\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}+12=18-18=0$.

Ответ: является.

1.53(2) $B=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$;

1) $(1-\sqrt{5})^2=1-2\sqrt{5}+5=6-2\sqrt{5}=2(3-\sqrt{5})$;

$\sqrt{5}-1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}$; $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$;

2) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2=2\left(3+\sqrt{5}\right)$; $\sqrt{5}+1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}$; $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

3) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

4) проверим, является ли $\sqrt{2}$ корнем уравнения

$x^2+5\sqrt{2}x-12=0$; $(\sqrt{2})^2+5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-12=2+10-12=0$.

Ответ: является.

1.54(1) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}=$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+...$$

$$...+\frac{\sqrt{21}-\sqrt{19}}{(\sqrt{21}+\sqrt{19})(\sqrt{21}-\sqrt{19})}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+...+\sqrt{21}-\sqrt{19}}{2}=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$$

$\sqrt{16}<\sqrt{21}<\sqrt{25}$; $4<\sqrt{21}<5$; $4-1<\sqrt{21}-1<5-1$;

$3<\sqrt{21}-1<4$; $1,5<\frac{\sqrt{21}-1}{2}<2$. **Ответ:** между 1 и 2.

1.54(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{20}+\sqrt{19}}=$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}+...$$

$$...+\frac{\sqrt{20}-\sqrt{19}}{(\sqrt{20}+\sqrt{19})(\sqrt{20}-\sqrt{19})}=$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{20}-\sqrt{19}=\sqrt{20}-1$$

$\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$; $4<\sqrt{20}<5$; $4-1<\sqrt{20}-1<5-1$;

$3<\sqrt{20}-1<4$. **Ответ:** между 3 и 4.

1.55(1) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $2x-2y+10=0$; $x+3y-3=0$

$$\begin{cases}2x-2y=-10\\x+3y=3\end{cases}\Big|\cdot(-2)\quad \begin{cases}2x-2y=-10\\-2x-6y=-6\end{cases}\quad \begin{cases}-8y=-16\\x+3y=3\end{cases}\quad \begin{cases}y=2\\x=3-3y\end{cases}\quad \begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$$

Ответ: при $x=-3$; $y=2$ наименьшее значение выражения равно 0.

1.55(2) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $3x-2y-7=0$; $x-y-3=0$

$$\begin{cases}3x-2y-7=0\\x-y-3=0\end{cases}\quad \begin{cases}3x-2y=7\\x-y=3\end{cases}\Big|\cdot(-3)\quad \begin{cases}3x-2y=7\\-3x+3y=-9\end{cases}\quad \begin{cases}y=-2\\x=3+y\end{cases}\quad \begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

Ответ: наименьшее значение равно 0; оно достигается при $x=1$; $y=-2$.

1.56(1) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $x + 2y + 5 = 0$; $2x - 3y - 4 = 0$.

$$\begin{cases} x+2y+5=0 \\ 2x-3y-4=0 \end{cases}\Bigg| -2 \quad \begin{cases} -2x-4y-10=0 \\ 2x-3y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -7y-14=0 \\ 2x-3y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2 \\ x=\dfrac{3y+4}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Ответ: при $x = -1$; $y = -2$; наименьшее значение выражения равно нулю.

1.56(2) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $3a - b + 10 = 0$; $2a + 3b + 3 = 0$.

$$\begin{cases} 3a-b+10=0 \\ 2a+3b+3=0 \end{cases}\Bigg| 3 \quad \begin{cases} 9a-3b+30=0 \\ 2a+3b+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 11a+33=0 \\ b=\dfrac{-3-2a}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$$

Ответ: при $a = -3$; $b = 1$; наименьшее значение выражения равно нулю.

1.57(1) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $x^2 - y + 1 = 0$; $3x - y - 1 = 0$.

$$\begin{cases} x^2-y+1=0 \\ 3x-y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ y=3x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=3x-1 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: при $x = 1$; $y = 2$ или $x = 2$; $y = 5$; наименьшее значение выражения равно нулю.

1.57(2) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $a^2 + b - 5 = 0$; $a + b - 5 = 0$.

$$\begin{cases} a^2+b-5=0 \\ a+b-5=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-a=0 \\ b=5-a \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right. \\ b=5-a \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: при $a = 0$; $b = 5$ или $a = 1$; $b = 4$; наименьшее значение выражения равно нулю.

1.58(1) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $3x - 4y - 2 = 0$; $x - 5y + 3 = 0$.

$$\begin{cases} 3x-4y-2=0 \\ x-5y+3=0 \end{cases}\left|\begin{matrix} \\ (-3) \end{matrix}\right. \quad \begin{cases} 3x-4y-2=0 \\ -3x+15y-9=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 11y-11=0 \\ x=5y-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Ответ: при $x = 2$; $y = 1$; наименьшее значение выражения равно 0.

1.58(2) Наименьшее значение данного выражения равно 0; оно достигается при $6x + 5y + 7 = 0$; $2x + 3y + 1 = 0$.

$$\begin{cases} 6x+5y+7=0 \\ 2x+3y+1=0 \end{cases}\left|\begin{matrix} \\ (-3) \end{matrix}\right. \quad \begin{cases} 6x+5y+7=0 \\ -6x-9y-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4y+4=0 \\ x=\dfrac{-3y-1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Ответ: при $x = -2$; $y = 1$; наименьшее значение выражения равно 0.

2. Уравнения

2 балла

2.1(1) $(3-2x)(6x-1) = (2x-3)^2$; $(3-2x)(6x-1) = (3-2x)^2$

1) $3-2x = 0$; $-2x = -3$; $x = 1{,}5$. 2) $6x-1 = 3-2x$; $8x = 4$; $x = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: 0,5; 1,5.

2.1(2) $(5+4x)^2 = (9-21x)(4x+5)$

1) $5+4x = 0$; $4x = -5$; $x = -1{,}25$

2) $5+4x = 9-21x$; $4x+21x = 9-5$; $25x = 4$; $x = \dfrac{4}{25}$; $x = 0{,}16$.

Ответ: $-1{,}25$; 0,16.

2.2(1) $(1-2x)(4x^2+2x+1) = 8(1-x^2)(x+2)$

$4x^2+2x+1-8x^3-4x^2-2x = 8(x+2-x^3-2x^2)$

$1-8x^3 = -8x^3-16x^2+8x+16$; $16x^2-8x-15 = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+240}}{16} = \dfrac{4 \pm 16}{16}$; $x_1 = \dfrac{5}{4}$; $x_2 = -\dfrac{3}{4}$. **Ответ:** $-\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{4}$.

2.2(2) $8(x-2)(x^2-1) = (4x^2-2x+1)(2x+1)$; $8(x^3-2x^2-x+2) = (2x)^3+1^3$;

$8x^3-16x^2-8x+16 = 8x^3+1$; $-16x^2-8x+16-1 = 0$; $16x^2+8x-15 = 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{16} = \dfrac{-4 \pm 16}{16}$; $x_1 = -\dfrac{5}{4}$; $x_2 = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{4}$.

2.3(1) $x^3+3x^2-2x-6=0$; $x^2(x+3)-2(x+3)=0$; $(x+3)(x^2-2)=0$;
$x+3=0$; $x^2-2=0$; $x^2=2$; $x_1=-3$; $x_2=-\sqrt{2}$; $x_3=\sqrt{2}$.

Ответ: -3; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

2.3(2) $x^3-3x^2-3x+9=0$; $x^2(x-3)-3(x-3)=0$; $(x-3)(x^2-3)=0$
$x-3=0$; $x^2-3=0$; $x_1=3$; $x^2=3$; $x_2=-\sqrt{3}$; $x_3=\sqrt{3}$

Ответ: 3; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

2.4(1) $2x^3-5x^2-2x+5=0$; $2x(x^2-1)-5(x^2-1)=0$; $(x^2-1)(2x-5)=0$;
$x^2-1=0$; $2x-5=0$; $x^2=1$; $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=2{,}5$.
Ответ: -1; 1; $2{,}5$.

2.4(2) $2x^3-x^2-8x+4=0$; $(2x^3-8x)-(x^2-4)=0$; $2x(x^2-4)-(x^2-4)=0$;

$(x^2-4)(2x-1)=0$; $x^2-4=0$; $2x-1=0$; $x^2=4$; $x_3=\dfrac{1}{2}$; $x_1=-2$; $x_2=2$.

Ответ: -2; 2; $\dfrac{1}{2}$.

2.5(1) $3x^2(2x-1)+x(2x-1)+2(1-2x)=0$; $(2x-1)(3x^2+x-2)=0$; $2x-1=0$;

$x_1=\dfrac{1}{2}$; $3x^2+2x-2=0$; $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6}=\dfrac{-1\pm 5}{6}$; $x_2=-1$;

$x_3=\dfrac{2}{3}$. **Ответ:** $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{3}$; -1.

2.5(2) $2x^2(2x-5)+x(2x-5)+(5-2x)=0$; $(2x-5)(2x^2+x-1)=0$; $2x-5=0$; $2x^2+x-1=0$; $x_1=2{,}5$; $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}$; $x_2=-1$; $x_3=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: -1; $0{,}5$; $2{,}5$.

2.6(1) $x^4+2x^2-8=0$; $x^2=y$; $y>0$; $y^2+2y-8=0$

$\begin{cases} y_1y_2=-8 \\ y_1+y_2=-2 \end{cases}$ по теореме, обратной теореме Виета

$y_1=-4$; $y_2=2$; $x^2=-4$(1). Уравнение (1) не имеет корней.
$x^2=2$; $x_1=-\sqrt{2}$; $x_2=\sqrt{2}$

Ответ: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

2.6(2) $x^4-7x^2+12=0$; $x^2=y$; $y>0$; $y^2-7y+12=0$; $\begin{cases} y_1y_2=12 \\ y_1+y_2=7 \end{cases}$;

$y_1=3$; $y_2=4$; $x^3=3$; $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$; $x^2=4$; $x=2$; $x=-2$.

Ответ: -2; 2; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

2.7(1) $2x^4-19x^2+9=0$; $x^2=y$; $y \geq 0$; $2y^2-19y+9=0$;

$$y_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{361-72}}{4}=\frac{19\pm17}{4};\ y_1=9;\ y_2=\frac{1}{2}$$

1) $x^2=9$; $x_1=3$; $x_2=-3$. 2) $x^2=\frac{1}{2}$; $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $-3;\ 3;\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.7(2) $3x^4-13x^2+4=0$; $x^2=y$; $y \geq 0$; $3y^2-13y+4=0$;

$$y_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{6}=\frac{13\pm11}{6};\ y_1=4;\ y_2=\frac{1}{3}.$$

1) $x^2=4$; $x_1=-2$; $x_2=2$. 2) $x^2=\frac{1}{3}$; $x_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_4=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $-2;\ 2;\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.8.(1) $\frac{6-x}{3(x^2-4)}-\frac{2}{x-2}=1$; $\frac{6-x}{3(x-2)(x+2)}-\frac{2}{x-2}=1$. $x \neq \pm2$.

$6-x-6(x+2)=3(x^2-4)$; $6-x-6x-12-3x^2+12=0$;
$-3x^2-7x+6=0$; $3x^2+7x-6=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{6}=\frac{-7\pm11}{6};\ x_1=-3;\ x_2=\frac{2}{3}.$$ **Ответ:** $-3;\ \frac{2}{3}$.

2.8(2) $\frac{x+8}{2\left(x^2-9\right)}-\frac{2}{x-3}=1$

1) $x^2-9\neq0$; $x\neq\pm3$; $x+8-4(x+3)=2x^2-18$; $x+8-4x-12=2x^2-18$;

$2x^2+3x-14=0$; $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\frac{-3\pm11}{4}$; $x_1=-3{,}5$; $x_2=2$.

Ответ: $-3{,}5$; 2.

2.9(1) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x}{x+5}=\frac{50}{x^2-25}$

1) $x\neq\pm5$
2) $(x+5)^2+x(x-5)=50$; $x^2+10x+25+x^2-5x-50=0$; $2x^2+5x-25=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{4}=\frac{-5\pm15}{4};\ x_1=-5;\ x_2=\frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

2.9(2) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$

1) $x \neq \pm 2$; $x(x-2)+(x+2)^2 = 8$; $x^2-2x+x^2+4x+4-8 = 0$; $2x^2+2x-4 = 0$;

$x^2+x-2 = 0$; $\begin{cases} x_1x_2 = -2 \\ x_1+x_2 = -1 \end{cases}$ $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Ответ: 1.

2.10(1) $\frac{2x}{2x-3}-\frac{3x}{2x+3}=\frac{15-32x^2}{4x^2-9}$. 1) $x \neq \pm 1,5$

2) $2x(2x+3)-3x(2x-3) = 15-32x^2$; $4x^2+6x-6x^2+9x = 15-32x^2$;
$-2x^2+15x+32x^2-15 = 0$; $30x^2+15x-15 = 0$;

$2x^2+x-1=0$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}$. $x_1=-1$; $x_2=\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$; -1.

2.10(2) $\frac{2x}{3x-1}-\frac{x}{3x+1}=\frac{9-3x^2}{9x^2-1}$. 1) $x \neq \pm\frac{1}{3}$

2) $2x(3x+1)-x(3x-1) = 9-3x^2$; $6x^2+2x-3x^2+x-9+3x^2 = 0$; $6x^2+3x-9 = 0$;

$2x^2+x-3 = 0$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm 5}{4}$; $x_1 = -1,5$; $x_2 = 1$.

Ответ: $-1,5$; 1.

2.11(1) $\frac{2}{3x+1}-\frac{x}{1-3x}=\frac{2x}{9x^2-1}$

1) $x \neq \pm\frac{1}{3}$

2) $2(3x-1)+x(3x+1) = 2x$; $6x-2+3x^2+x-2x = 0$; $3x^2+5x-2 = 0$;

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6}$; $x_1 = -2$; $x_2=\frac{1}{3}$. **Ответ:** -2.

2.11(2) $\frac{6}{1-2x}+\frac{9}{2x+1}=\frac{12x^2-15}{4x^2-1}$

1) $x \neq \pm 0,5$; $\frac{6}{1-2x}+\frac{9}{1+2x}=\frac{15-12x^2}{1-4x^2}$; $6(1+2x)+9(1-2x) =$
$= 15-12x^2$; $6+12x+9-18x = 15-12x^2$; $12x^2-6x = 0$; $2x^2-x = 0$;

$x(2x-1) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2=\frac{1}{2}$. **Ответ:** 0.

2.12(1) $\frac{16}{x(x+1)} - \frac{6}{x(x-1)} = \frac{1}{x}$.

1) $x \neq 0; \pm 1$

2) $16(x-1) - 6(x+1) = x^2 - 1$;

$16x - 16 - 6x - 6 = x^2 - 1$; $x^2 - 10x + 21 = 0$;

$\begin{cases} x_1x_2 = 21 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$ $x_1 = 7; x_2 = 3.$

Ответ: 3; 7.

2.12(2) $\frac{3}{x(x+4)} - \frac{15}{x(x-4)} = \frac{4}{x}$.

1) $x \neq 0; \pm 4$

2) $3(x-4) - 15(x+4) = 4(x^2 - 16)$;

$3x - 12 - 15x - 60 - 4x^2 + 64 = 0; -4x^2 - 12x - 8 = 0; x^2 + 3x + 2 = 0$;

$\begin{cases} x_1x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$ $x_1 = -2; x_2 = -1.$

Ответ: –2; –1.

2.13(1) $\frac{1}{x+6} + \frac{2}{x-2} = \frac{2}{x-6}$.

1) $x \neq \pm 6; 2$

2) $\frac{1}{x+6} - \frac{2}{x-6} = \frac{-2}{x-2}$; $\frac{x-6-2x-12}{(x+6)(x-6)} = \frac{-2}{x-2}$

$(-x-18)(x-2) = -2(x^2-36); -x^2-18x+2x+36 = -2x^2+72; x^2-16x-36 = 0$

$\begin{cases} x_1x_2 = -36 \\ x_1 + x_2 = 16 \end{cases}$ $x_1 = 18; x_2 = -2$

Ответ: –2; 18.

2.13(2) $\frac{7}{x-3} + \frac{1}{x+6} = \frac{5}{x-6}$. 1) $x \neq \pm 6; 3$

2) $\frac{7}{x-3} = \frac{5}{x-6} - \frac{1}{x+6}$; $\frac{7}{x-3} = \frac{5(x+6)-(x-6)}{x^2-36}$;

$7(x^2-36) = (x-3)(5x+30-x+6)$; $7(x^2-36) = (x-3)(4x+36)$;

$7x^2-252 = -12x+4x^2+36x-108$; $3x^2-24x-144 = 0$; $x^2-8x-48 = 0$;

$\begin{cases} x_1x_2 = -48 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$ $x_1 = 12; x_2 = -4.$

Ответ: –4; 12.

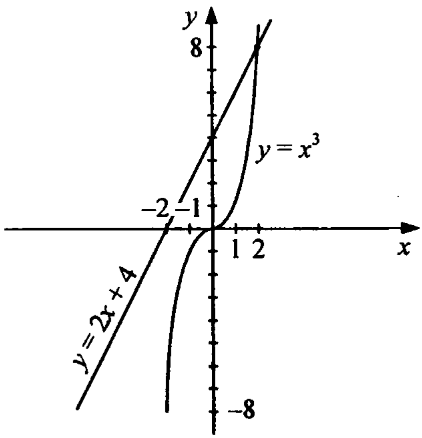
2.14(1) $x^3 = 2x + 4$

$y = x^3$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

$y = 2x + 4$

x	0	1
y	4	6



Ответ: (2; 8).

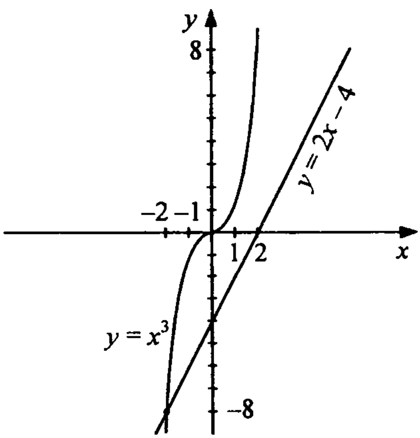
2.14(2) $x^3 = 2x - 4$

$y = x^3$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

$y = 2x - 4$

x	0	1
y	-4	-2



Ответ: (–2; –8).

2.15(1).

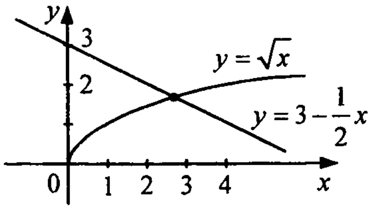
$y=\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

$y=3-\frac{1}{2}x$

x	0	2
y	3	2

Из графиков видно, что корень данного уравнения находится между 2 и 3.



Ответ: между 2 и 3.

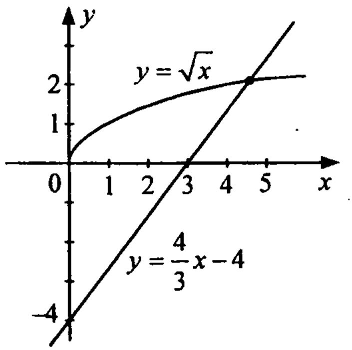
2.15(2).

$y=\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

$y=\frac{4}{3}x-4$

x	0	3
y	–4	0



Из графиков видно, что корень данного уравнения находится между 4 и 5.

Ответ: между 4 и 5.

4 балла

2.16(1) $x^4-25x^2+60x-36=0$; $x^4-(25x^2-60x+36)=0$; $x^4=(5x-6)^2$;
$x^2=5x-6$ или $x^2=6-5x$;
1) $x^2-5x+6=0$; $x_1=2$; $x_2=3$; $x^2+5x-6=0$; $x_3=-6$; $x_4=1$.
Ответ: –6; 1; 2; 3.

2.16(2) $x^4-16x^2+24x-9=0$; $x^4-(16x^2-24x+9)=0$; $x^4-(4x-3)^2=0$;
$x^4=(4x-3)^2$; $x^2=4x-3$ или $x^2=3-4x$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=3$; $x_2=1$;
$x^2+4x-3=0$; $x_3=-2-\sqrt{7}$; $x_4=-2+\sqrt{7}$.

Ответ: $-2-\sqrt{7};-2+\sqrt{7};1;3$.

2.17(1) $x^5-9x^3+20x=0$; $x(x^4-9x^2+20)=0$; $x_1=0$ или $x^4-9x^2+20=0$;
$x^2=y>0$; $y^2-9y+20=0$; $y_1=5$; $y_2=4$; $x^2=5$ или $x^2=4$
$x_1=-\sqrt{5}$; $x_3=2$; $x_2=\sqrt{5}$; $x_4=-2$.

Ответ: $-\sqrt{5};-2;\ 0;2;\sqrt{5}$.

2.17(2) $x^5-7x^3+12x=0$; $x(x^4-7x^2+12)=0$; $x_1=0$ или $x^4-7x^2+12=0$;
$x^2=y$; $y>0$; $y^2-7y+12=0$; $y_1=3$; $y_2=4$; $x^4=4$ или $x^2=3$;
$x_1=-2$; $x_3=\sqrt{3}$; $x_2=2$; $x_4=-\sqrt{3}$.

Ответ: $0;-2;2;-\sqrt{3};\sqrt{3}$.

2.18(1) $(x^2+4x)(x^2+4x-17)=-60$. 1) $x^2+4x=y$
2) $y(y-17)+60=0$; $y^2-17y+60=0$
$y_1=12$; $y_2=5$ (по теореме, обратной т. Виета).
3) $x^2+4x=12$ или $x^2+4x=5$; $x^2+4x-12=0$; $x^2+4x-5=0$;
$x_1=-6$; $x_2=2$; $x_3=-5$; $x_4=1$ **Ответ:** $-6;-5;\ 1;\ 2$.

2.18(2) $(x^2-5x)(x^2-5x+10)+24=0$. 1) $x^2-5x=y$
2) $y(y+10)+24=0$; $y^2+10y+24=0$; $y_1=-6$; $y_2=-4$; $x^2-5x=-6$ или $x^2-5x=-4$; $x^2-5x+6=0$; $x^2-5x+4=0$; $x_1=2$; $x_2=3$; $x_3=1$; $x_4=4$.
Ответ: 1; 2; 3; 4.

2.19(1) $\left(\dfrac{x^2-3x}{2}+3\right)\left(\dfrac{x^2-3x}{2}-4\right)+10=0$; $\dfrac{x^2-3x}{2}=y$;
$(y+3)(y-4)+10=0$; $y^2-y-2=0$; $y_1=2$; $y_2=-1$;
$\dfrac{x^2-3x}{2}=2$ или $\dfrac{x^2-3x}{2}=-1$; $x^2-3x-4=0$; $x^2-3x+2=0$;
$x_1=4$; $x_2=-1$; $x_3=2$; $x_4=1$. **Ответ:** $-1;\ 1;\ 2;\ 4$.

2.19(2) $\left(2-\dfrac{x^2+2x}{3}\right)\left(4-\dfrac{x^2+2x}{3}\right)=3$; $\dfrac{x^2+2x}{3}=y$;

$(2-y)(4-y)-3=0$; $y^2-6y+5=0$; $y_1=5$; $y_2=1$;

$\dfrac{x^2+2x}{3}=5$ или $\dfrac{x^2+2x}{3}=1$.
$x^2+2x-15=0$; $x^2+2x-3=0$; $x_1=-5$; $x_2=3$; $x_3=-3$; $x_4=1$.
Ответ: $-5;\ -3;\ 1;\ 3$.

2.20(1) $(x-5)^4-3(x-5)^2-4=0$; $(x-5)^2=y$; $y>0$; $y^2-3y-4=0$; $y_1=4$; $y_2=-1$; $(x-5)^2=4$ или $(x-5)^2=-1$ (1). Уравнение (1) решений не имеет. $x-5=2$ или $x-5=-2$; $x_1=7$; $x_2=3$. **Ответ:** 3; 7.

2.20(2) $(x+2)^4+5(x+2)^2-36=0$; $(x+2)^2=y$; $y>0$; $y^2+5y-36=0$
$y_1=-9$; $y_2=4$
1) $(x+2)^2=4$; $x+2=2$ или $x+2=-2$; $x_1=0$; $x_2=-4$.
2) $(x+2)^2=-9$ (1). Уравнение (1) не имеет корней.
Ответ: -4; 0.

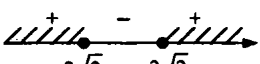
2.21(1) $x+\sqrt{x}-20=0$; 1) $x>0$
2) $\sqrt{x}=y$; $y\geq 0$; $y^2+y-20=0$; $y_1=-5$; $y_2=4$; $\sqrt{x}=4$; $x=16$.
Ответ: 16.

2.21(2) $x-6\sqrt{x}-27=0$; 1) $x>0$
2) $\sqrt{x}=y$; $y\geq 0$; $y^2-6y-27=0$; $y_1=9$; $y_2=-3$; $\sqrt{x}=9$; $x=81$.
Ответ: 81.

2.22(1) $x^2+2x\sqrt{3}+14+4x=0$; $x^2+2x(\sqrt{3}+2)+14=0$;
$D=b^2-4ac=4(\sqrt{3}+2)^2-56=4(7+4\sqrt{3})-56=16\sqrt{3}-28$;
$(16\sqrt{3})^2=768$; $28^2=784$; $(16\sqrt{3})^2<28^2$, значит $16\sqrt{3}<28$.
$D<0$, уравнение не имеет корней.

2.22(2) $x^2+2x\sqrt{5}+18+4x=0$; $x^2+2x(\sqrt{5}+2)+18=0$;
$D=b^2-4ac=4(\sqrt{5}+2)^2-72=4(9+4\sqrt{5})-72=16\sqrt{5}-36$;
$(16\sqrt{5})^2=1280$; $36^2=1296$; $(16\sqrt{5})^2<36^2$; $16\sqrt{5}<36$.
$D<0$, корней нет.

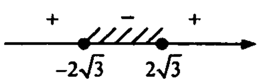
2.23(1) $x^2+kx+2=0$. Уравнение имеет корни, если $D\geq 0$.
$D=k^2-4\cdot 2=k^2-8$; $k^2-8\geq 0$; $(k-2\sqrt{2})(k+2\sqrt{2})\geq 0$.



$|k|\geq 2\sqrt{2}$

Ответ: $|k|\geq 2\sqrt{2}$.

2.23(2) $3x^2+kx+1=0$. Уравнение не имеет корней, если $D<0$;
$D=k^2-3\cdot 4=k^2-12$; $k^2-12<0$; $\left(k-2\sqrt{3}\right)\left(k+2\sqrt{3}\right)<0$

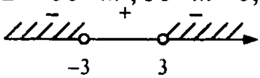


$|k|<2\sqrt{3}$

Ответ: $|k|<2\sqrt{3}$.

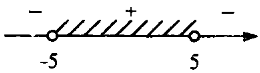
2.24(1) $kx^2-6x+k=0$. Уравнение имеет 2 корня, если $D>0$; $k \neq 0$.

$D=36-4k^2$; $36-4k^2>0$; $9-k^2>0$; $(3-k)(3+k)>0$.



Ответ: –2; –1; 1; 2.

2.24(2) $mx^2-5x+\frac{1}{4}m=0$. Уравнение имеет 2 корня, если $m \neq 0$; $D>0$. $D=25-m^2$; $25-m^2>0$; $(5-m)(5+m)>0$.



Ответ: ± 1; ± 2; ± 3; ± 4.

2.25(1) $x^2-18x+100=c$; $x^2-18x+81+19=c$; $(x-9)^2=c-19$

$(x-9)^2 \geq 0$, следовательно, $c-19 \geq 0$; $c \geq 19$.

Ответ: при $c \geq 19$.

2.25(2) $-x^2+12x-21=c$; $x^2-12x+21=-c$; $x^2-12x+36-15=-c$

$(x-6)^2=15-c$; $(x-6)^2 \geq 0$ при любых значениях x.

Следовательно, $15-c \geq 0$; $c \leq 15$.

Ответ: при $c \leq 15$.

2.26(1) $x=1$ — корень уравнения, поэтому

$5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3p = 0$

$3+3p=0$; $3p=-3$; $p=-1$

$5x^2-2x-3=0$

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{5}$; $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -0{,}6$.

Ответ: –0,6.

2.26(2) $x=-1$ — корень уравнения, поэтому

$3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 2m = 0$;

$2m-2=0$; $2m=2$

$m=1$

$3x^2+5x+2=0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3}$; $x_1=-1 \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

6 баллов

2.31(1) $(2x^2-x+1)^2+6x=1+9x^2$; $(2x^2-x+1)^2=1-6x+9x^2$.

1) $2x^2-x+1=1-3x$; $2x^2+2x=0$; $x(x+1)=0$; $x_1=0$; $x_2=-1$.

2) $2x^2-x+1=3x-1$; $2x^2-4x+2=0$; $x^2-2x+1=0$; $(x-1)^2=0$; $x_3=1$.

Ответ: –1; 0; 1.

2.31(2) $x^2+1 = 2x+(3x^2-x-2)^2$; $x^2-2x+1 = (3x^2-x-2)^2$
$(x-1)^2 = (3x^2-x-2)^2$. 1) $x-1 = 3x^2-x-2$; $3x^2-2x-1 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3} = \frac{1\pm 2}{3}; \; x_1 = 1; \; x_2 = -\frac{1}{3}.$$

2) $1-x = 3x^2-x-2$; $3x^2-3 = 0$; $x^2 = 1$; $x_3 = -1$; $x_4 = 1$.

Ответ: -1; $-\frac{1}{3}$; 1.

2.32(1) $(x-2)^2(x^2-4x+3) = 12$; $(x^2-4x+4)(x^2-4x+3) = 12$; $x^2-4x+3 = y$.

$y(y+1)-12 = 0$; $y^2+y-12 = 0$. $\begin{cases} y_1y_2 = -12 \\ y_1+y_2 = -1 \end{cases}$; $y_1 = -4$; $y_2 = 3$

1) $x^2-4x+3 = -4$; $x^2-4x+7 = 0$; $D<0$. Корней нет.
2) $x^2-4x+3 = 3$; $x^2-4x = 0$; $x(x-4) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.
Ответ: 0; 4.

2.32(2) $(x^2+6x)^2-2(x+3)^2-17 = 0$; $(x^2+6x)^2-2(x^2+6x+9)-17 = 0$
пусть $x^2+6x = y$; $y^2-2(y+9)-17 = 0$; $y^2-2y-18-17 = 0$; $y^2-2y-35 = 0$

$\begin{cases} y_1y_2 = -35 \\ y_1+y_2 = 2 \end{cases}$; $y_1 = 7$; $y_2 = -5$

1) $x^2+6x = 7$; $x^2+6x-7 = 0$; $\begin{cases} x_1x_2 = -7 \\ x_1+x_2 = -6 \end{cases}$; $x_1 = -7$; $x_2 = 1$

2) $x^2+6x = -5$; $x^2+6x+5 = 0$; $\begin{cases} x_3x_4 = 5 \\ x_3+x_4 = -6 \end{cases}$; $x_3 = -5$; $x_4 = -1$

Ответ: -7; -5; -1; 1.

2.33(1) $(x^2-7x+13)^2-(x-3)(x-4) = 1$; $(x^2-7x+13)^2-(x^2-7x+12)-1 = 0$,
пусть $x^2-7x+13 = y$; $y^2-(y-1)-1 = 0$; $y^2-y = 0$; $y(y-1) = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = 1$
1) $x^2-7x+13 = 0$; $D<0$; уравнение не имеет корней.

2) $x^2-7x+13 = 1$; $x^2-7x+12 = 0$. $\begin{cases} x_1x_2 = 12 \\ x_1+x_2 = 7 \end{cases}$; $x_1 = 3$; $x_2 = 4$.

Ответ: 3; 4.

2.33(2) $(x^2-5x+7)^2-(x-3)(x-2) = 1$
$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6)-1 = 0$ пусть $x^2-5x+7 = y$
$y^2-(y-1)-1 = 0$; $y^2-y = 0$; $y(y-1) = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = 1$
1) $x^2-5x+7 = 0$; $D<0$; уравнение не имеет корней.

2) $x^2-5x+7 = 1$; $x^2-5x+6 = 0$; $\begin{cases} x_1x_2 = 6 \\ x_1+x_2 = 5 \end{cases}$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$

Ответ: 2; 3.

2.34(1) $(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)=60$

$\big((x-2)(x+3)\big)\big((x-1)(x+2)\big)-60=0$

$(x^2+x-6)(x^2+x-2)-60=0$; пусть $x^2+x-2=y$; $y(y-4)-60=0$

$y^2-4y-60=0$; $\begin{cases} y_1y_2=-60 \\ y_1+y_2=4 \end{cases}$; $y_1=10$; $y_2=-6$

1) $x^2+x-12=0$; $\begin{cases} x_1x_2=-12 \\ x_1+x_2=-1 \end{cases}$; $x_1=-4$; $x_2=3$

2) $x^2+x-2=-6$; $x^2+x+4=0$; $D<0$; уравнение корней не имеет.

Ответ: -4; 3.

2.34(2) $x(x+1)(x+2)(x+3)=120$;

$\big(x(x+3)\big)\big((x+1)(x+2)\big)-120=0$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)-120=0$; пусть $x^2-3x=y$; $y(y+2)-120=0$

$y^2+2y-120=0$; $\begin{cases} y_1y_2=-120 \\ y_1+y_2=-2 \end{cases}$; $y_1=-12$; $y_2=10$

1) $x^2+3x=-12$; $x^2+3x+12=0$; $D<0$; уравнение не имеет корней.

2) $x^2+3x=10$; $x^2+3x-10=0$; $\begin{cases} x_1x_2=-10 \\ x_1+x_2=-3 \end{cases}$; $x_1=-5$; $x_2=2$.

Ответ: -5; 2.

2.35(1) $x^3+6x^2+mx=0$; $x(x^2+6x+m)=0$, откуда $x=0$ — корень.
Уравнение имеет 2 корня, если $D=0$ в уравнении $x^2+6x+m=0$:
$D=36-4m$; $m=9$; при $m=9$ получим: $x^2+6x+9=(x+3)^2=0$ и, следовательно, $x=-3$.

Ответ: при $m=9$; $x_1=0$; $x_2=-3$.

2.35(2) $4x^3+4x^2+kx=0$; $x(4x^2+4x+k)=0$; $x=0$; $4x^2+4x+k=0$.
Уравнение имеет 2 корня, если $D=0$ в уравнении $4x^2+4x+k=0$:
$D=16-16k=0$, $k=1$. При $k=1$ уравнение $4x^2+4x+1=0$ имеет вид $4x^2+4x+1=(2x+1)^2=0$; $x=-0{,}5$.

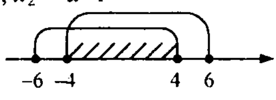
Ответ: при $k=1$; $x_1=0$; $x_2=-0{,}5$.

2.36(1) $x^2-2ax+(a+1)(a-1)=0$

1) $x^2-2ax+a^2-1=0$

2) $x=a\pm\sqrt{a^2-a^2+1}=a\pm1$; $x_1=a+1$; $x_2=a-1$

$\begin{cases} -5\le a+1\le 5 \\ -5\le a-1\le 5 \end{cases}$; $\begin{cases} -6\le a\le 4 \\ -4\le a\le 6 \end{cases}$

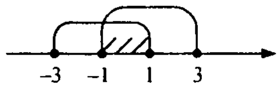


Ответ: при $-4\le a\le 4$.

2.36(2) $x^2-2(p+1)x+p(p+2)=0$;

$x_{1,2}=p+1\pm\sqrt{p^2+2p+1-p^2-2p}$; $x=p+1\pm1$. $x_1=p+2$; $x_2=p$

$\begin{cases}-1\le p+2\le 3\\ -1\le p\le 3\end{cases}$; $\begin{cases}-3\le p\le 1\\ -1\le p\le 3\end{cases}$



Ответ: при $-1\le p\le 1$.

2.37(1) $x^2-(a+1)x+2a^2=0$

1) $\frac{1}{2}$ будет находиться между корнями x_1 и x_2, если $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-(a+1)\frac{1}{2}+2a^2$; $\frac{1}{4}-(a+1)\frac{1}{2}+2a^2<0$;

$1-2(a+1)+8a^2<0$; $8a^2-2(a+1)+1<0$; $8a^2-2a-2+1<0$

$8a^2-2a-1<0$; $8a^2-2a-1=0$, тогда $a=\frac{1\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{1\pm3}{8}$;

$a_1=\frac{1}{2}$; $a_2=-\frac{1}{4}$; $8a^2-2a-1<0$ при $-\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$.

2.37(2) 2 будет находиться между корнями x_1 и x_2, если $f(2)<0$.

$f(2)=4-2a^2-4a+2=-2a^2-4a+6<0$

$a^2+2a-3>0$

$a^2+2a-3=0$; $D=4+4\cdot3=16$; $a_{1,2}=\frac{-2\pm4}{2}$; $a_1=1$; $a_2=-3$;

$a^2+2a-3<0$ при $a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

2.38(1) $y=x^2+(a+1)x-a^2$; $x_1<1<x_2$

1) 1 будет находиться между корнями x_1 и x_2, если $f(1)<0$.

$f(1)=1+a+1-a^2=-a^2+a+2$; $-a^2+a+2<0$; $a^2-a-2>0$; $a^2-a-2=0$; тогда $a_1=2$; $a_2=-1$ и $a^2-a-2>0$ при $a<-1$ и $a>2$.

Ответ: $a<-1$; $a>2$.

2.38(2) 1 будет находиться между корнями x_1 и x_2, если $f(1)>0$.

$f(1)=-1+2(a-1)+a^2=a^2+2a-3>0$

$a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ **Ответ:** $a\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

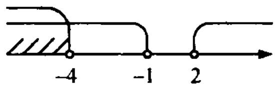
2.39(1) $x^2+2(b+1)x+9=0$

1) $x_1>0$; $x_2>0$; $D>0$; $D=4(b+1)^2-36>0$; $(b+1)^2-9>0$;

$(b+1)^2>9$; $b+1>3$ или $b+1<-3$; $b>2$ или $b<-4$.

1) $\begin{cases} b < -4 \\ 2(b+1) < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} b < -4 \\ b < -1 \end{cases}$; $b < -4$.

2) $\begin{cases} b > 2 \\ 2(b+1) < 0 \end{cases}$ решений нет.



Ответ: при $b<-4$.

2.39(2) $x^2-4x+(4-k^2) = 0$. 1) Уравнение имеет различные корни, если $D>0$. Т.к. корни разных знаков, то $4-k^2<0$.

2) $D = 16-4(4-k^2)>0$; $16 - 16 +4k^2>0$; $k^2>0$.

Дискриминант этого уравнения положителен при любом k.

3) $k_1>0$; $k_2<0$; $4-k^2<0$; $k^2>4$; $k<-2$; $k>2$. При $k<-2$ или $k>2$ корни будут иметь разные знаки.

Ответ: $k<-2$; $k>2$.

2.40(1) $x^2+(2-m)x-m-3 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m-2)^2 - 2(-m-3) =$$

$$= m^2-4m+4+2m+6 = m^2-2m+10 = m^2-2m+1+9 = (m-1)^2+9$$

Наименьшее значение трехчлен $m^2-2m+10$ достигает при $m = 1$.

Ответ: $m = 1$.

2.40(2) $x^2+2mx+m-1 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 2(m-1) = 4m^2 - 2m + 2 =$$

$$= 4\left(m^2 - \frac{m}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = 4\left(\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right).$$ Трехчлен $4m^2 - 2m + 2$ достигает минимального значения при $m = \frac{1}{4}$.

Ответ: $m = \frac{1}{4}$.

2.41(1) $(x^2+2x+2)(x^2-4x+5) = 1$; $(x^2+2x+1+1)(x^2-4x+4+1) = 1$; $((x+1)^2+1)((x-2)^2+1) = 1$. Наименьшее значение трехчлена x^2+2x+2 равно 1 и достигается при $x = -1$.

Наименьшее значение трехчлена x^2-4x+5 равно 1 при $x = 2$.

Поэтому данное уравнение не имеет корней.

2.41(2) $(x^2-2x+3)(x^2-6x+10) = 2$; $(x^2-2x+1+2)(x^2-6x+9+1) = 2$; $((x-1)^2+2)((x-3)^2+1) = 2$. Наименьшее значение трехчлена x^2-2x+3 равно 2 при $x = 1$. Наименьшее значение трехчлена $x^2-6x+10$ равно 1 при $x = 3$. Поэтому уравнение не имеет корней.

2.42(1) I. $(2x^2-4x+3)(x^2-2x+2) = 1$

$(2(x^2-2x+1)+1)((x^2-2x+1)+1) = 1$; $(2(x-1)^2+1)((x-1)^2+1) = 1$.

Наименьшее значение трехчлена $2x^2-4x+3$ равно 1 при $x = 1$.

Наименьшее значение трехчлена x^2-2x+2 равно 1 при $x = 1$.

Следовательно, 1 является корнем уравнения.

При $x \neq 1$ значения обоих трехчленов будут больше 1, следовательно, других корней уравнение не имеет.

2.42(2) $(x^2-4x+5)(2x^2-8x+9)=1$;

$(x^2-4x+4+1)(2(x^2-4x+4)+1)=1$;

$((x-2)^2+1)(2(x-2)^2+1)=1$.

Наименьшее значение трехчлена x^2-4x+5 равно 1 при $x = 2$. Наименьшее значение трехчлена $2x^2-8x+9$ равно 1 при $x = 2$.

2 — корень уравнения. Других корней нет.

2.43(1) $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$; пусть $\dfrac{x^2+x-5}{x}=y$;

$x \neq 0;\ x^2+x-5 \neq 0$

1) $y+\dfrac{3}{y}+4=0$; $\dfrac{y^2+4y+3}{y}=0$; $\begin{cases} y^2+4y+3=0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1y_2=3 \\ y_1+y_2=-4 \end{cases}$

$y_1=-3;\ y_2=-1$

2) $\dfrac{x^2+x-5}{x}=-3$; $\begin{cases} x^2+x-5+3x=0 \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+4x-5=0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$x_1=-5;\ x_2=1$

3) $\dfrac{x^2+x-5}{x}=-1$; $\dfrac{x^2+x-5+x}{x}=0$; $\begin{cases} x^2+2x-5=0 \\ x \neq 0 \end{cases}$;

$x=-1\pm\sqrt{6}$

Ответ: $-5; -1-\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}; 1$.

2.43(2) $\dfrac{x^2-14}{x}-\dfrac{10x}{x^2-14}=3$; $x \neq 0$; $x^2-14 \neq 0$

1) $\dfrac{x^2-14}{x}=y$; $y-\dfrac{10}{y}-3=0$; $y \neq 0$; $y^2-3y-10=0$; $y_1=5$;

$y_2=-2$

2) $\dfrac{x^2-14}{x}=5$; $x^2-5x-14=0$; $x_1=7;\ x_2=-2$

3) $\dfrac{x^2-14}{x}=-2$; $x^2+2x-14=0$, $x_3=-1+\sqrt{15}$; $x_4=-1-\sqrt{15}$.

Ответ: $-2; 7; -1+\sqrt{15}; -1-\sqrt{15}$.

2.44(1) $\left(\frac{x^2+12}{9-x^2}\right)^2-\left(\frac{7x}{x^2-9}\right)^2=0$

$\left(\frac{x^2+12}{9-x^2}\right)^2-\left(\frac{7x}{9-x^2}\right)^2=0$; $x\neq\pm3$; $\left(\frac{x^2+12}{9-x^2}\right)^2=\left(\frac{7x}{9-x^2}\right)^2$

1) $\frac{x^2+12}{9-x^2}=\frac{7x}{9-x^2}$; $\begin{cases}x^2+12=7x\\9-x^2\neq0\end{cases}$, $x^2-7x+12=0$; $x_1=3$; $x_2=4$

3 не является корнем данного уравнения; $x=4$.

2) $\frac{x^2+12}{9-x^2}=\frac{-7x}{9-x^2}$; $x^2+12=-7x$, $9-x^2\neq0$. $\begin{cases}x^2+7x+12=0\\9-x^2\neq0\end{cases}$

$x_2=-3$; $x_3=-4$; -3 не является корнем уравнения; $x=-4$.

Ответ: -4; 4.

2.44(2) $\left(\frac{x^2+10}{4-x^2}\right)^2-\left(\frac{7x}{x^2-4}\right)^2=0$;

$\left(\frac{x^2+10}{4-x^2}\right)^2=\left(\frac{7x}{4-x^2}\right)^2$; $x\neq\pm2$

1) $\frac{x^2+10}{4-x^2}=\frac{7x}{4-x^2}$; $\begin{cases}x^2-7x+10=0\\4-x^2\neq0\end{cases}$

$x_1=2$; $x_2=5$; 2 не является корнем уравнения.

2) $\frac{x^2+10}{4-x^2}=-\frac{7x}{4-x^2}$; $\begin{cases}x^2+10+7x=0\\4-x^2\neq0\end{cases}$

$x_3=-2$; $x_4=-5$; -2 не является корнем уравнения.

Ответ: -5; 5.

2.45(1) $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$; $x\neq0$; -1; -2.

$\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{12}$; $x^2+2x=y$

1) $\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{12}$; $\begin{cases}12(y+1)-12y-y(y+1)=0\\y(y+1)\neq0\end{cases}$; $y\neq0$; $y\neq-1$.

$12y+12-12y-y^2-y=0$; $-y^2-y+12=0$; $y^2+y-12=0$; $y_1=-4$; $y_2=3$.

2) $x^2+2x=-4$; $x^2+2x+4=0$; $D<0$; уравнение не имеет корней

3) $x^2+2x=3$; $x^2+2x-3=0$; $x_1=-3$; $x_2=1$.

Ответ: -3; 1.

2.45(2) $\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x(x-4)}=\dfrac{4}{3}$; $x \neq 0; 4; 2$

$\dfrac{1}{x^2-4x+4}-\dfrac{1}{x^2-4x}=\dfrac{4}{3}$; $x^2-4x=y$

1) $\dfrac{1}{y+4}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{3}$; $\begin{cases}3y-3(y+4)-4y(y+4)=0\\ y(y+4)\neq 0\end{cases}$

$3y-3y-12-4y^2-16y=0$; $-4y^2-16y-12=0$; $y^2+4y+3=0$; $y_1=-3$; $y_2=-1$.

2) $x^2-4x=-3$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=3$; $x_2=1$.

3) $x^2-4x=-1$; $x^2-4x+1=0$; $x_{3,4}=2\pm\sqrt{3}$.

Ответ: $1; 3; 2\pm\sqrt{3}$.

2.46(1) $\left(x-\dfrac{2x}{x+2}\right)^2+\dfrac{4x^2}{x+2}=5$; $\left(\dfrac{x^2+2x-2x}{x+2}\right)^2+\dfrac{4x^2}{x+2}=5$

$\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^2+\dfrac{4x^2}{x+2}=5$; $x\neq -2$ 1) $\dfrac{x^2}{x+2}=y$; $y^2+4y-5=0$;

$y_1=-5$; $y_2=1$.

2) $\dfrac{x^2}{x+2}=1$; $\begin{cases}x^2-x-2=0\\ x+2\neq 0\end{cases}$; $x_1=2$; $x_2=-1$.

3) $\dfrac{x^2}{x+2}=-5$; $\begin{cases}x^2+5x+10=0\\ x+2\neq 0\end{cases}$; $x\neq -2$.

Уравнение $x^2+5x+10=0$ не имеет корней, т.к. $D<0$.

Ответ: $-1; 2$.

2.46(2) $\left(x+\dfrac{3x}{x-3}\right)^2=4-\dfrac{3x^2}{x-3}$; $\left(\dfrac{x^2-3x+3x}{x-3}\right)^2=4-\dfrac{3x^2}{x-3}$;

$\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)^2-4+\dfrac{3x^2}{x-3}=0$; $x\neq 3$.

1) $\dfrac{x^2}{x-3}=y$; $y^2+3y-4=0$; $y_1=-4$; $y_2=1$.

2) $\dfrac{x^2}{x-3}=-4$; $\begin{cases}x-3\neq 0\\ x^2+4x-12=0\end{cases}$; $x_1=-6$; $x_2=2$.

3) $\dfrac{x^2}{x-3}=1$; $\begin{cases}x^2-x+3=0 \ (1)\\ x-3\neq 0\end{cases}$

Уравнение (1) корней не имеет, т.к. $D<0$. **Ответ:** $-6; 2$.

2.47(1) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=9$; $x\neq 0$.

1) $x+\frac{1}{x}=y$; $x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$. $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

2) $7y-2(y^2-2)=9$; $7y-2y^2+4-9=0$; $-2y^2+7y-5=0$; $2y^2-7y+5=0$;

$y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\frac{7\pm 3}{4}$; $y_1=\frac{5}{2}$; $y_2=1$.

3) $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$; $\begin{cases}2x^2-5x+2=0\\ x\neq 0\end{cases}$; $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$;

$x_1=2$; $x_2=0{,}5$.

4) $x+\frac{1}{x}=1$; $x^2-x+1=0$ (1); $D<0$.

Уравнение (1) не имеет корней. **Ответ:** 0,5; 2.

2.47(2) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-11\left(x-\frac{1}{x}\right)+8=0$; $x\neq 0$

1) $x-\frac{1}{x}=y$; $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$; $2(y^2+2)-11y+8=0$;

$2y^2+4-11y+8=0$;

$2y^2-11y+12=0$; $y_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{4}=\frac{11\pm 5}{4}$; $y_1=4$; $y_2=1{,}5$.

2) $x-\frac{1}{x}=4$; $\begin{cases}x^2-4x-1=0\\ x\neq 0\end{cases}$; $x_{1,2}=2\pm\sqrt{5}$.

3) $x-\frac{1}{x}=1{,}5$; $\begin{cases}x^2-1{,}5x-1=0\\ x\neq 0\end{cases}$; $2x^2-3x-2=0$;

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}$; $x_3=2$; $x_4=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 2; $2-\sqrt{5}$; $2+\sqrt{5}$.

2.48(1) $\frac{12}{(x+1)(x+5)}+\frac{15}{(x+2)(x+4)}-2=0$

$\frac{12}{x^2+6x+5}+\frac{15}{x^2+6x+8}-2=0$; $x\neq -1$; -5; -2; -4

1) $x^2+6x+5=y$; $\frac{12}{y}+\frac{15}{y+3}-2=0$;

$$\begin{cases} 12(y+3)+15y-2y(y+3)=0 \\ y(y+3)\neq 0 \end{cases}$$

$12y + 36 + 15y - 2y^2 - 6y = 0$; $-2y^2 + 21y + 36 = 0$;
$2y^2 - 21y - 36 = 0$;

$$y_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441+288}}{4} = \frac{21 \pm 27}{4};\ y_1 = 12;\ y_2 = -\frac{3}{2}.$$

2) $x^2+6x+5 = 12$; $x^2+6x-7 = 0$; $x_1 = -7$; $x_2 = 1$.
3) $x^2+6x+5 = -1{,}5$; $x^2+6x+6{,}5 = 0$; $2x^2+12x+13 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-26}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2}.$$

Ответ: -7; 1; $\frac{-6-\sqrt{10}}{2}$; $\frac{-6+\sqrt{10}}{2}$.

2.48(2) $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} + \dfrac{9}{(x-1)(x+5)} = -1$

$\dfrac{1}{x^2+4x+3} + \dfrac{9}{x^2+4x-5} = -1$; $x \neq -1; -3; 1; -5$

1) $x^2+4x+3 = y$; $\dfrac{1}{y} + \dfrac{9}{y-8} + 1 = 0$; $\begin{cases} y-8+9y+y(y-8)=0 \\ y(y-8)\neq 0 \end{cases}$

$y-8+9y+y^2-8y = 0$; $y^2+2y-8 = 0$; $y_1 = -4$; $y_2 = 2$.
2) $x^2+4x+3 = -4$; $x^2+4x+7 = 0$ (1).
Уравнение (1) не имеет корней, т.к. $D<0$.
3) $x^2+4x+3 = 2$; $x^2+4x+1 = 0$; $x = -2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $-2+\sqrt{3}$; $-2-\sqrt{3}$.

3. Системы уравнений

2 балла

3.1(1)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y-2x}{5} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{y}{2} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{x+y}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-3y+6x=20 \\ 3y+5=2x+2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x-3y=20 \\ 2x-y=5 \end{cases}\Bigg| -3 \quad \begin{cases} 11x-3y=20 \\ -6x+3y=-15 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x=5 \\ y=2x-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

Ответ: $(1; -3)$.

3.1(2) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} - \dfrac{y-3x}{2} = -6 \\ \dfrac{y-x}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{y}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y + 6x = -24 \\ 2y - 2x - 1 = 3y \end{cases}$

$\begin{cases} 9x - 2y = -24 \\ -2x - y = 1 \end{cases} \Big| -2$ $\begin{cases} 9x - 2y = -24 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} 13x = -26 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$; $x = -2$, $y = 3$.

Ответ: $(-2; 3)$.

3.2(1) $\begin{cases} 3(x-y) - 2(x+y) = 2(x-y) \\ \dfrac{x+y}{5} - \dfrac{x-y}{3} = 1 - \dfrac{y}{15} \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y) - 2(x+y) = 0 \\ 3x + 3y - 5x + 5y = 15 - y \end{cases}$

$\begin{cases} x - y - 2x - 2y = 0 \\ -2x + 9y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -2x + 9y = 15 \end{cases} \Big| -2$ $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -2x + 9y = 15 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -2x + 9y = 15 \end{cases}$ $\begin{cases} 15y = 15 \\ x = -3y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = -3 \end{cases}$ **Ответ:** $(-3; 1)$.

3.2(2)

$\begin{cases} 5(x+y) - 4(x-y) = 8y - 3x \\ \dfrac{x-y}{2} - \dfrac{x+y}{6} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + 5y - 4x + 4y - 8y + 3x = 0 \\ 3x - 3y - x - y = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x - 4y = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} 16x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} 18x = 18 \\ y = -4x \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$

Ответ: $(1; -4)$.

3.3(1) $\begin{cases} 4x^2 - y = 2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \Big| -2$ $\begin{cases} -8x^2 + 2y = -4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} -8x^2 + 3x = -5 \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x^2 - 3x - 5 = 0 \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$; $8x^2 - 3x - 5 = 0$ $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \dfrac{3 \pm 13}{16}$;

$x_1 = -\dfrac{5}{8}$; $x_2 = 1$

$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{8} \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{8} \\ y_1 = -\dfrac{7}{16} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

Ответ: $\left(-\dfrac{5}{8}; -\dfrac{7}{16}\right)$; $(1; 2)$.

3.3(2) $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2-y=11 \end{cases}\Big|3 \quad \begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 6x^2-3y=33 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2+4x-32=0 \\ y=2x^2-11 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x^2+2x-16=0 \\ y=2x^2-11 \end{cases}$; $3x^2+2x-16=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{3}=\dfrac{-1\pm 7}{3}$; $x_1=-\dfrac{8}{3}$; $x_2=2$

$\begin{cases} x_1=-\dfrac{8}{3} \\ y=2x^2-11 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=2 \\ y=2x^2-11 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=-\dfrac{8}{3} \\ y_1=3\dfrac{2}{9} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=2 \\ y=-3 \end{cases}$

Ответ: $\left(-2\dfrac{2}{3};3\dfrac{2}{9}\right);(2;-3)$.

3.4(1) $\begin{cases} x-y=5 \\ x^2+2xy-y^2=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2x(x-5)-(x-5)^2=-7 \\ y=x-5 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+2x^2-10-x^2+10x-25=-7 \\ y=x-5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2=18 \\ y=x-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=9 \\ y=x-5 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=3 \\ y=x-5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-3 \\ y=x-5 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-8 \end{cases}$

Ответ: (3; –2); (–3; –8).

3.4(2) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x^2+xy+y^2=8 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2-x \\ 2x^2+x(2-x)+(2-x)^2=8 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2-x \\ 2x^2+2x-x^2+4-4x+x^2=8 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2-x \\ 2x^2-2x-4=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=2-x \\ x^2-x-2=0 \end{cases}$ $x_1=2$; $x_2=-1$; $\begin{cases} x_1=2 \\ y=2-x \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-1 \\ y=2-x \end{cases}$

Ответ: (2; 0); (–1; 3).

3.5(1) $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+y^2=9-2xy \end{cases} \quad \begin{cases} x=7+y \\ (7+y)^2+y^2=9-2y(7+y) \end{cases}$

$\begin{cases} x=7+y \\ 49+14y+y^2+y^2=9-14y-2y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7+y \\ 4y^2+28y+40=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 7 + y \\ y^2 + 7y + 10 = 0 \end{cases}$ $(y_1 = -2; y_2 = -5)$ $\begin{cases} x = 7 + y \\ y_1 = -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 7 + y \\ y_2 = -5 \end{cases}$;

$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_2 = -5 \end{cases}$. **Ответ:** (5; –2); (2; –5).

3.5(2) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 - y \\ (8 - y)^2 + y^2 = 16 + 2y(8 - y) \end{cases}$

$\begin{cases} x = 8 - y \\ 64 - 16y + y^2 + y^2 = 16 + 16y - 2y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 - y \\ 4y^2 - 32y + 48 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 8 - y \\ y^2 - 8y + 12 = 0 \end{cases}$ $(y_1 = 2; y_2 = 6)$; $\begin{cases} x = 8 - y \\ y_1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 - y \\ y_2 = 6 \end{cases}$

Ответ: (6; 2); (2; 6).

3.6(1) $\begin{cases} x^2 - xy = 12 - y^2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 + 2y \\ (6 + 2y)^2 - y(6 + 2y) = 12 - y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 6 + 2y \\ 36 + 24y + 4y^2 - 6y - 2y^2 = 12 - y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 + 2y \\ 3y^2 + 18y + 24 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 6 + 2y \\ 3y^2 + 18y + 24 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 + 2y \\ y^2 + 6y + 8 = 0 \end{cases}$; $y_1 = -2; y_2 = -4$

Ответ: (2; –2); (–2; –4).

3.6(2) $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ x^2 - y^2 = 20 - xy \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x^2 - (3x - 10)^2 = 20 - x(3x - 10) \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x^2 - 9x^2 + 60x - 100 = 20 - 3x^2 + 10x \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x - 10 \\ -5x^2 + 50x - 120 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x^2 - 10x + 24 = 0 \end{cases}$ $(x_1 = 6; x_2 = 4)$;

$\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x_1 = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Ответ: (6; 8); (4; 2).

3.7(1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{3}; y \neq 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + (3x)^2 = 50 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + 9x^2 = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x \\ x^2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3x \\ x_1 = -\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x \\ x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$

Ответ: $(-\sqrt{5}; -3\sqrt{5}); (\sqrt{5}; 3\sqrt{5})$.

3.7(2)

$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 - y^2 = 21 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{7} \\ y_1 = \sqrt{7} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = -2\sqrt{7} \\ y_2 = -\sqrt{7} \end{cases}$

Ответ: $(2\sqrt{7}; \sqrt{7}); (-2\sqrt{7}; -\sqrt{7})$.

3.8(1) $\begin{cases} y = 3x^2 - 8x - 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 - 8x - 2 = x^2 - 4 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 8x + 2 = 0 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{3} \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{3} \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 4 \\ x_1 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$. $\begin{cases} y_2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 4 \\ x_2 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $(2 + \sqrt{3}; 3 + 4\sqrt{3}); (2 - \sqrt{3}; 3 - 4\sqrt{3})$.

3.8(2) $y = 2x^2 - 6x - 1$; $y = x^2 - 2x$; $2x^2 - 6x - 1 = x^2 - 2x$;
$x^2 - 4x - 1 = 0$, $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

1) $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ y = (2 + \sqrt{5})^2 - 2(2 + \sqrt{5}) \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ y = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ y = 5 + 2\sqrt{5} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ y = (2 - \sqrt{5})^2 - 2(2 - \sqrt{5}) \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ y = 4 - 4\sqrt{5} + 5 - 4 + 2\sqrt{5} \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ y = 5 - 2\sqrt{5} \end{cases}$

Ответ: $(2 + \sqrt{5}; 5 + 2\sqrt{5}); (2 - \sqrt{5}; 5 - 2\sqrt{5})$.

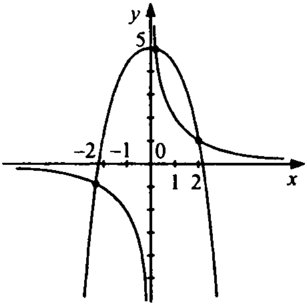
3.9(1) $\begin{cases} xy = 2 \\ y + x^2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y = 5 - x^2 \end{cases}$

$y = \dfrac{2}{x}$

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	$-\dfrac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\dfrac{1}{2}$

$y = 5 - x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	1	4	5	4	1



Система имеет 3 решения. **Ответ:** 3.

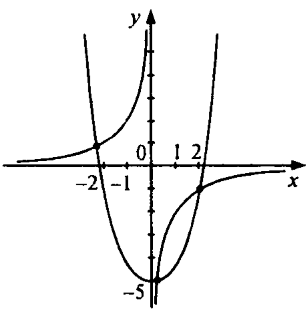
3.9(2) $\begin{cases} xy = -2 \\ x^2 - y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{x} \\ y = x^2 - 5 \end{cases}$

$y = -\dfrac{2}{x}$

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	$\dfrac{1}{2}$	1	2	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$

$y = x^2 - 5$

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-4	-5	-4	-1



Система уравнений имеет 3 решения. **Ответ:** 3.

4 балла

3.10(1) $\begin{cases}(x-1)(y+4)=0\\ y^2+xy-2=0\end{cases}$

1) $\begin{cases}y^2+xy-2=0\\ x-1=0\end{cases}$ или $\begin{cases}y+4=0\\ y^2+xy-2=0\end{cases}$;

$\begin{cases}y^2+y-2=0\\ x_1=1\end{cases}$ или $\begin{cases}y_2=-4\\ 16-4x-2=0\end{cases}$;

$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=-2\end{cases}$; $\begin{cases}x_2=1\\ y_2=1\end{cases}$; $\begin{cases}x_2=3,5\\ y_2=-4\end{cases}$

Ответ: (1; –2); (1; 1); (3,5; –4).

3.10(2) $\begin{cases}(x+2)(y-1)=0\\ x^2-xy-12=0\end{cases}$;

$\begin{cases}x+2=0\\ x^2-xy-12=0\end{cases}$ или $\begin{cases}y=1\\ x^2-xy-12=0\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=-2\\ 4+2y-12=0\end{cases}$; $\begin{cases}y=1\\ x^2-x-12=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-2\\ y_1=4\end{cases}$; $\begin{cases}x_2=4\\ y_2=1\end{cases}$; $\begin{cases}x_3=-3\\ y_3=1\end{cases}$

Ответ: (–2; 4); (4; 1); (–3; 1).

3.11(1) $\begin{cases}(x-1)(2y+1)=0\\ 2y^2+x-y=7\end{cases}$

$\begin{cases}x=1\\ 2y^2+1-y=7\end{cases}$ или $\begin{cases}y=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}+x+\dfrac{1}{2}=7\end{cases}$

$\begin{cases}x=1\\ 2y^2-y-6=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=1\\ y_1=2\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1\\ y_2=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=6\\ y_3=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ответ: (1; 2); (1; –1,5); $\left(6; -\dfrac{1}{2}\right)$.

3.11(2) $\begin{cases}(2x-1)(y+2)=0\\ x^2-4x+y=-5\end{cases}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4}-2+y=-5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=-2 \\ x^2-4x-2=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-3,25 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=0,5 \\ y_1=-3,25 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=3 \\ y_3=-2 \end{cases}$$

Ответ: (0,5; –3,25); (1; -2); (3; -2).

3.12(1) $\begin{cases} xy=-8 \\ (x-4)(y-2)=-12 \end{cases}$; 1) $x\neq 0; y\neq 0$

$$\begin{cases} xy=-8 \\ xy-4y-2x+8=-12 \end{cases}; \begin{cases} -8-4y-2x+8=-12 \\ xy=-8 \end{cases}; \begin{cases} x+2y=6 \\ xy=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{8}{y} \\ -\dfrac{8}{y}+2y-6=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-\dfrac{8}{y} \\ -\dfrac{4}{y}+y-3=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-\dfrac{8}{y} \\ y^2-3y-4=0 \end{cases}; \begin{cases} y_1=4 \\ x_1=-2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y_2=-1 \\ x_2=8 \end{cases}$$

Ответ: (–2; 4)(8; –1).

3.12(2) $\begin{cases} xy=24 \\ (x+1)(y-2)=20 \end{cases}$;

1) $x\neq 0; y\neq 0$; $\begin{cases} xy=24 \\ xy+y-2x-2=20 \end{cases}$; $\begin{cases} x=24 \\ 24+y-2x-2=20 \end{cases}$;

$$\begin{cases} xy=24 \\ y-2x=-2 \end{cases}; \; y=\frac{24}{x}\,(x\neq 0); \begin{cases} \dfrac{24}{x}-2x+2=0 \\ y=\dfrac{24}{x} \end{cases};$$

$$(x\neq 0); \begin{cases} -2x^2+2x+24=0 \\ y=\dfrac{24}{x} \end{cases}; \begin{cases} x^2-x-12=0 \\ y=\dfrac{24}{x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=6 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-8 \end{cases}$$

Ответ: (4; 6); (–3; –8).

3.13(1) $\begin{cases} xy = 4 \\ y^2 - x^2 = 6 \end{cases}$ 1) $xy \neq 0\ (x \neq 0;\ y \neq 0)$

$\begin{cases} y = \dfrac{4}{x} \\ y^2 - x^2 = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{16}{x^2} - x^2 = 6 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$; $\begin{cases} 16 - x^4 - 6x^2 = 0\ (x \neq 0) \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$

$x^2 = a$; $a>0$; $a^2+6a-16 = 0$; $a_1 = -8$; $a_2 = 2$

$\begin{cases} x^2 = 2 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ y_1 = -2\sqrt{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = \sqrt{2} \\ y_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right); \left(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

3.13(2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ xy = 18 \end{cases}$

1) $x \neq 0; y \neq 0$. 2) $\begin{cases} x = \dfrac{18}{y} \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases}$. 3) $\begin{cases} \dfrac{324}{y^2} - y^2 = 15 \\ x = \dfrac{18}{y} \end{cases}$.

4) $y^2 = a$; $a>0$; $\dfrac{324}{a} - a = 15$; $-a^2-15a+324 = 0$; $a^2+15a-324 = 0$;

$a_{1,2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{225+1296}}{2} = \dfrac{-15 \pm 39}{2}$; $a_1 = -27$; $a_2 = 12$.

5) $\begin{cases} y^2 = 12 \\ x = \dfrac{18}{y} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y_1 = -2\sqrt{3} \\ x_1 = -3\sqrt{3} \end{cases}$; $\begin{cases} y_2 = 2\sqrt{3} \\ x_2 = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Ответ: $\left(-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right); \left(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$.

3.14(1) $\left.\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ xy = -12 \end{cases}\right|2$; $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 40 - 24 \\ xy = -12 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ xy = -12 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -12 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = -12 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$. **Ответ:** (6; –2); (–6; 2); (–2; 6); (2; –6).

3.14(2) $\begin{cases} xy = 8 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}\Bigg|2$; $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 20 + 16 \\ xy = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^2 = 36 \\ xy = 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 8 \end{cases}$

Ответ: (2; 4); (–2; –4); (4; 2); (–4; –2).

3.15(1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9 \end{cases}$ 1) $x \neq 0; y \neq 0$; 2) $\dfrac{1}{x} = a; \dfrac{1}{y} = b$;

3) $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 3b = 9 \end{cases}\Bigg|-2$; $\begin{cases} 2a + b = 4 \\ -2a + 6b = -18 \end{cases}$; $\begin{cases} 7b = -14 \\ a = 9 - 3b \end{cases}$

$\begin{cases} b = -2 \\ a = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = 3 \\ \dfrac{1}{y} = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **Ответ:** $\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

3.15(2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} = 4 \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x} = 10 \end{cases}$

1) $x \neq 0; y \neq 0$: 2) $\dfrac{1}{x} = a; \dfrac{1}{y} = b$; $\begin{cases} a + 4b = 4 \\ -2a + b = 10 \end{cases}\Bigg|2$; $\begin{cases} 2a + 8b = 8 \\ -2a + b = 10 \end{cases}$;

$\begin{cases} 9b = 18 \\ a = 4 - 4b \end{cases}$; $\begin{cases} b = 2 \\ a = -4 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = -4 \\ \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **Ответ:** $\left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$.

3.16(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ xy = -18 \end{cases}$; $x \neq 0; y \neq 0$ $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{6} \\ xy = -18 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x+y}{-18} = \dfrac{1}{6} \\ xy = -18 \end{cases}$;

$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -18 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = -6 \\ y_1 = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -6 \end{cases}$

Ответ: (–6; 3); (3; –6).

3.16(2) $\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{2}{3} \end{cases}$; $x \neq 0$; $y \neq 0$; $\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{y-x}{xy}=-\frac{2}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=2 \\ \frac{x-y}{xy}=\frac{2}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{2}{xy}=\frac{2}{3} \\ x-y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=3 \\ x-y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3 \end{cases}$

Ответ: (3; 1); (–1; –3).

3.17(1) $\begin{cases} \frac{6}{x-y}-\frac{8}{x+y}=-2 \\ \frac{9}{x-y}+\frac{10}{x+y}=8 \end{cases}$; $x \neq y; x \neq -y$

1) $\frac{1}{x-y}=a$; $\frac{1}{x+y}=b$; $\begin{cases} 6a-8b=-2 \\ 9a+10b=8 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \end{vmatrix}$; $\begin{cases} 18a-24b=-6 \\ -18a-20b=-16 \end{cases}$;

$\begin{cases} -44b=-22 \\ 6a-8b=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ 6a-4=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{x-y}=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x+y}=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2,5 \\ y=-0,5 \end{cases}$ **Ответ:** (2,5; –0,5).

3.17(2) $\begin{cases} \frac{4}{x-y}+\frac{12}{x+y}=3 \\ \frac{8}{x-y}-\frac{18}{x+y}=-1 \end{cases}$; $x \neq y; x \neq -y$

1) $\frac{1}{x-y}=a$; $\frac{1}{x+y}=b$

$\begin{cases} 4a+12b=3 \\ 8a-18b=-1 \end{cases} \Big| -2$; $\begin{cases} -8a-24b=-6 \\ 8a-18b=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} -42b=-7 \\ 4a+12b=3 \end{cases}$

$\begin{cases} b=\frac{1}{6} \\ 4a+2=3 \end{cases}$; $\begin{cases} b=\frac{1}{6} \\ a=\frac{1}{4} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x=10 \\ y=6-x \end{cases}$; $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ **Ответ:** (5; 1).

3.18(1)

$\begin{cases} x+y-xy=-14 \\ x+y+xy=2 \end{cases}$; 1) $x+y=a$; $xy=b$; $\begin{cases} a-b=-14 \\ a+b=2 \end{cases}$; $\begin{cases} a=-6 \\ b=8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=-4 \\ y_1=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=-4 \end{cases}$

Ответ: (–4; –2); (–2; –4).

3.18(2)

$\begin{cases} x-y+xy=-11 \\ x-y-xy=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=-11 \\ a-b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-5 \\ b=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$

$y=-\dfrac{6}{x}$

$x+\dfrac{6}{x}=-5$

$x^2+5x+6=0$

$x_1=-2$; $x_2=-3$

$y_1=3$; $y_2=2$ **Ответ:** (–2; 3); (–3; 2).

3.19(1) $\begin{cases} 5(x+y)+2xy=-19 \\ x+3xy+y=-35 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$

$\begin{cases} 5a+2b=-19 \\ a+3b=-35 \end{cases} \Big| (-5)$ $\begin{cases} 5a+2b=-19 \\ -5a-15b=175 \end{cases}$ $\begin{cases} 5a+2b=-19 \\ -13b=156 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=-12 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-12 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$ **Ответ:** (4; –3).

3.19(2) 1) $\begin{cases} 4(x-y)-3xy=-14 \\ 7x+4xy-7y=31 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y=a \\ xy=b \end{cases}$

$\begin{cases} 4a-3b=-14 \\ 7a+4b=31 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{vmatrix}$ $\begin{cases} 16a-12b=-56 \\ 21a+12b=93 \end{cases}$ $\begin{cases} 16a-12b=-56 \\ 37a=37 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=1 \\ xy=6 \end{cases}$

$y=\frac{6}{x}$; $x-\frac{6}{x}=1$; $x^2-x-6=0$; $x_1=3$; $x_2=-2$

$y_1=2$; $y_2=-3$. **Ответ:** (3; 2); (–2; –3).

3.20(1) $\begin{cases} xy-x^2=-18 \\ xy+x^2=14 \end{cases}$; $\begin{cases} 2xy=-4 \\ 2x^2=32 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2=16 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-4 \\ xy=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=4 \\ xy=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=-4 \\ y_1=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(-4;\frac{1}{2}\right)$; $\left(4;-\frac{1}{2}\right)$.

3.20(2) $\begin{cases} y^2+xy=3 \\ y^2-xy=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2y^2=8 \\ 2xy=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2=4 \\ xy=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} y_1=-2 \\ xy=-1 \end{cases}$

или $\begin{cases} y_2=2 \\ xy=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ y_1=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} y_2=2 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};-2\right)$; $\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

3.21(1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-y^4=15 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)=15 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2=8 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=2 \\ y^2=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-2 \\ y^2=1 \end{cases}$

Ответ: (2; –1); (2; 1); (–2; –1); (–2; 1).

3.21(2) $\begin{cases} x^4-y^4=5 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} \left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)=5 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+y^2=2,5 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2=4,5 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=\frac{9}{4} \\ y^2=\frac{9}{4}-2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=\frac{9}{4} \\ y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=-\frac{3}{2} \\ y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3.22(1) $\begin{cases} x+y=7 \\ (x^2-y^2)(x-y)=175 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=7 \\ (x-y)(x+y)(x-y)=175 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=7 \\ (x-y)^2=25 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-5 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=1 \\ y_2=6 \end{cases}$

Ответ: (6; 1); (1; 6).

3.22(2) $\begin{cases} x-y=5 \\ (x+y)(x^2-y^2)=245 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=5 \\ (x+y)(x-y)(x+y)=245 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=5 \\ (x+y)^2=49 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=-7 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-6 \end{cases}$

Ответ: (6; 1); (–1; –6).

3.23(1) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}-2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ \dfrac{(x-y)^2}{xy}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+3y=10 \\ x=y \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ **Ответ:** (2; 2).

3.23(2) $\begin{cases} 3x-2y=15 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-2y=15 \\ \dfrac{x^2+y^2+2xy}{xy}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x-2y=15 \\ (x+y)^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-2y=15 \\ x=-y \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$

Ответ: (3; –3).

3.24(1)

$\left.\begin{cases} 3x-4y=11 \\ 5x+2y=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}\right| 2$; $\begin{cases} 3x-4y=11 \\ 10x+4y=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-4y=11 \\ 13x=13 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

$1^2+(-2)^2=5\neq 4$

Ответ: решений нет.

3.24(2) $\left.\begin{cases} 5x-2y=18 \\ 7x+6y=-10 \\ 2x^2-y=12 \end{cases}\right| 3$; $\begin{cases} 15x-6y=54 \\ 7x+6y=-10 \\ 2x^2-y=12 \end{cases}$; $\begin{cases} 7x+6y=-10 \\ 22x=44 \\ 2x^2-y=12 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x=2 \\ 6y=-24 \\ 2x^2-y=12 \end{cases};\ \begin{cases} y=-4 \\ x=2 \\ 2x^2-y=12 \end{cases};\ 2\cdot(2^2)-(-4)=12.$$

Ответ: (2; –4).

3.25(1) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=-3 \\ x+2y=p \end{cases}\Bigg|3;\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-3y=-9 \\ x+2y=p \end{cases};\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ x+2y=p \end{cases};\ -1+4=p;\ p=3.$

Ответ: при $p=3$.

3.25(2) $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ x+y=4 \\ 2x-y=p \end{cases}\Bigg|2;\ \begin{cases} 3x-2y=7 \\ 2x+2y=8 \\ 2x-y=p \end{cases};\ \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ 2x-y=p \end{cases};\ p=6-1=5.$

Ответ: при $p=5$.

3.26(1) $\begin{cases} y=x^2+3x-1 \\ y=\dfrac{3}{x} \end{cases};\ x\neq 0$

$x^2+3x-1=\dfrac{3}{x};\ \ x^2+3x-1-\dfrac{3}{x}=0;$

$\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x}=0$

$x^2(x+3)-(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-1)=0$

$x_1=-3;\ x_2=1;\ x_3=-1$

$y_1=-1;\ y_2=3;\ y_3=-3$

Ответ: (–3; –1); (1; 3); (–1; –3).

3.26(2) $\begin{cases} y=x^2-x-4 \\ y=-\dfrac{4}{x} \end{cases};\ x\neq 0$

$x^2-x-4=-\dfrac{4}{x};\ x^2-x-4+\dfrac{4}{x}=0;$

$x^3-x^2-4x+4=0;$

$x^2(x-1)-4(x-1)=0;$

$(x^2-4)(x-1)=0;$

$x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=1$

$y_1=-2;\ y_2=2;\ y_3=-4$

Ответ: (2; –2); (–2; 2); (1; –4).

3.28(1) $\begin{cases} x^4+y^4=82 \\ xy=3 \end{cases}$; 1) $x\neq 0,\ y\neq 0$

2) $\begin{cases} x^4+y^4=82 \\ x=\dfrac{3}{y} \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{81}{y^4}+y^4=82 \\ x=\dfrac{3}{y} \end{cases}$; $y^4=a$, $a>0$

$\begin{cases} \dfrac{81}{a}+a=82 \\ a=y^4 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2-82a+81=0 \\ a=y^4 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1=81 \\ a=y^4 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_2=1 \\ a=y^4 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1=-3 \\ x_1=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y_2=3 \\ x_2=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y_3=1 \\ x_3=3 \end{cases}$ или $\begin{cases} y_4=-1 \\ x_4=-3 \end{cases}$

Ответ: (–1; –3); (1; 3); (3; 1); (–3; –1).

3.28(2) $\begin{cases} x^4+y^4=32 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$; $\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=32 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$;

$\begin{cases} 64-2x^2y^2=32 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2y^2=16 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=-4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$ или $\begin{cases} xy=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$

1) $\begin{cases} xy=-4 \\ (x+y)^2-2xy=8 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=-4 \\ (x+y)^2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=-4 \\ x=-y \end{cases}$; $\begin{cases} y^2=4 \\ x=-y \end{cases}$

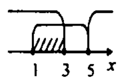
2) $\begin{cases} xy=4 \\ (x+y)^2-2xy=8 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=4 \\ (x+y)^2=16 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=4 \\ x+y=4 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=4 \\ x+y=-4 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_3=2 \\ y_3=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4=-2 \\ y_4=-2 \end{cases}$

Ответ: (–2; 2); (2; –2); (–2; –2); (2; 2).

3.29(1) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x+y+xy=5 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y)^2-xy=7 \\ x+y+xy=5 \end{cases}$; $x+y=a$; $xy=b$

$\begin{cases} a^2-b=7 \\ a+b=5 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2+a-12=0 \\ b=5-a \end{cases}$; $\begin{cases} a_1=-4 \\ b=5-a \end{cases}$ или $\begin{cases} a_2=3 \\ b=5-a \end{cases}$

$\begin{cases} a_1=-4 \\ b_1=9 \end{cases}$; $\begin{cases} a_2=3 \\ b_2=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=9 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ .

Составим квадратные уравнения с предполагаемыми корнями x и y: $c^2+4c+9 = 0$ (1); $t^2 - 3t + 2 = 0$(2). Уравнение (1) не имеет корней, т.к. его $D < 0$; уравнение (2) имеет 2 корня $t_1 = 2$; $t_2 = 1$.

Получаем: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$. **Ответ:** (2; 1); (1; 2).

3.29(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 3 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$;

$x + y = a$; $xy = b$

$\left\{\begin{array}{l|l} a^2 - 3b = 3 & \\ a - b = 1 & -3 \end{array}\right.$; $\begin{cases} a^2 - 3b = 3 \\ -3a + 3b = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2 - 3a = 0 \\ b = a - 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a(a-3) = 0 \\ b = a - 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$. 1) $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -y \\ -y^2 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \mp 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - y \\ (3-y)y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - y \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Ответ: (1; –1); (–1; 1); (1; 2); (2; 1).

3.30(1)

$\begin{cases} -2x^2 - x + 10y = -16 \\ y^2 + x + 2x^2 = 40 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 + 10y - 24 = 0 \\ y^2 + x + 2x^2 = 40 \end{cases}$

$y_1 = 2$; $y_2 = -12$

1) $\begin{cases} y_1 = 2 \\ 4 + x + 2x^2 - 40 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 2 \\ 2x^2 + x - 36 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = 2 \\ x_{1.2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 288}}{4} = \dfrac{-1 \pm 17}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2 = 2 \\ x_2 = -4,5 \end{cases}$ или

$\begin{cases} y_3 = -12 \\ 144 + x + 2x^2 - 40 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 + x + 104 = 0 \text{ (1)} \\ y_3 = -12 \end{cases}$

$D<0$; уравнение 1 не имеет корней. **Ответ:** (4; 2); (–4,5; 2).

3.30(2) $\left\{\begin{array}{l|l} x^2 - y + 2y^2 = 29 & \\ y^2 - 0,5y + x = 15 & -2 \end{array}\right.$ $\begin{cases} x^2 - y + 2y^2 = 29 \\ -2y^2 + y - 2x = -30 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 - y + 2y^2 = 29 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ x^2 - y + 2y^2 - 29 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ 2y^2 - y - 28 = 0 \end{cases}$

$x=1;\ y_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+224}}{4}=\dfrac{1\pm 15}{4};\ \begin{cases} x_1=1\\ y_1=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2=1\\ y_2=-3,5 \end{cases}$.

Ответ: (1; 4); (1; –3,5).

3.31(1) $(x+2y)^2+(x-y-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+2y=0\\ x-y-1=0 \end{cases} \begin{cases} x=-2y\\ -3y-1=0 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

3.31(2) $(y-2x)^2+(x+y-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=0\\ x+y-2=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=2x\\ 3x-2=0 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$.

3.32(1) $(x-y^2)^2+(x^2-x)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-y^2=0\\ x^2-x=0 \end{cases} \begin{cases} y^2=x\\ \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0\\ y=0 \end{cases}\\ \begin{cases} x=1\\ y=1 \end{cases}\\ \begin{cases} x=1\\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (0; 0); (1; 1); (1; –1).

3.32(2) $(4y-y^2)^2+(x^2-y)^2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4y-y^2=0\\ x^2-y=0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=4 \end{array}\right.\\ x^2=y \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0\\ x=0 \end{cases}\\ \begin{cases} y=4\\ x=2 \end{cases}\\ \begin{cases} y=4\\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (0; 0); (2; 4); (–2; 4).

3.33(1) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x+y=b; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x=b-y; \end{cases}$

$(b-y)^2+y^2-9=0;$

$b^2-2by+y^2+y^2-9=0;$

$2y^2-2by+b^2-9=0$ (I).

Уравнение (I) имеет единственное решение, если $D=4b^2-8(b^2-9)=0$.

$b^2-2(b^2-9)=0;\ b^2-2b^2+18=0;\ b^2=18;\ b=\pm3\sqrt{2}$.

Ответ: при $b=\pm3\sqrt{2}$.

3.33(2) $\begin{cases} y=p-x, \\ 4y=x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 4(p-x)=x^2, \\ y=p-x; \end{cases}$ $x^2+4x-4p=0$ (I).

Уравнение (I) не имеет решений, если $D=4^2-4(-4p)<0$;

$16+16p<0;\ 1+p<0;\ p<-1$.

Ответ: при $p<-1$.

3.34(1) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ 2x+y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ y=1-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+(1-2x)^2=a^2, \\ y=1-2x; \end{cases}$

1) $x^2+1-4x+4x^2-a^2=0,\ 5x^2-4x+1-a^2=0$ (I).

Уравнение (I) имеет 2 решения, если

$16-20(1-a^2)>0;\ 4-5(1-a^2)>0,$

$4-5+5a^2>0,\ 5a^2-1>0,\ a^2-\frac{1}{5}>0,\ \left(a-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(a+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)>0;\ a<0.$

Ответ: $a<-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3.34(2) $\begin{cases} 2x-y=2, \\ x^2+y^2=a^2; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x-2, \\ x^2+(2x-2)^2=a^2; \end{cases}$

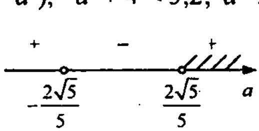
1) $x^2+(2x-2)^2-a^2=0,\ x^2+4x^2-8x+4-a^2=0,$

$5x^2-8x+4-a^2=0$ (I)

Уравнение (I) имеет 2 решения, если $64-20(4-a^2)>0$

$16-5(4-a^2)>0;\ 16>5(4-a^2),\ -a^2+4<3{,}2;\ a^2>\frac{4}{5},$

$\left(a-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(a+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)>0$



$a>\frac{2\sqrt{5}}{5}$

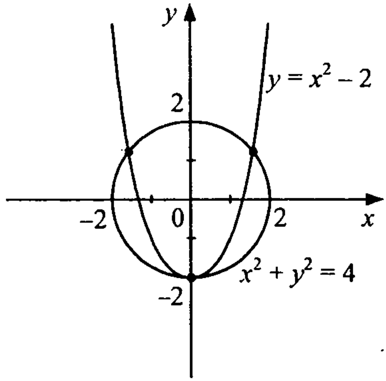
Ответ: $a>\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.35(1)

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Система имеет 3 решения только в случае, изображенном на рисунке, т.е. при $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

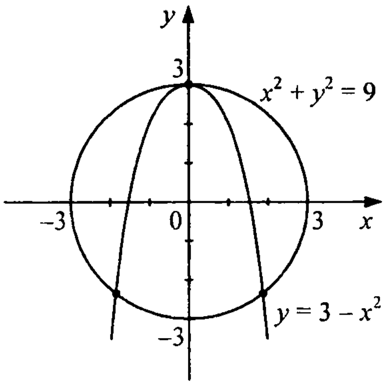


3.35(2)

$$\begin{cases} y = -x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Система имеет 3 решения только в случае, изображенном на рисунке, т.е. при $a = 3$.

Ответ: $a = 3$.

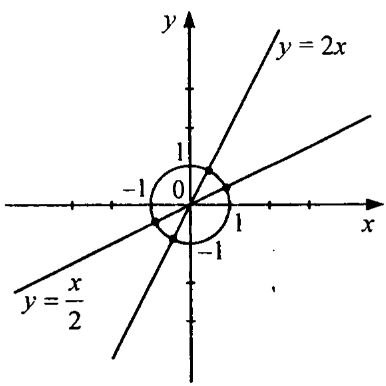


3.36(1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - 2y)(2x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

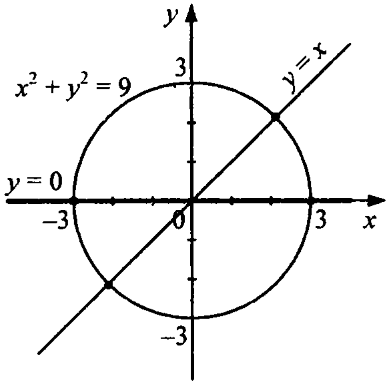
Ответ: 4 решения.



3.36(2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 - xy = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x \end{cases} \end{array}\right.$$

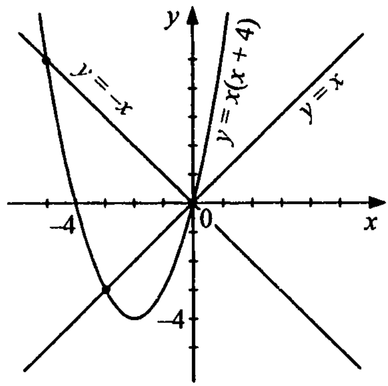


Ответ: 4 решения.

3.37(1)

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ y = x(x+4) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x \\ y = x^2 + 4x \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x \\ y = x^2 + 4x \end{cases} \end{array}\right.$$

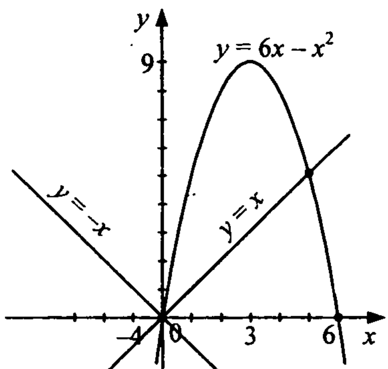


Ответ: 3 решения.

3.37(2)

$$\begin{cases} y = x(6-x) \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: 2 решения.

4. Неравенства

2 балла

4.1(1) $\frac{2x-7}{6}+\frac{7x-2}{3}\le 3-\frac{1-x}{2}$;

$2x-7+2(7x-2)\le 18-3(1-x)$; $2x-7+14x-4\le 18-3+3x$;

$16x-11\le 15+3x$; $13x\le 26$; $x\le 2$. **Ответ:** $x\le 2$.

4.1(2)

$\frac{4x+13}{10}-\frac{5+2x}{4}\ge\frac{6-7x}{20}-1$ $2(4x+13)-5(5+2x)\ge 6-7x-20$;

$8x+26-25-10x\ge -14-7x$; $-2x+1\ge -14-7x$; $5x\ge -15$; $x\ge -3$.

Ответ: $x\ge -3$.

4.2(1) $\frac{16-3a}{3}-\frac{3a+7}{4}<0$; $4(16-3a)-3(3a+7)<0$;

$64-12a-9a-21<0$; $-21a<-43$, $a>\frac{43}{21}$; $a>2\frac{1}{21}$. **Ответ:** 3.

4.2(2) $\frac{11-2x}{5}+\frac{3-2x}{2}>0$; $2(11-2x)+5(3-2x)>0$;

$22-4x+15-10x>0$; $-14x>-37$; $x<\frac{37}{14}$; $x<2\frac{9}{14}$. **Ответ:** $x=2$.

4.3(1) $a+\frac{8-11a}{12}>\frac{7+a}{4}-\frac{5-a}{3}$; $12a+8-11a>21+3a-20+4a$;

$a+8>7a+1$; $a-7a>1-8$; $-6a>-7$; $a<\frac{7}{6}$; $a<1\frac{1}{6}$. **Ответ:** $a=1$.

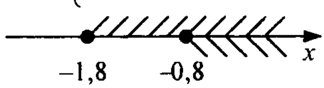
4.3(2) $\frac{13x-1}{15}-\frac{2x-1}{5}<x-\frac{x-2}{3}$; $13x-1-3(2x-1)<15x-5x+10$;

$13x-1-6x+3<10x+10$; $7x+2<10x+10$; $-3x<8$; $x>-\frac{8}{3}$; $x>-2\frac{2}{3}$.

Ответ: $x=-1$; $x=-2$.

4.4(1) $\begin{cases}2(x-3)-4(3x+7)\le 2+10x\\3x-10(x+2)\le 3(x-4)\end{cases}$ $\begin{cases}2x-6-12x-28\le 2+10x\\3x-10x-20\le 3x-12\end{cases}$

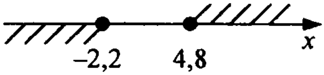
$\begin{cases}-20x\le 36\\-10x\le 8\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -1{,}8\\x\ge -0{,}8\end{cases}$



Ответ: $x\ge -0{,}8$.

4.4(2) $\begin{cases} 3(2x-5)-3(4x+3) \ge 2(2x-1) \\ 2(13-5x) \ge 5(3x+8)-10(3x-1) \end{cases}$

$\begin{cases} 6x-15-12x-9 \ge 4x-2 \\ 26-10x \ge 15x+40-30x+10 \end{cases}$ $\begin{cases} -10x \ge 22 \\ 5x \ge 24 \end{cases}$ $\begin{cases} x \le -2,2 \\ x \ge 4,8 \end{cases}$

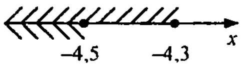


Ответ: $\varnothing$.

4.5(1) $\begin{cases} \dfrac{3}{5}-\dfrac{2-4x}{3} \le \dfrac{2x-3}{2}, \\ \dfrac{2x-27}{2} \ge 4x; \end{cases}$ $\begin{cases} 18-10(2-4x) \le 15(2x-3), \\ 2x-27 \ge 8x; \end{cases}$

$\begin{cases} 18-20+40x \le 30x-45, \\ 2x-8x \ge 27; \end{cases}$ $\begin{cases} 10x \le -45-18+20, \\ -6x \ge 27; \end{cases}$ $\begin{cases} 10x \le -43, \\ -2x \ge 9; \end{cases}$

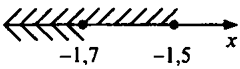
$\begin{cases} x \le -4,3, \\ x \le -4,5. \end{cases}$



Ответ: $x \le -4,5$.

4.5(2) $\begin{cases} \dfrac{1+2x}{4} \le \dfrac{5+4x}{10}-\dfrac{2}{5}, \\ 2x \ge \dfrac{14x+17}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 5(1+2x) \le 2(5+4x)-8, \\ 4x \ge 14x+17; \end{cases}$

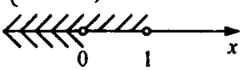
$\begin{cases} 5+10x \le 10+8x-8, \\ 4x-14x \ge 17; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x \le -3, \\ -10x \ge 17; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le -1,5, \\ x \le -1,7. \end{cases}$



Ответ: $x \le -1,7$.

4.6(1) $\begin{cases} 1-\dfrac{1-x}{2} < 4-\dfrac{5+4x}{3}, \\ 2-\dfrac{x+8}{4} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 6-3(1-x) < 24-2(5+4x), \\ 8-x-8 > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 6-3+3x < 24-10-8x, \\ -x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 11x < 14-3, \\ x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x < 0. \end{cases}$



Ответ: $x<0$.

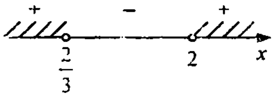
4.6(2) $\begin{cases} 2-\dfrac{3+2x}{3} > 1-\dfrac{x+6}{2}, \\ 3+\dfrac{x}{4} < x; \end{cases}$ $\begin{cases} 12-2(3+2x) > 6-3(x+6), \\ 12+x < 4x; \end{cases}$

$$\begin{cases} 12-6-4x>6-3x-18, \\ x-4x<-12; \end{cases} \quad \begin{cases} -x>-18, \\ -3x<-12; \end{cases} \quad \begin{cases} x<18, \\ x>4. \end{cases}$$

$4<x<18$ **Ответ:** $4<x<18$.

4.7(1) $(5-3x)(x-1)<-1$; $5x-3x^2-5+3x+1<0$; $-3x^2+8x-4<0$;

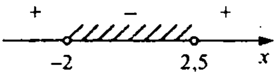
$3x^2-8x+4>0$; $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\dfrac{4\pm 2}{3}$; $x_1=2$; $x_2=\dfrac{2}{3}$.



Ответ: $x<\dfrac{2}{3}$; $x>2$.

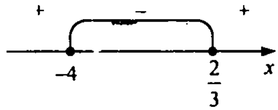
4.7(2) $(1-x)(2x+1)>-9$; $2x+1-2x^2-x+9>0$; $-2x^2+x+10>0$;

$2x^2-x-10<0$; $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+80}}{4}=\dfrac{1\pm 9}{4}$; $x_1=2{,}5$; $x_2=-2$.

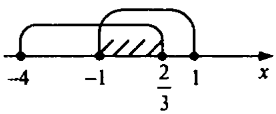


Ответ: $-2<x<2{,}5$.

4.8(1) $\dfrac{3x^2}{4}\le\dfrac{4-5x}{2}$; $3x^2+10x-8\le 0$;



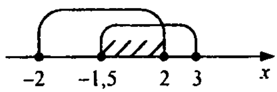
$x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{3}=\dfrac{-5\pm 7}{3}$; $x_1=-4$; $x_2=\dfrac{2}{3}$.



Ответ: $-1\le x\le\dfrac{2}{3}$.

4.8(2) $\dfrac{2x^2}{9}\le\dfrac{x+3}{3}$; $2x^2\le 3x+9$, $2x^2-3x-9\le 0$,

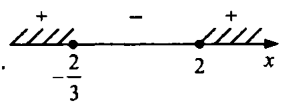
$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\dfrac{3\pm 9}{4}$; $x_1=3$; $x_2=-1{,}5$.



Ответ: $-1{,}5\le x\le 2$.

4.9(1) $\dfrac{x^2}{2}\ge\dfrac{2x+2}{3}$; $3x^2\ge 4x+4$; $3x^2-4x-4\ge 0$;

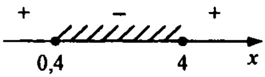
$x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\dfrac{2\pm 4}{3}$; $x_1=2$; $x_2=-\dfrac{2}{3}$.



Ответ: $x\le-\dfrac{2}{3}$; $x\ge 2$.

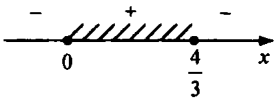
4.9(2) $\dfrac{11x-4}{5} \ge \dfrac{x^2}{2}$; $22x-8 \ge 5x^2$; $5x^2-22x+8 \le 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-40}}{5} = \dfrac{11 \pm 9}{5}$; $x_1 = 4$; $x_2 = 0{,}4$.



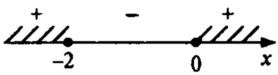
Ответ: $0{,}4 \le x \le 4$.

4.10(1) $x - \dfrac{3}{4}x^2 \ge 0$; $x\left(1-\dfrac{3}{4}x\right) \ge 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{4}{3}$.



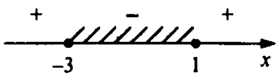
Ответ: $0 \le x \le \dfrac{4}{3}$.

4.10(2) $\dfrac{1}{2}x^2 + x \ge 0$; $x\left(\dfrac{1}{2}x+1\right) \ge 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.



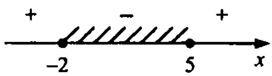
Ответ: $x \le -2$; $x \ge 0$.

4.11(1) $3-2x-x^2 \ge 0$; $x^2+2x-3 \le 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = 1$.



Ответ: $-3 \le x \le 1$.

4.11(2) $10+3x-x^2 \ge 0$; $x^2-3x-10 \le 0$; $x_1=5$; $x_2 = -2$.



Ответ: $-2 \le x \le 5$.

4 балла

4.12(1) $\sqrt{101}+\sqrt{102} > 0$; $\sqrt{99}+\sqrt{104} > 0$

$\left(\sqrt{101}+\sqrt{102}\right)^2 = 101+102+2\sqrt{101\cdot102} = 203+2\sqrt{101\cdot102}$

$\left(\sqrt{99}+\sqrt{104}\right)^2 = 99+104+2\sqrt{99\cdot104} = 203+2\sqrt{99\cdot104} =$

$= 203+2\sqrt{(101-2)(102+2)}$; далее $(101-2)(102+2) = 101\cdot102 - 204 + 202 - 4 = 101\cdot102 - 6$, значит $\sqrt{101\cdot102} > \sqrt{101\cdot102-6}$, т.е. $\sqrt{101\cdot102} > \sqrt{99\cdot104}$; $(\sqrt{101}+\sqrt{102})^2 > (\sqrt{99}+\sqrt{104})^2$; $\sqrt{101}+\sqrt{102} > \sqrt{99}+\sqrt{104}$ (см. условие).

Ответ: $\sqrt{101}+\sqrt{102} > \sqrt{99}+\sqrt{104}$

4.12(2) $\sqrt{99}+\sqrt{108}>0$; $\sqrt{103}+\sqrt{104}>0$

$\left(\sqrt{99}+\sqrt{108}\right)^2=99+108+2\sqrt{99\cdot108}=207+2\sqrt{99\cdot108}$

$\left(\sqrt{103}+\sqrt{104}\right)^2=103+104+2\sqrt{103\cdot104}=207+2\sqrt{(99+4)(108-4)}$;

$\sqrt{(99+4)(108-4)}=\sqrt{99\cdot108+20}$; далее $\sqrt{99\cdot108}<\sqrt{99\cdot108+20}$,

т.е. $\sqrt{99\cdot108}<\sqrt{103\cdot104}$ и $(\sqrt{99}+\sqrt{108})^2<(\sqrt{103}+\sqrt{104})^2$

отсюда $\sqrt{99}+\sqrt{108}<\sqrt{103}+\sqrt{104}$ (см. условие).

Ответ: $\sqrt{99}+\sqrt{108}<\sqrt{103}+\sqrt{104}$.

4.13(1) $4+2\sqrt{2}>0$, $\sqrt{11}+\sqrt{13}>0$

$\left(4+2\sqrt{2}\right)^2=24+16\sqrt{2}=24+\sqrt{512}$

$\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}\right)^2=24+2\sqrt{143}=24+\sqrt{572}$

$\sqrt{512}<\sqrt{572}$

Ответ: $4+2\sqrt{2}<\sqrt{11}+\sqrt{13}$.

4.13(2) $3+2\sqrt{5}>0$; $\sqrt{14}+\sqrt{15}>0$

$\left(3+2\sqrt{5}\right)^2=29+12\sqrt{5}=29+\sqrt{720}$

$\left(\sqrt{14}+\sqrt{15}\right)^2=29+2\sqrt{210}=29+\sqrt{840}$

$\sqrt{720}<\sqrt{840}$ **Ответ:** $3+2\sqrt{5}<\sqrt{14}+\sqrt{15}$.

4.14(1) Сравните числа $\sqrt{37}+\sqrt{35}$ и 12.

1) $\sqrt{37}+\sqrt{35}>0$; $\left(\sqrt{37}+\sqrt{35}\right)^2=72+2\sqrt{37\cdot35}=72+2\sqrt{1295}$;

$12^2=144=72+72=72+2\cdot36$.

2) Надо сравнить $\sqrt{1295}$ и 36; $36=\sqrt{1296}$; $\sqrt{1295}<\sqrt{1296}$.

Следовательно, $12>\sqrt{37}+\sqrt{35}$.

Ответ: $\sqrt{37}+\sqrt{35}<12$.

4.14(2) Сравните числа $\sqrt{15}+\sqrt{17}$ и 8.

1) $\sqrt{15}+\sqrt{17}>0$; $\left(\sqrt{15}+\sqrt{17}\right)^2=32+2\sqrt{15\cdot17}=32+2\sqrt{255}$

2) $8^2=64=32+2\cdot16=32+2\sqrt{256}$

$8^2>32+2\sqrt{255}$. Следовательно, $\sqrt{15}+\sqrt{17}<8$.

Ответ: $\sqrt{15}+\sqrt{17}<8$.

4.15(1) $\sqrt{5}-2,5<0$, т.к. $\sqrt{5}\approx 2,2$, поэтому

$\left(\sqrt{5}-2,5\right)(3-2x)<0 \Leftrightarrow 3-2x>0$

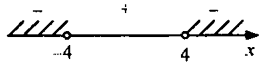
$2x<3$; $x<1,5$ **Ответ:** $x<1,5$.

4.15(2) $\left(2,5-\sqrt{6}\right)(10-4x)>0 \Leftrightarrow 10-4x>0$

(т.к. $\sqrt{6}\approx 2,4$, т.е. $2,5-\sqrt{6}>0$)

$4x<10$; $x<2,5$ **Ответ:** $x<2,5$.

4.16(1) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)\left(16-x^2\right)>0$ (I)

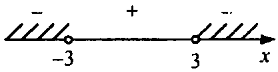


1) $\sqrt{3}\approx 1,7$; $1,5-\sqrt{3}<0$

2) Неравенство (I) равносильно неравенству $16-x^2<0$;

$(4-x)(4+x)<0$. **Ответ:** $x<-4$; $x>4$.

4.16(2) $\left(\sqrt{6}-2,5\right)\left(9-x^2\right)>0$ (I)



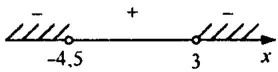
1) $2,5^2=6,25$; $\sqrt{6}<2,5$;

$\sqrt{6}-2,5<0$.

2) Неравенство (I) равносильно неравенству $9-x^2<0$;

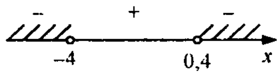
$(3-x)(3+x)<0$ **Ответ:** $x<-3$; $x>3$.

4.17(1) $\dfrac{-6}{(3-x)(9+2x)}>0$ (I)



Неравенство (I) равносильно неравенству $(3-x)(9+2x)<0$. **Ответ:** $x<-4,5$; $x>3$.

4.17(2) $\dfrac{15}{(4+x)(2-5x)}<0$ (I)



Неравенство (I) равносильно неравенству $(4+x)(2-5x)<0$ **Ответ:** $x<-4$; $x>0,4$.

4.18(1) $x^2-x+1>0$ при любом значении x, т.к. $D<0$:

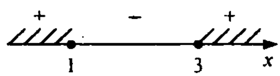
$(-1)^2-4\cdot 1=1-4<0$. $\dfrac{5}{x^2-x+1}>0$ при любых значениях x.

4.18(2) 1) $x^2-x+2>0$ при любых значениях x, т.к. $D<0$:

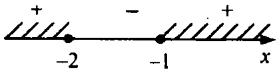
$(-1)^2-4\cdot 2=1-8<0$. $\dfrac{8}{x^2-x+2}>0$ при любых значениях x.

4.19(1) $4x-x^2\le 3$; $-x^2+4x-3\le 0$;

$x^2-4x+3\ge 0$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=3$; $x_2=1$;



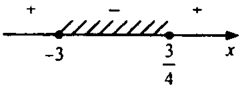
Ответ: $0<x\le 1$; $x\ge 3$.



4.19(2) 1) $x^2+3x\ge -2$;

$x^2+3x+2\ge 0$; $x^2+3x+2=0$; $x_1=-2$; $x_2=-1$

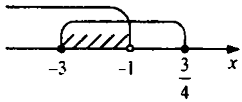
Ответ: $x\le -2;\ -1\le x<0$.



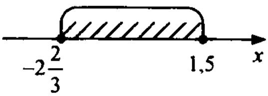
4.20(1) $\begin{cases}4x^2+9x-9\le 0\\ \dfrac{x+1}{2}<0\end{cases}$

1) $4x^2+9x-9=0$; $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{81+144}}{8}=\dfrac{-9\pm 15}{8}$; $x_1=-3$; $x_2=\dfrac{3}{4}$.

2) $\dfrac{x+1}{2}<0$; $x<-1$; $\begin{cases}-3\le x\le \dfrac{3}{4}\\ x<-1\end{cases}$ (I)



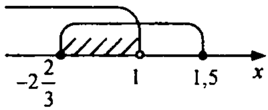
Ответ: –3; –2.



4.20(2) $\begin{cases}6x^2+7x-24\le 0\\ \dfrac{1-x}{2}>0\end{cases}$

1) $6x^2+7x-24=0$ $x_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49+576}}{12}=\dfrac{-7\pm 25}{12}$;

$x_1=\dfrac{3}{2}$; $x_2=-\dfrac{32}{12}=-2\dfrac{2}{3}$.



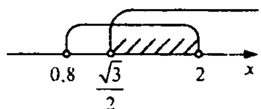
3) $1-x>0$; $x<1$

Ответ: –2; –1; 0.

4.21(1) $\begin{cases}5x^2-14x+8<0\\ 2x-\sqrt{3}>0\end{cases}$

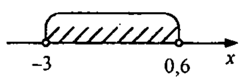
1) $x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{5}=\dfrac{7\pm 3}{5}$; $x_1=2$; $x_2=\dfrac{4}{5}$

2) $x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}\approx 1,7$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,85$



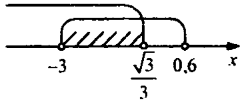
Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<x<2$.

4.21(2) $\begin{cases}5x^2+12x-9<0\\ 3x-\sqrt{3}<0\end{cases}$



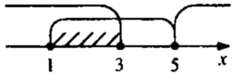
1) $5x^2+12x-9<0$; $x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+45}}{5}=\frac{-6\pm 9}{5}$, $x_1=-3$; $x_2=0{,}6$.

2) $x<\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}<0{,}6$.



Ответ: $-3<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4.22(1) $\begin{cases} x^2-6x+5\le 0 \\ x^2-8x+15\ge 0 \end{cases}$

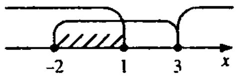


1) $x^2-6x+5\le 0$; $x^2-6x+5=0$; $x_1=5$; $x_2=1$; $1\le x\le 5$.

2) $x^2-8x+15\ge 0$; $x^2-8x+15=0$; $x_1=3$; $x_2=5$; $x\le 3$; $x\ge 5$.

Ответ: 1; 2; 3; 5.

4.22(2) $\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0 \\ x^2-x-6\le 0 \end{cases}$



1) $x^2-4x+3\ge 0$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=3$; $x_2=1$; $x\le 1$; $x\ge 3$.

2) $x^2-x-6\le 0$; $x^2-x-6=0$; $x_1=3$; $x_2=-2$; $-2\le x\le 3$.

Ответ: –2; –1; 0; 1; 3.

4.23(1) Данное выражение имеет смысл при условии

$$\begin{cases} 2a^2+11a+12\ge 0 \\ 10-3a-a^2\ge 0 \end{cases}$$

1) $2a^2+11a+12=0$; $a_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{4}=\frac{-1\pm 5}{4}$;

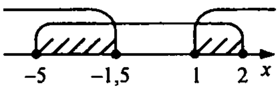
$a_1=-1{,}5$; $a_2=1$;

2) $a^2+3a-10=0$; $a_1=-5$; $a_2=2$;

3) $2a^2+11a+12\ge 0$ при $a\le -1{,}5$; $a\ge 1$

4) $10-3a-a^2\ge 0$, $a^2-3a-10\le 0$ при $-5\le a\le 2$.

5) $\begin{cases} a\le -1{,}5; \quad a\ge 1 \\ -5\le a\le 2 \end{cases}$

6) 

Ответ: $a=-5$.

4.23(2) Данное выражение имеет смысл при условии

$$\begin{cases} 24+5a-a^2\ge 0 \\ 2a^2-19a+35\ge 0 \end{cases}$$

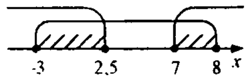
1) $a^2-5a-24=0$; $a_1=8$; $a_2=-3$.

2) $2a^2-19a+35=0$; $a=\dfrac{19\pm\sqrt{361-280}}{4}=\dfrac{19\pm 9}{4}$; $a_1=7$; $a_2=2{,}5$.

3) $a^2-5a-24\le 0$ при $-3\le a\le 8$;

4) $2a^2-19a+35\ge 0$ при $a\le 2{,}5;\ a\ge 7$.

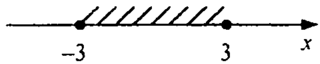
5) $\begin{cases}-3\le a\le 8\\ a\le 2{,}5; \quad a\ge 7\end{cases}$



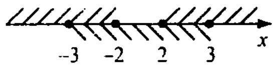
Ответ: $a=8$.

4.24(1) Данное выражение имеет смысл при: $\begin{cases}1-\dfrac{1}{9}x^2\ge 0\\ x^2-4\ge 0\end{cases}$

1) $9-x^2\ge 0;\ x^2\le 9;\ -3\le x\le 3$



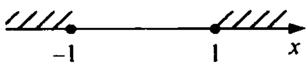
2) $x^2-4\ge 0$; $x^2\ge 4;\ x\le -2;\ x\ge 2$.



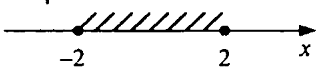
Ответ: $-3\le x\le -2;\ 2\le x\le 3$.

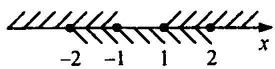
4.24(2) Данное выражение имеет смысл при: $\begin{cases}x^2-1\ge 0\\ 1-\dfrac{1}{4}x^2\ge 0\end{cases}$

1) $x^2\ge 1;\ x\le -1;\ x\ge 1$



2) $\dfrac{1}{4}x^2\le 1;\ x^2\le 4;\ -2\le x\le 2$.





Ответ: $-2\le x\le -1;\ 1\le x\le 2$.

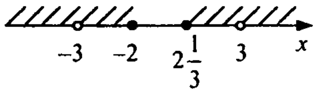
4.25(1) Данное выражение $\dfrac{\sqrt{3x^2-x-14}}{x^2-9}$ имеет смысл

при $\begin{cases}3x^2-x-14\ge 0\\ x^2-9\ne 0\end{cases}$

1) $3x^2-x-14=0$; $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+168}}{6}=\dfrac{1\pm 13}{6}$; $x_1=-2$; $x_2=\dfrac{7}{3}$.

$3x^2-x-14\ge 0$ при $x\le -2;\ x\ge\dfrac{7}{3}$

2) $x^2 \neq 9$; $x \neq \pm 3$



Ответ: $x \leq -2$ и $x \neq -3$; $x \geq 2\frac{1}{3}$ и $x \neq 3$.

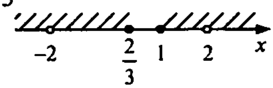
4.25(2) Данное выражение $\dfrac{\sqrt{3x^2-5x+2}}{x^2-4}$ имеет смысл

при $\begin{cases} 3x^2-5x+2 \geq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases}$

1) $3x^2-5x+2=0$, $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \dfrac{5 \pm 1}{6}$;

$x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$; $3x^2-5x+2 \geq 0$ при $x \leq \dfrac{2}{3}$; $x \geq 1$

2) $x^2-4 \neq 0$; $x \neq \pm 2$



Ответ: $x \leq \dfrac{2}{3}$ и $x \neq -2$; $x \geq 1$ и $x \neq 2$.

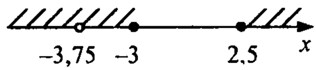
4.26(1) Данное выражение $\dfrac{\sqrt{2x^2+x-15}}{4x+15}$ имеет смысл

ри $\begin{cases} 2x^2+x-15 \geq 0 \\ 4x+15 \neq 0 \end{cases}$

1) $2x^2+x-15=0$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \dfrac{-1 \pm 11}{4}$; $x_1 = -3$; $x_2 = \dfrac{5}{2}$

$2x^2+x-15 \geq 0$ при $x \leq -3$, $x \geq \dfrac{5}{2}$

2) $x \neq -\dfrac{15}{4}$; $x \neq -3\dfrac{3}{4}$ 3)



Ответ: $x < -3{,}75$; $-3{,}75 < x \leq -3$; $x \geq 2{,}5$.

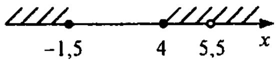
4.26(2) Данное выражение $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x-12}}{11-2x}$ имеет смысл при

$\begin{cases} 2x^2-5x-12 \geq 0 \\ 11-2x \neq 0 \end{cases}$

1) $2x^2-5x-12=0$; $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \dfrac{5 \pm 11}{4}$;

$x_1 = 4$; $x_2 = -1,5$; $2x^2 - 5x - 12 \geq 0$ при $x \leq -1,5$; $x \geq 4$.

2) $11 - 2x \neq 0$; $x \neq 5,5$



Ответ: $x \leq -1,5$; $4 \leq x < 5,5$; $x > 5,5$.

4.27(1) Данное выражение $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2-x-2}$ имеет смысл

при $\begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2-x-2 \neq 0 \end{cases}$

1) $x^2+x+1>0$ при любом значении x, т.к. $D<0$: $(-1)^2 - 4 \cdot 1 < 0$.

2) $x^2 - x - 2 \neq 0$; $x \neq 2$; $x \neq -1$ (корни найдены по теореме, обратной теореме Виета).

Ответ: $x \neq -1$; $x \neq 2$.

4.27(2) Данное выражение $\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x^2+x-2}$ имеет смысл

ри $\begin{cases} x^2+x+2 \geq 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases}$

1) $x^2+x+2>0$ при любом значении x, т.к. $D<0$: $(-1)^2 - 4 \cdot 2 < 0$.

2) $x^2 + x - 2 \neq 0$; $x \neq -2$; $x \neq 1$

(корни найдены по теореме, обратной теореме Виета).

Ответ: $x \neq -2$; $x \neq 1$.

6 баллов

4.28(1) Запишем сравниваемые числа в виде:

$$\sqrt{7} - \sqrt{5} = \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{13} - \sqrt{11} = \frac{\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}.$$

Далее: $\sqrt{7} < \sqrt{13}$; $\sqrt{5} < \sqrt{11}$; $\sqrt{7}+\sqrt{5} < \sqrt{13}+\sqrt{11}$

и $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} > \dfrac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}$.

Окончательно получим $\sqrt{7}-\sqrt{5} > \sqrt{13}-\sqrt{11}$.

Ответ: $\sqrt{7}-\sqrt{5} > \sqrt{13}-\sqrt{11}$

4.28(2) Запишем эти числа в виде:

$$\sqrt{14}-\sqrt{11}=\frac{\left(\sqrt{14}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{14}+\sqrt{11}\right)}{\sqrt{14}+\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{14}+\sqrt{11}},$$

$$\sqrt{10}-\sqrt{7}=\frac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}.$$

Далее: $\sqrt{10}<\sqrt{14}$, $\sqrt{7}<\sqrt{11}$; $\sqrt{10}+\sqrt{7}<\sqrt{14}+\sqrt{11}$ и

$$\frac{3}{\sqrt{14}+\sqrt{11}}<\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}.$$

Окончательно получим: $\sqrt{14}-\sqrt{11}<\sqrt{10}+\sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{14}-\sqrt{11}<\sqrt{10}+\sqrt{7}$.

4.29(1) Домножим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{2}+2$. Получим: $\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)x>(\sqrt{2}+2)^2$;

$(2-4)x>6+4\sqrt{2}$; $-2x>6+4\sqrt{2}$; $-x>3+2\sqrt{2}$. $x<-3-2\sqrt{2}$;

x — наибольшее целое $-3-2\sqrt{2}$. Оценим число $-3-2\sqrt{2}$: $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$; $-2{,}84<-2\sqrt{2}<-2{,}82$; $-5{,}84<-3-2\sqrt{2}<-5{,}82$. Наибольшее целое число $-3-2\sqrt{2}$ есть -6.

Ответ: Наибольшее целое решение неравенства $x=-6$.

4.29(2) $\left(2-\sqrt{5}\right)x<2+\sqrt{5}$. Домножим обе части неравенства на положительное число $2+\sqrt{5}$.

Получим: $(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})x<(2+\sqrt{5})^2$.

$-x<4+5+4\sqrt{5}$; $x>-9-4\sqrt{5}$. Далее: $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$;

$-9{,}2<-4\sqrt{5}<-8{,}8$; $-18{,}2<-9-4\sqrt{5}<-17{,}8$. Поскольку надо найти наименьшее целое $x>-9-4\sqrt{5}$, то это будет число -17.

Ответ: $x=-17$.

4.30(1) $\left(\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1\right)(4x-13)<0$ (I)

1) Сравним $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}$ с 1; $\sqrt{15}+\sqrt{17}>0$

$$\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}\right)^2=\frac{32+2\sqrt{15\cdot17}}{64}=\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\sqrt{15\cdot17};$$

$\sqrt{15\cdot 17}=\sqrt{255}<\sqrt{256}$; $\sqrt{256}=16$; $\frac{\sqrt{15\cdot 17}}{32}<\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}<1$, т.е. $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1<0$.

2) Неравенство (I) равносильно неравенству $4x-13>0$.

$x>\frac{13}{4}$; $x>3\frac{1}{4}$. **Ответ:** $x>3\frac{1}{4}$.

4.30(2) $(\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6}-2)(10+3x)<0$ (I)

1) Сравним $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6}$ с 2; $\sqrt{35}+\sqrt{37}>0$;

$(\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6})^2=\frac{72+2\sqrt{35\cdot 37}}{36}=2+\frac{1}{18}\sqrt{35\cdot 37}$;

$\sqrt{35\cdot 37}=\sqrt{1295}$; $\sqrt{1295}<\sqrt{1296}$; $\sqrt{1296}=36$;

$\frac{1}{18}\sqrt{35\cdot 37}<2$; $2+\frac{1}{18}\sqrt{35\cdot 37}<4$, т.е. $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{37}}{6}-2<0$

2) Неравенство (I) равносильно неравенству $10+3x>0$

$x>-\frac{10}{3}$; $x>-3\frac{1}{3}$ **Ответ:** $x>-3\frac{1}{3}$.

4.31(1) $3\sqrt{11}(6-3x)>10(6-3x)$; $(6-3x)\left(3\sqrt{11}-10\right)>0$ (I)

Сравним $3\sqrt{11}$ и 10; $\left(3\sqrt{11}\right)^2$ и 10^2; $9\cdot 11<100$; $3\sqrt{11}<10$;

$3\sqrt{11}-10<0$. Неравенство (I) равносильно неравенству
$6-3x<0$; $-3x<-6$; $x>2$ **Ответ:** $x>2$.

4.31(2) $9(6+2x)<4\sqrt{5}(6+2x)$; $(6+2x)\left(9-4\sqrt{5}\right)<0$ (I)

Сравним 9 и $4\sqrt{5}$; 9^2 и $\left(4\sqrt{5}\right)^2$; $9^2>16\cdot 5$; $9-4\sqrt{5}>0$.

Неравенство (I) равносильно неравенству $6+2x<0$; $2x<-6$; $x<-3$.
Ответ: $x<-3$.

4.32(1) $(x+1-\sqrt{3})(x-\sqrt{6}+2)>0$.

Запишем неравенство в виде: $(x-(\sqrt{3}-1))(x-(\sqrt{6}-2))>0$.

Тогда $(\sqrt{3}-1)$ и $(\sqrt{6}-2)$ — корни квадратного трехчлена, ветви графика которого направлены вверх, следовательно, нужные нам значения x располагаются слева от меньшего корня и справа от большего. Выясним, что больше $\sqrt{3}-1$ или $\sqrt{6}-2$.

$\sqrt{3}-1>0$; $\sqrt{6}-2>0$,

$(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}=2(2-\sqrt{3})$, $(\sqrt{6}-2)^2=10-4\sqrt{6}=2(5-2\sqrt{6})$.

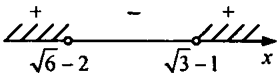
Сравним $2-\sqrt{3}$ и $5-2\sqrt{6}$;

1) $1,7<\sqrt{3}<1,8; -1,8<-\sqrt{3}<-1,7; 0,2<2-\sqrt{3}<0,3;$

2) $2,4<\sqrt{6}<2,5; 4,8<2\sqrt{6}<5; -5<-2\sqrt{6}<-4,8.$

$0<5-2\sqrt{6}<0,2$. Таким образом, $5-2\sqrt{6}<0,2<2-\sqrt{3}$.

Следовательно $5-2\sqrt{6}<2-\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}-2<\sqrt{3}-1$.



Ответ: $x<\sqrt{6}-2; x>\sqrt{3}-1$.

4.32(2) $(x-\sqrt{5}+2)(x+1-\sqrt{2})<0$

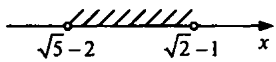
Запишем неравенство в виде: $(x-(\sqrt{5}-2))(x-(\sqrt{2}-1))<0$. Тогда $(\sqrt{5}-2)$ и $(\sqrt{2}-1)$ — корни квадратного трехчлена, ветви графика которого направлены вверх, следовательно нужные нам значения x расположены между его корнями.

Выясним, как расположены корни этого трехчлена. Сравним, что больше $\sqrt{5}-2$ или $\sqrt{2}-1$.

Имеем: $0,23<\sqrt{5}-2<0,24$; $0,41<\sqrt{2}-1<0,42$.

Следовательно $\sqrt{2}-1>\sqrt{5}-2$.

$\sqrt{5}-2<x<\sqrt{2}-1$



Ответ: $\sqrt{5}-2<x<\sqrt{2}-1$.

4.33(1) Данное выражение имеет смысл при

$\left(12-x\sqrt{3}\right)\left(x\sqrt{2}-10\right)\geq 0$; $12x\sqrt{2}-x^2\sqrt{6}-120+10x\sqrt{3}\geq 0$;

$-x^2\sqrt{6}+2x\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)-120\geq 0$; $x^2\sqrt{6}-2x\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)+120\leq 0$.

Найдем корни этого трехчлена:

$$x_{1,2}=\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\pm\sqrt{(6\sqrt{2}+5\sqrt{3})^2-120\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}$$

$$x_{1,2}=\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)^2-120\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2+60\sqrt{6}+\left(5\sqrt{3}\right)^2-120\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(6\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)^2}}{\sqrt{6}};$$

$$x_1=\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}+5\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=5\sqrt{2};\ 7{,}07<5\sqrt{2}<7{,}08$$

$$x_2=\frac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3};$$

$6,92<4\sqrt{3}<6,93$ и $x_1>x_2$. Данное выражение имеет смысл при $x_2\le x\le x_1$, т.е. при $4\sqrt{3}\le x\le 5\sqrt{2}$. Но $4\sqrt{3}<7$, а $5\sqrt{2}>7$.

Ответ: 7.

4.33(2) Данное выражение не имеет смысла при

$\left(18-x\sqrt{3}\right)\left(20-x\sqrt{5}\right)<0$, $360-20x\sqrt{3}-18x\sqrt{5}+x^2\sqrt{15}<0$,

$x^2\sqrt{15}-2x\left(10\sqrt{3}+9\sqrt{5}\right)+360<0$.

Найдем корни этого трехчлена

$$x_{1,2}=\frac{10\sqrt{3}+9\sqrt{5}\pm\sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2+\left(9\sqrt{5}\right)^2+180\sqrt{15}-360\sqrt{15}}}{\sqrt{15}}=$$

$$=\frac{10\sqrt{3}+9\sqrt{5}\pm\sqrt{\left(10\sqrt{3}-9\sqrt{5}\right)^2}}{\sqrt{15}}=\frac{10\sqrt{3}+9\sqrt{5}\pm(9\sqrt{5}-10\sqrt{3})}{\sqrt{15}}$$

$$x_1=\frac{10\sqrt{3}+9\sqrt{5}+9\sqrt{5}-10\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{18\sqrt{5}}{\sqrt{15}}=\frac{18}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3};$$

$10,3<6\sqrt{3}<10,4$;

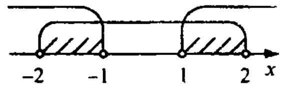
$$x_2=\frac{10\sqrt{3}+9\sqrt{5}-9\sqrt{5}+10\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5};$$

$8,9<4\sqrt{5}<9$; $x_1>x_2$

Трехчлен отрицателен, если $x_2<x<x_1$, т.е. $4\sqrt{5}<x<6\sqrt{3}$; но $4\sqrt{5}<9$, а $6\sqrt{3}>10$.

Ответ: 9; 10.

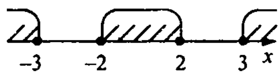
4.34(1) $x^4-5x^2+4<0$. Сделаем замену переменной $x^2=y$; $y>0$. Тогда $y^2-5y+4<0$. Найдем корни этого трехчлена: $y_1=4$; $y_2=1$. Неравенство $y^2-5y+4<0$ выполняется при $1<y<4$. Возвращаясь к переменной x, получим: $1<x^2<4$ или



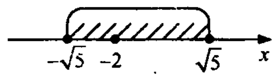
$\begin{cases} x^2<4, \\ x^2>1; \end{cases}$ откуда $\begin{cases} -2<x<2 \\ x<-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} -2<x<2 \\ x>1 \end{cases}$

Ответ: $-2<x<-1$; $1<x<2$.

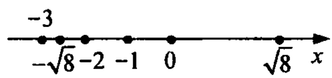
4.34(2) $x^4-13x^2+36\ge 0$. Сделаем замену переменной $x^2=y$, $y>0$ и найдем корни полученного трехчлена: $y^2-13y+36=0$; $y_1=9$; $y_2=4$. Неравенство $y^2-13y+36\ge 0$ выполняется при $y\le 4; y\ge 9$. Возвращаясь к переменной x, получим $x^2\le 4; x^2\ge 9$. Отсюда исходное неравенство выполняется при $-2\le x\le 2$ и $x\le -3; x\ge 3$. **Ответ:** $x\le -3; -2\le x\le 2; x\ge 3$.



4.35(1) $x^4+4x^2-45\le 0$. Сделаем замену переменной $x^2=y, y\ge 0$ и найдем корни полученного трехчлена: $y^2+4y-45=0$; $y_1=-9$; $y_2=5$. Трехчлен $y^2+4y-45\le 0$ при $-9\le y\le 5$, т.к. $y\ge 0$, то $0\le y\le 5$. Вернемся к x: $0\le x^2\le 5$, $-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$; $\sqrt{5}>2$; $-\sqrt{5}<-2$. **Ответ:** –2.



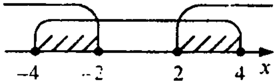
4.35(2) $x^4-2x^2-48\le 0$.



Сделаем замену переменной x, положим $x^2=y$; $y\ge 0$ и найдем корни квадратного трехчлена $y^2-2y-48\le 0$: $y_1=8$; $y_2=-6$. Тогда $-6\le y\le 8$. Возвращаясь к переменной x и учитывая, что $y\ge 0$, получим: $0\le x^2\le 8$, или $-\sqrt{8}\le x\le\sqrt{8}$. **Ответ:** $x=-2$.

4.36(1) $(x^2+1)^2-12(x^2+1)+20\ge 0$.

Сделаем замену переменной x; положим, $x^2+1=y$; $y>0$ и найдем корни трехчлена $y^2-12y+20\ge 0$: $y_1=10$; $y_2=2$. Трехчлен принимает положительные значения при $y\le 2; y\ge 10$. Возвращаясь к x, получим: $x^2+1\le 2$; $x^2+1\ge 10$ или $x^2\le 1$; $x^2\ge 9$, то есть $-1\le x\le 1$ и $x\le -3$; $x\ge 3$. **Ответ:** $x\le -3; -1\le x\le 1; x\ge 3$.



4.36(2) $(x^2-5)^2-10(x^2-5)-11\le 0$.

Пусть $x^2-5=y$; найдем корни уравнения $y^2-10y-11=0$: $y_1=11$; $y_2=-1$.

Неравенство $y^2-10y-11\le 0$ выполняется при $-1\le y\le 11$. Возвращаясь к переменной x, получим

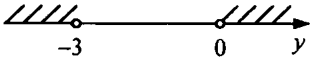
$$\begin{cases}x^2-5\le 11\\ x^2-5\ge -1\end{cases};\ \begin{cases}x^2\le 16\\ x^2\ge 4\end{cases};\ \begin{cases}-4\le x\le 4\\ x\le -2\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}-4\le x\le 4\\ x\ge 2\end{cases}$$

Ответ: $-4\le x\le -2$; $2\le x\le 4$.

4.37(1) $(x^2+2x)^2+3(x+1)^2>3$; $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x+1)-3>0$.

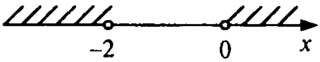
1) Положим $x^2+2x=y$, тогда неравенство примет вид:

$y^2+3(y+1)-3>0$; $y^2+3y>0$; $y(y+3)>0$.



$y<-3$; $y>0$

2) $x^2+2x<-3$; $x^2+2x+3<0$ (I)



Неравенство (I) не имеет решений, т.к. $x^2+2x+3>0$ при любых значениях x $(D<0)$.

3) $x^2+2x>0$; $x(x+2)>0$.

Ответ: $x<-2$; $x>0$.

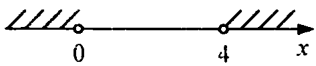
4.37(2) $(x^2-4x)^2+5(x-2)^2>20$;

$(x^2-4x)^2+5(x^2-4x+4)-20>0$.

Произведем замену переменной:

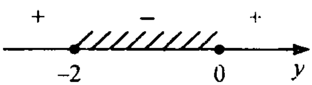
$x^2-4x=y$; тогда $y^2+5(y+4)-20>0$; $y^2+5y>0$; $y(y+5)>0$

$y<-5$; $y>0$. Вернемся к переменной x: $x^2-4x<-5$; $x^2-4x+5<0$ (I).



Неравенство (I) не имеет решений, т.к. $x^2-4x+5>0$ при любом значении x $(D<0)$. Далее: $x^2-4x>0$; $x(x-4)>0$. Решениями этого неравенства являются промежутки $x<0$ и $x>4$.

Ответ: $x<0$; $x>4$.



4.38(1) $(x^2+3x+12)(x^2+3x-10)<-120$

1) $x^2+3x=y$;

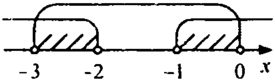
2) $(y+12)(y-10)+120<0$;

$y^2+2y-120+120<0$; $y^2+2y<0$; $y(y+2)<0$.

$-2<y<0$

3) $x^2+3x>-2$; $x^2+3x+2>0$; $x_1=-2$; $x_2=-1$; $x<-2$; $x>-1$.

4) $x^2+3x<0$; $x(x+3)<0$; $x_1=0$; $x_2=-3$; $-3<x<0$.

5) 

Ответ: $-3<x<-2$; $-1<x<0$.

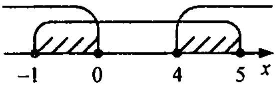
4.38(2) $(x^2-4x-15)(x^2-4x+10)\le -150$. Сделаем замену переменной x: $x^2-4x=y$. Тогда $(y-15)(y+10)+150\le 0$,
$y^2-5y-150+150\le 0$. $y^2-5y\le 0$; $y(y-5)\le 0$.

Решением последнего неравенства является интервал $0 \le y \le 5$.

Возвращаясь к переменной x, получим: $0\le x^2-4x\le 5$. Далее

$$\begin{cases} x^2-4x\le 5 \\ x^2-4x\ge 0 \end{cases};\ \begin{cases} x^2-4x-5\le 0 \\ x^2-4x\ge 0 \end{cases};\ \begin{cases} -1\le x\le 5 \\ x\le 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -1\le x\le 5 \\ x\ge 4 \end{cases}.$$

Отсюда $-1\le x\le 0$ и $4\le x\le 5$.



Ответ: $-1\le x\le 0; 4\le x\le 5$.

4.39(1) $x^2+(2a+4)x+8a+1>0$. Это неравенство выполяется при всех значениях x, если $(2a+4)^2-4(8a+1)<0$, $4a^2+16a+16-32a-4<0$, $4a^2-16a+12<0$, $a^2-4a+3<0$; $a_1=3$; $a_2=1$; $1<a<3$.

Ответ: $1<a<3$.

4.39(2) $x^2-(2p+2)x+3p+7\le 0$. Это неравенство выполяется при всех значениях x, если $(2p+2)^2-4(3p+7)<0$; $4p^2+8p+4-12p-28<0$; $4p^2-4p-24<0$; $p^2-p-6<0$; $p_1=3$; $p_2=-2$; $-2<p<3$.

Ответ: $-2<p<3$.

4.40(1) $\begin{cases} x<\sqrt{3}-\sqrt{7} \\ x<\sqrt{2}-\sqrt{6} \end{cases}$

1) Выясним, что больше $\sqrt{3}-\sqrt{7}$ или $\sqrt{2}-\sqrt{6}$:

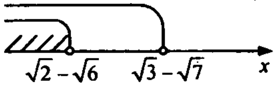
2) $\sqrt{3}-\sqrt{7}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{-4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

3) $\sqrt{2}-\sqrt{6}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\dfrac{-4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. Очевидно, что

$\sqrt{2}+\sqrt{6}<\sqrt{3}+\sqrt{7}$, поэтому $\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}>\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ и

$-\dfrac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}<\dfrac{-4}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$, т.е. $\sqrt{2}-\sqrt{6}<\sqrt{3}-\sqrt{7}$.

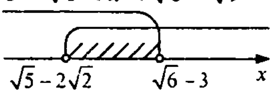
Решением системы будет $x<\sqrt{2}-\sqrt{6}$.



Ответ: $x<\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

4.40(2) $\begin{cases} x > \sqrt{5} - 2\sqrt{2} \\ x < \sqrt{6} - 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \sqrt{5} - \sqrt{8} \\ x < \sqrt{6} - \sqrt{9} \end{cases}$. 1) Выясним, что больше $\sqrt{5} - \sqrt{8}$ или $\sqrt{6} - \sqrt{9}$: $\sqrt{5} - \sqrt{8} = \dfrac{(\sqrt{5} - \sqrt{8})(\sqrt{5} + \sqrt{8})}{\sqrt{5} + \sqrt{8}} = \dfrac{-3}{\sqrt{5} + \sqrt{8}}$;

$\sqrt{6} - \sqrt{9} = \dfrac{(\sqrt{6} - \sqrt{9})(\sqrt{6} + \sqrt{9})}{\sqrt{6} + \sqrt{9}} = \dfrac{-3}{\sqrt{6} + \sqrt{9}}$. Очевидно, что $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{9}$, поэтому $\dfrac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{8}} > \dfrac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{9}}$ и $\dfrac{-3}{\sqrt{5} + \sqrt{8}} < \dfrac{-3}{\sqrt{6} + \sqrt{9}}$, следовательно, $\sqrt{5} - \sqrt{8} < \sqrt{6} - \sqrt{9}$ и $\sqrt{5} - \sqrt{8} < x < \sqrt{6} - \sqrt{9}$ — решение неравенства.



Ответ: $\sqrt{5} - 2\sqrt{2} < x < \sqrt{6} - 3$.

4.41(1) $\begin{cases} 5x + 2 \geq 17 + 2x \\ p + 2x \leq 3 + x \end{cases}$; $\begin{cases} 3x \geq 15 \\ x \leq 3 - p \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 3 - p \end{cases}$;

$3 - p \geq 5$; $-p \geq 2$; $p \leq -2$ **Ответ:** $p \leq -2$.

4.41(2) $\begin{cases} 5 - 3x < 4x - 2 \\ 2 + 3x < 2a + 2x \end{cases}$; $\begin{cases} -4x - 3x < -2 - 5 \\ 3x - 2x < 2a - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 1 \\ x < 2a - 2 \end{cases}$;

$2a - 2 \leq 1$; $2a \leq 3$; $a \leq 1{,}5$. **Ответ:** $a \leq 1{,}5$.

4.42(1) $\begin{cases} 5 - x < 2 \\ x + 6 < m + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3 \\ x < m - 5 \end{cases}$, $3 < x < m - 5$. Поскольку $x > 3$, то меньшим из трех целых решений системы является число $x = 4$, а затем $x = 5$ и $x = 6$ — тоже решения. Поэтому $m - 5 > 6$. По условию решений три, следовательно $x < 7$ и $m - 5 \leq 7$.

Окончательно имеем $6 < m - 5 \leq 7$, $11 < m \leq 12$.

Ответ: $11 < m \leq 12$.

4.42(2) $\begin{cases} 4 + x > 1 \\ x - 5 < m - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -3 \\ x < m + 3 \end{cases}$, $-3 < x < m + 3$.

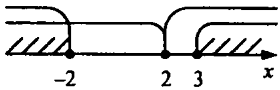
Поскольку $x > -3$, то целыми решениями системы являются числа -2; -1; 0. Поэтому $m + 3 > 0$. По условию других решений нет, следовательно $m + 3 \leq 1$. Окончательно имеем $0 < m + 3 \leq 1$; $-3 < m \leq -2$. **Ответ:** $-3 < m \leq -2$.

4.43(1) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-5x+6}$

Найдем область определения выражения: $\begin{cases} x^2-4\ge 0 & \text{(I)} \\ x^2-5x+6\ge 0 & \text{(II)} \end{cases}$

1) $x\le -2;\ x\ge 2$ решение неравенства (I)

2) $x\le 2;\ x\ge 3$ решение неравенства (II)

3) 

Область определения выражения: $x\le -2;\ x=2;\ x\ge 3$.

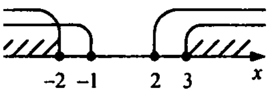
4) Области определения не принадлежат: $-1;\ 0;\ 1$.

Ответ: $-1;\ 0;\ 1$.

4.43(2) $\sqrt{x^2-2x-3}+\sqrt{x^2-4}$

1) Найдем область определения выражения $\begin{cases} x^2-2x-3\ge 0 \\ x^2-4\ge 0 \end{cases}$

2) $x^2-2x-3=0$; $x_1=3$; $x_2=-1$; $x^2-2x-3\ge 0$; $x\le -1;\ x\ge 3$.

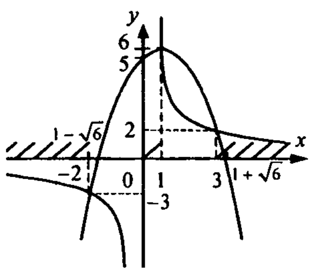


3) $x^2-4\ge 0$; $x\le -2;\ x\ge 2$. Область определения выражения: $x\le -2;\ x\ge 3$

6) Области определения выражения не принадлежат $-1;\ 0;\ 1;\ 2$.

Ответ: $-1;\ 0;\ 1;\ 2$.

4.44(1) $\dfrac{6}{x}>5+2x-x^2$.



1) $y=\dfrac{6}{x}$ график — гипербола, ветви симметричны относительно начала координат.

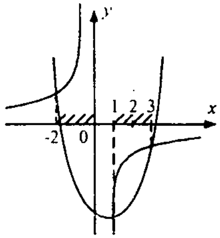
x	1	−2	3	6
y	6	−3	2	1

2) $y=-x^2+2x+5$; $x^2-2x-5=0$; $x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}$

x	$1-\sqrt{6}$	0	1	$1+\sqrt{6}$	3	−2
y	0	5	6	0	2	−3

Из таблицы и графиков видно, что графики пересекаются в точках $(-2;\ -3)$; $(1;\ 6)$ и $(3;\ 2)$.

Ответ: $x<-2;\ 0<x<1;\ x>3$.



4.44(2) $x^2-2x-5<-\dfrac{6}{x}$

1) $y=x^2-2x-5$ График — парабола, ветви вверх. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}$

x	$1-\sqrt{6}$	–2	0	1	$1+\sqrt{6}$	3
y	0	3	–5	–6	0	–2

II. $y=-\dfrac{6}{x}$ График — гипербола.

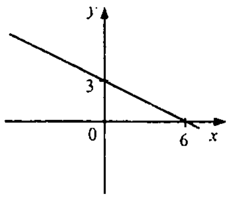
x	–3	–2	–1	1	2	3
y	2	3	6	–6	–3	–2

Графики пересекаются в точках: (–2; 3); (1; –6); (3; –2).

Ответ: при $-2<x<0$; $1<x<3$.

5. Функции

2 балла



5.1(1) График функции прямая

$y=-\dfrac{1}{2}x+3$

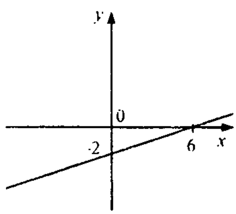
1)

x	0	6
y	3	0

2)

x	0	8
y	3	–1

Ответ: если $0\le x\le 8$, то $-1\le y\le 3$.



5.1(2) $y=\dfrac{1}{3}x-2$

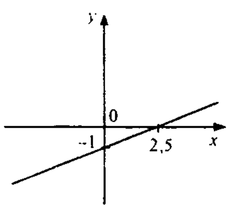
1)

x	0	6
y	–2	0

2)

x	0	9
y	–2	1

Ответ: если $0\le x\le 9$, то $-2\le y\le 1$.



5.2(1) $y=0{,}4x-1$

1)

x	0	2,5
y	–1	0

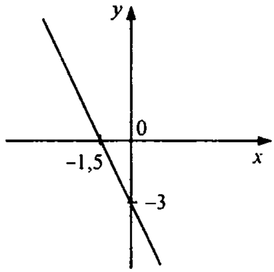
2) $0{,}4x-1<0$; $0{,}4x<1$; $x<2{,}5$.

Ответ: $y<0$ при $x<2{,}5$.

5.2(2) $y = -2x - 3$

1)

x	0	$-1{,}5$
y	-3	0

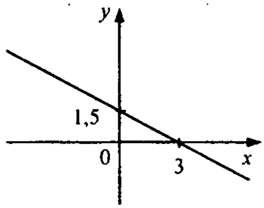


2) $y > 0$ при $x < -1{,}5$.

Ответ: $y>0$ при $x < -1{,}5$.

5.3(1) $y = \dfrac{3-x}{2}$

x	0	3
y	1,5	0

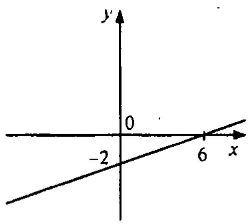


если $0 \le y \le 1{,}5$, то $0 \le x \le 3$.

Ответ: если $0 \le y \le 1{,}5$, то $0 \le x \le 3$.

5.3(2) $y = \dfrac{x-6}{3}$

x	0	6
y	-2	0



2) если $-2 \le y \le 0$, то $0 \le x \le 6$.

Ответ: если $-2 \le y \le 0$, то $0 \le x \le 6$.

5.4(1) $y = -2x^2 + 4x - 3$

График функции — парабола, ветви которой направлены вниз.

1) $x = 0$; $y = -3$.

2) $y = 0$; $-2x^2 + 4x - 3 = 0$; $2x^2 - 4x + 3 = 0$; $D < 0$.

Парабола не пересекает ось OX.

3) Координаты вершины параболы:

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} \\ y_0 = f(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

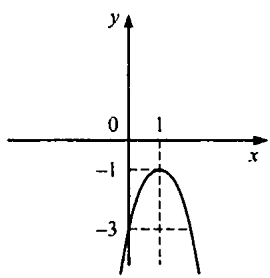
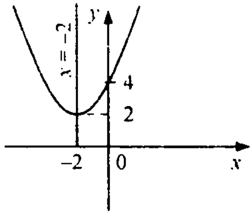


График симметричен относительно прямой $x = 1$.

x	0	1	2
y	-3	-1	-3

Ответ: $y_{наиб} = -1$.



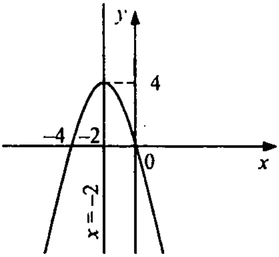
5.4(2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$. График — парабола, ветви вверх.

$\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

x	−2	0	1	2
y	2	4	6,5	10

График симметричен относительно прямой $x = -2$.

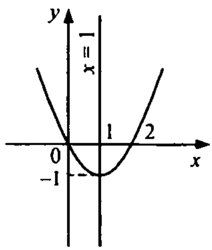
Ответ: $y_{наим.} = 2$.



5.5(1) $y = -x^2-4x$. График — парабола, ветви вниз. $\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 4 \end{cases}$. График симметричен относительно прямой $x = -2$.

x	−5	−4	−2	0
y	−5	0	4	0

Ответ: $y < 0$, если $x < -4$; $x > 0$.

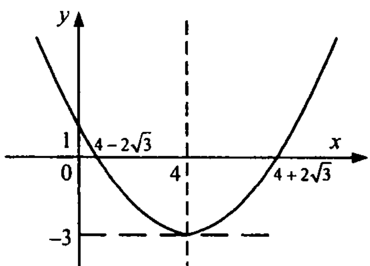


5.5(2) $y = x^2-2x$. График — парабола, ветви вверх. $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$

x	0	1	2	3
y	0	−1	0	3

График симметричен относительно прямой $x = 1$.

Ответ: $y>0$, если $x<0$; $x>2$.



5.6(1) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1$;

$y = 0$ при $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$.

График — парабола, ветви вверх.

$\begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -3 \end{cases}$;

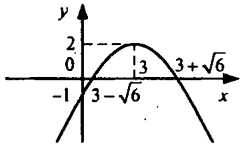
x	0	2	4
y	1	−2	−3

График симметричен относительно прямой $x = 4$.

Ответ: область значений $[-3; +\infty)$.

5.6(2) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$; $y=0$ при $x=3\pm\sqrt{6}$.

График — парабола, ветви вниз.



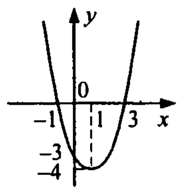
$\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=2 \end{cases}$ График симметричен относительно прямой $x=3$.

x	0	1	3
y	-1	$\frac{2}{3}$	2

Ответ: область значений функции $(-\infty; 2]$.

5.7(1) $y=x^2-2x-3$. График — парабола, ветви вверх.

1) $y=0$; $x_1=3$; $x_2=-1$



2) $x=0$; $y=-3$ 3) $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-4 \end{cases}$

4)

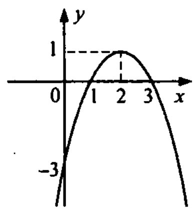
x	-1	0	1	3	4
y	0	-3	-4	0	5

Ответ: если $0\le x\le 4$, то $-4\le y\le 5$.

5.7(2) $y=-x^2+4x-3$. График — парабола, ветви вниз.

1) $x=0$, $y=-3$.

2) $y=0$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=3$; $x_2=1$



3) $\begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \end{cases}$

4)

x	0	1	2	3
y	-3	0	1	0

Ответ: если $0\le x\le 3$, то $-3\le y\le 1$.

5.8(1) $y=-\frac{1}{2}x^2+3$.

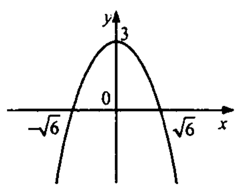
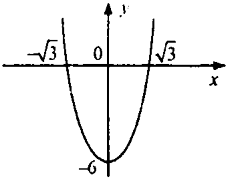


График — парабола, ветви вниз.

Координаты вершины параболы: (0; 3).

x	$-\sqrt{6}$	0	1	$\sqrt{6}$
y	0	3	2,5	0

Ответ: $(-\sqrt{6}; 0)$; $(\sqrt{6}; 0)$.



5.8(2) $y = 2x^2-6$.

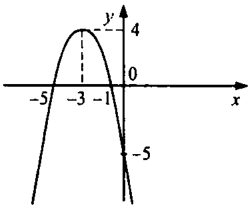
График — парабола, ветви вверх.

$(0; -6)$ — координаты вершины параболы.

x	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
y	−6	0	0	−4

График симметричен относительно прямой OY.

Ответ: $\left(-\sqrt{3}; 0\right); \left(\sqrt{3}; 0\right)$.



5.9(1) $y = -x^2-6x-5$.

График — парабола, ветви вниз.

1) $x = 0$; $y = -5$.

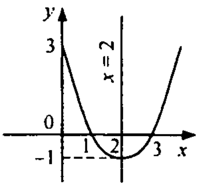
2) $y = 0$; $x^2+6x+5 = 0$; $x_1 = -5$; $x_2 = -1$.

3) $x_0 = -3$; $y_0 = 4$.

x	−5	−3	−1	0
y	0	4	0	−5

График симметричен относительно прямой $x = -3$.

Ответ: функция возрастает на промежутке $(-\infty; -3]$; функция убывает на промежутке $[-3; +\infty)$.



5.9(2) $y = x^2-4x+3$. График — парабола, ветви вверх. 1) $x = 0$; $y = 3$

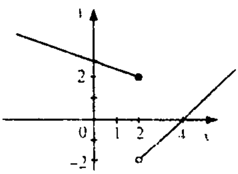
2) $y = 0$; $x^2-4x+3 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = 1$

3) $x_0 = 2$; $y_0 = -1$

x	0	1	2	3
y	3	0	−1	0

График симметричен относительно прямой $x = 2$.

Ответ: функция убывает на промежутке $(-\infty; 2]$; возрастает на промежутке $[2; +\infty)$.



5.10(1) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x+3, \text{ если } x \le 2 \\ x-4, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

1) $y = -\dfrac{1}{2}x+3$, $x \le 2$

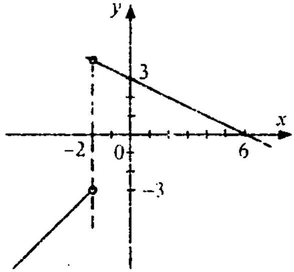
x	0	2
y	3	2

2) $y = x-4$, $x>2$

x	3	4
y	−1	0

Ответ: функция убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

5.10(2) $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } x<-2 \\ -\dfrac{1}{2}x+3, \text{ если } x\geq -2 \end{cases}$



1) $y=x-1;\ x<-2$

x	-3	-4
y	-4	-5

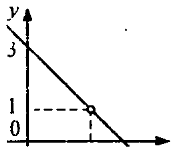
2) $y=-\dfrac{1}{2}x+3;\ x\geq -2$

x	0	6
y	3	0

Ответ: функция убывает на промежутке $[-2;+\infty)$.

4 балла

5.11(1) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{2-x};\ x\neq 2$.



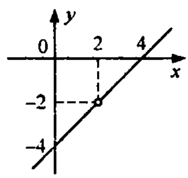
1) Найдем корни квадратного трехчлена x^2-5x+6. $x_1=2$; $x_2=3$.

2) $y=\dfrac{(x-2)(x-3)}{2-x}$; $y=-x+3\ \ (x\neq 2)$.

x	0	3
y	3	0

Ответ: График — прямая $y=-x+3$ без точки $(2;\ 1)$; $y>0$, если $x<3$; $x\neq 2$.

5.11(2) $y=\dfrac{-x^2+6x-8}{2-x};\ x\neq 2$.



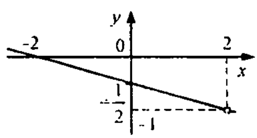
1) Найдем корни квадратного трехчлена $-x^2+6x-8$: $x^2-6x+8=0$; $x_1=4$; $x_2=2$;

$y=\dfrac{-(x-4)(x-2)}{2-x}$; $y=x-4\ \ (x\neq 2)$.

x	0	4
y	-4	0

Ответ: График — прямая $y=x-4$ без точки $(2;\ -2)$; $y<0$, если $x<4$; $x\neq 2$.

5.12(1) $y=\dfrac{x^2-4}{8-4x};\ x\neq 2$;



$y=\dfrac{(x-2)(x+2)}{4(2-x)}\ \ (x\neq 2)$;

$y = -\dfrac{x+2}{4}$

x	0	-2
y	$-\dfrac{1}{2}$	0

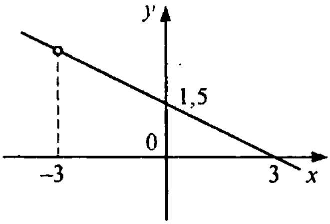
Ответ: График — прямая $y = -\dfrac{x+2}{4}$ без точки $(2;\ -1)$; область значений $-\infty < y < -1;\ -1 < y < +\infty$.

5.12(2) $y = \dfrac{9-x^2}{6+2x}$;

$y = \dfrac{(3-x)(3+x)}{2(3+x)}$;

$x \neq -3$;

$y = \dfrac{3-x}{2}$.



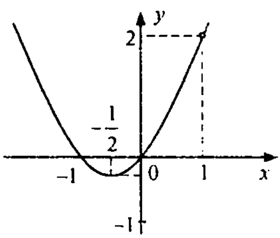
x	0	3
y	1,5	0

Ответ: График — прямая $y = -\dfrac{x-3}{2}$ без точки $(-3;\ 3)$; область значений — множество всех чисел, кроме 3.

5.13(1) $y = \dfrac{x^3-x}{x-1}$; $y = \dfrac{x\left(x^2-1\right)}{x-1}$; $x \neq 1$; $y = \dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1}$;

$y = x(x+1)$; (I) $y = x^2+x$.

График функции (I) — парабола, ветви вверх.



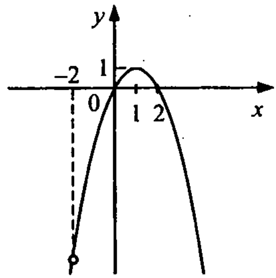
x	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0
y	0	$-\dfrac{1}{4}$	0

Ветви параболы симметричны относительно прямой $x = -\dfrac{1}{2}$.

График функции — парабола $y = x^2 + x$ $(x \neq 1)$.

Ответ: $y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$; $(0;\ 1)$; $(1; \infty)$.

5.13(2) $y=\frac{4x-x^3}{x+2}$; $x\neq-2$;



$y=\frac{x(4-x^2)}{x+2}$; $y=\frac{x(2-x)(2+x)}{x+2}$;

$y = x(2-x)$; $y = -x^2+2x$ (I). График функции (I) — парабола, ветви вниз.

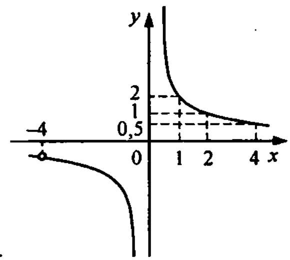
x	0	1	2
y	0	1	0

(1; 1) — координаты вершины параболы.

Ответ: $y < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$; $(-2; 0)$; $(2; +\infty)$.

5.14(1) $y=\frac{2x+8}{x^2+4x}$; $y=\frac{2(x+4)}{x(x+4)}$; $x\neq-4$; $x\neq0$; $y=\frac{2}{x}$ (I)

График функции (I) — гипербола, ветви которой симметричны относительно начала координат.

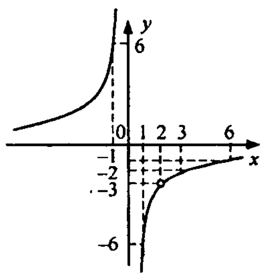


x	1	2	4
y	2	1	$\frac{1}{2}$

Ответ: График — гипербола $y=\frac{2}{x}$

без точки $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$; $y<2$ при $x<-4$; $-4<x<0$; $x>1$.

5.14(2) $y=\frac{12-6x}{x^2-2x}$; $y=\frac{6(2-x)}{x(x-2)}$;



$x\neq2$; $x\neq0$; $y=-\frac{6}{x}$ (I)

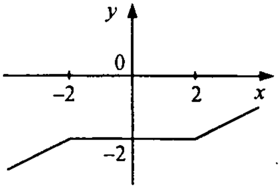
График функции (I) — гипербола.

x	1	3	6	–1
y	–6	–2	–1	6

Ветви симметричны относительно начала координат.

Ответ: График — гипербола $y=-\frac{6}{x}$ без точки (2; –3); $y < 6$ при $x < -1$; $0 < x < 2$; $x > 2$.

5.15(1)



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}, \text{ если } x\le -2\\ -2, \text{ если } -2\le x<2\\ \dfrac{x-6}{2}, \text{ если } x\ge 2\end{cases}$$

1) $y=\dfrac{x-2}{2},\ x\le -2$

x	–4	–2
y	–3	–2

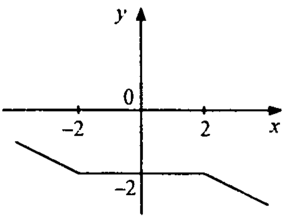
2) $y=\dfrac{x-6}{2}$, если $x\ge 2$;

x	2	4
y	–2	–1

3) $f(-10)=-6$

Ответ: $f(-10)=-6$.

5.15(2)



$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x+6}{2}, \text{ если } x\le -2\\ -2, \text{ если } -2<x<2\\ -\dfrac{x+2}{2}, \text{ если } x\ge 2\end{cases}$$

1) $y=-\dfrac{x+6}{2},\ x\le -2$

x	–2	–4
y	–2	–1

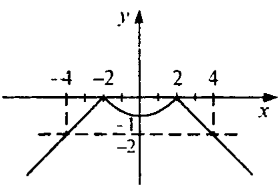
2) $y=-\dfrac{x+2}{2}$, если $x\ge 2$;

x	2	4
y	–2	–3

3) $f(-20)=-\dfrac{-20+6}{2}=7$

Ответ: $f(-20)=7$.

5.16(1)



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^2-1, \text{ если } -2\le x\le 2\\ 2-x, \text{ если } x>2\\ x+2, \text{ если } x<-2\end{cases}$$

1) $y=\dfrac{1}{4}x^2-1;\ -2\le x\le 2$ 2) $y=2-x;\ x>2$ 3) $y=x+2,\ x<-2$

x	–2	0	2
y	0	–1	0

x	3	4
y	–1	–2

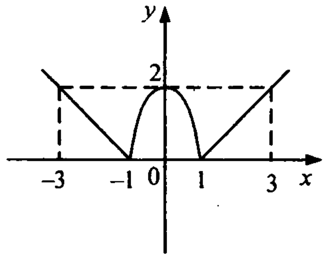
x	–3	–4
y	–1	–2

Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-2]$ и $[0;2]$.

5.16(2) $f(x)=\begin{cases}2-2x^2, \text{ если } -1\le x\le 1\\ x-1, \text{ если } x>1\\ -x-1, \text{ если } x<-1\end{cases}$

1) $y=2-2x^2;\ -1\le x\le 1$

x	-1	0	1
y	0	2	0



2) $y=x-1;\ x>1$

x	2	3
y	1	2

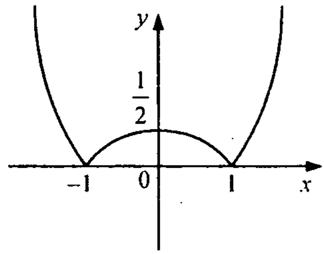
3) $y=-x-1;\ x<-1.$

x	-3	-2
y	2	1

Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $[-1;\ 0]$ и $[1;+\infty)$.

5.17(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2, \text{ если } -1\le x\le 1\\ x^2-1, \text{ если } x<-1;\ x>1\end{cases}$

1) $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$, если $-1\le x\le 1$.



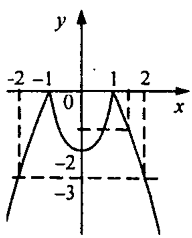
x	-1	0	1
y	0	$\frac{1}{2}$	0

2) $y=x^2-1;\ x<-1;\ x>1$

x	-3	-2	2	3
y	8	3	3	8

Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $[-1;\ 0]$ и $[1;+\infty)$.

5.17(2) $f(x)=\begin{cases}2x^2-2, \text{ если } -1\le x\le 1\\ 1-x^2, \text{ если } x<-1;\ x>1\end{cases}$



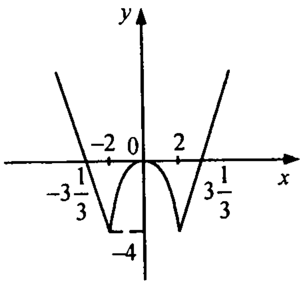
1) $y=2x^2-2$, если $-1\le x\le 1$.

x	-1	0	1
y	0	-2	0

2) $y=1-x^2;\ x<-1;\ x>1$

x	-2	2	$1{,}5$
y	-3	-3	$-1{,}25$

Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-1]$ и $[0;\ 1]$.



5.18(1)

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, \text{ если } -2\le x\le 2\\ 3x-10, \text{ если } x>2\\ -3x-10, \text{ если } x<-2\end{cases}$$

1) $y=-x^2;\ -2\le x\le 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

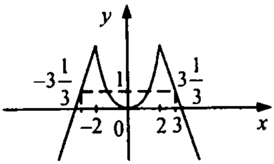
2) $y=3x-10;\ x>2$

x	$\frac{10}{3}$	3
y	0	-1

3) $y=-3x-10;\ x<-2$

x	$-3\frac{1}{3}$	-3
y	0	-1

Ответ: $f(x)\ge 0$ если $x=0;\ |x|\ge 3\frac{1}{3}$.



5.18(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } -2\le x\le 2\\ 10-3x, \text{ если } x>2\\ 10+3x, \text{ если } x<-2\end{cases}$

1) $y=x^2;\ -2\le x\le 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

2) $y=10-3x;\ x>2$

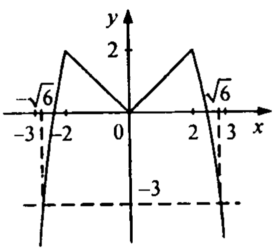
x	3	$\frac{10}{3}$
y	1	0

3) $y=10+3x;\ x<-2$

x	$-\frac{10}{3}$	-3
y	0	1

Ответ: $f(x)>0$, если $|x|<3\frac{1}{3};\ x\ne 0$.

5.19(1) $f(x)=\begin{cases}|x|, \text{ если } -2\le x\le 2\\ 6-x^2, \text{ если } |x|>2\end{cases}$



1) $y=|x|;\ -2\le x\le 2$

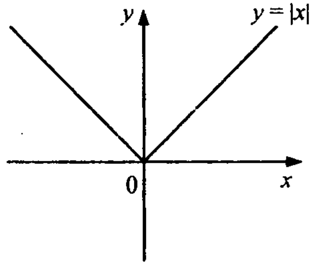
x	-2	0	2
y	2	0	2

2) $y=6-x^2;\ x<-2;\ x>2$

x	$-\sqrt{6}$	-3	$\sqrt{6}$	3
y	0	-3	0	-3

Ответ: $f(x)>0$, если $|x|<\sqrt{6};\ x\ne 0$.

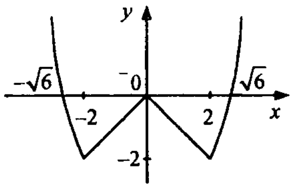
5.19(2) $f(x)=\begin{cases}-|x|, \text{ если } |x|\le 2\\ x^2-6, \text{ если } |x|>2\end{cases}$



Построим график сразу, помня о том, что $f(x)$ задана по-разному при различных x. График $y = |x|$.

Общая таблица:

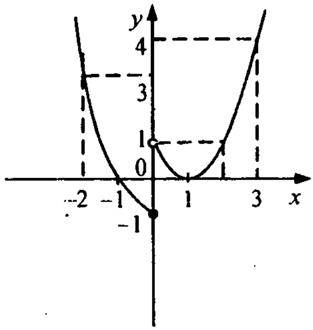
x	$-\sqrt{6}$	-2	0	2	$\sqrt{6}$
y	0	-2	0	-2	0



В т. 0 $f(x) = 0$ и при $-2\le x\le 2$ график функции -- два отрезка (график $y = |x|$). Слева от $x = -2$ и справа от $x = 2$ график функции — часть параболы $y = x^2 - 6$, проходящей через точки $(-\sqrt{6};0)$ и $(\sqrt{6};0)$.

Ответ: $f(x)\ge 0$, если $|x|\ge\sqrt{6}$; $x = 0$.

5.20(1) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, \text{ если } x\le 0\\ (x-1)^2, \text{ если } x>0\end{cases}$



1) $y = x^2-1$; $x\le 0$

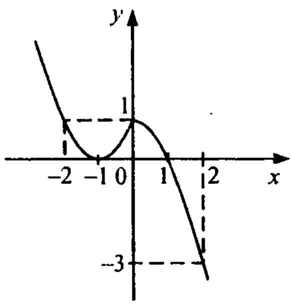
x	-2	-1	0
y	3	0	-1

2) $y = (x-1)^2$, $x>0$

x	1	2	3
y	0	1	4

Ответ: $y\ge 0$, если $x\le -1$; $x>0$.

5.20(2) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, \text{ если } x<0\\ 1-x^2, \text{ если } x\ge 0\end{cases}$



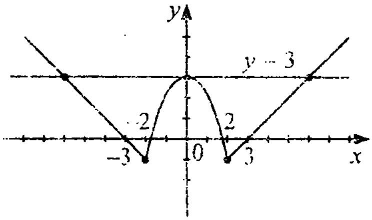
1) $y = (x+1)^2$; $x<0$

x	-3	-2	-1	0
y	4	1	0	1

$y = 1-x^2$, $x\ge 0$

x	0	1	2
y	1	0	-3

Ответ: $y>0$, если $x<-1$; $-1<x<1$.

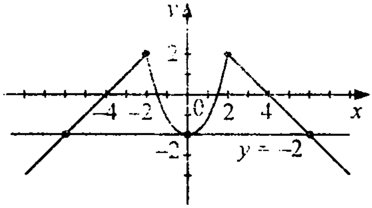


5.21(1)

$$f(x) = \begin{cases} -x-3, \text{ если } x \le -2 \\ 3-x^2, \text{ если } |x| < 2 \\ x-3, \text{ если } x \ge 2 \end{cases}$$

Прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции три общие точки, если $m = 3$.

Ответ: $m = 3$.

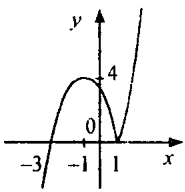


5.21(2)

$$f(x) = \begin{cases} x+4, \text{ если } x < -2 \\ x^2-2, \text{ если } |x| \le 2 \\ 4-x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

Прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции три общие точки, если $m = -2$.

Ответ: $m = -2$.



5.22(1) $f(x) = \begin{cases} (1-x)(x+3); \ x \le 1 \\ (x-1)(x+3); \ x > 1 \end{cases}$;

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x+3; \ x \le 1 \\ x^2+2x-3; \ x > 1 \end{cases}$$

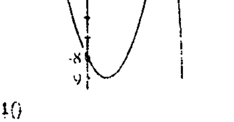
1) $y = -x^2-2x+3$: $x \le 1$. График этой функции — парабола, ветви вниз. Координаты вершины $x_0 = -1$; $y_0 = 4$.

x	0	–3	1
y	3	0	0

2) $y = x^2+2x-3$, $x > 1$. Это часть параболы с вершиной в т. $(-1; -4)$.

x	1	2
y	0	5

Ответ: прямая $y = m$ имеет с графиком функции 2 общие точки при $m = 0$; $m = 4$.



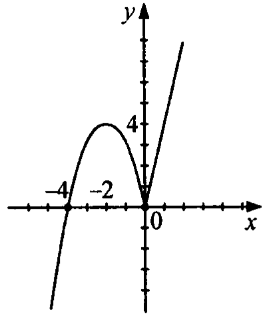
5.22(2)

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)(x-4), \text{ если } x < 4 \\ (x+2)(4-x), \text{ если } x \ge 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x-8, \text{ если } x < 4 \\ 8+2x-x^2, \text{ если } x \ge 4 \end{cases}$$

Прямая $y = m$ имеет с графиком функции две общие точки при $m = 0$ или $m = -9$.

Ответ: $m = -9$, $m = 0$.

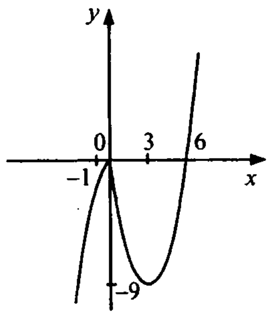


5.23(1) $f(x) = \begin{cases} -x(x+4), \text{ если } x < 0 \\ x(x+4), \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x, \text{ если } x < 0 \\ x^2 + 4x, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$$

Прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции три общие точки, если $m \in (0; 4)$.

Ответ: $m \in (0; 4)$.



5.23(2) $f(x) = \begin{cases} x(6-x); x \leq 0 \\ x(x-6); x > 0 \end{cases}$

1) $y = x^2 - 6x$; $x > 0$

x	0	6	3
y	0	0	–9

2) $y = -x^2 + 6x$; $x \leq 0$

x	0	–1
y	0	–7

Ответ: при $-9 < m < 0$.

6 баллов

5.24(1) $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{2x - x^2}$; $y = \dfrac{x\left(x^2 - x - 2\right)}{x(2-x)}$.

1) $y = \dfrac{x(x-2)(x+1)}{x(2-x)}$; $y = -x - 1$; $x \neq 0; x \neq 2$.

2) $y = -x - 1$

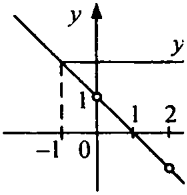
x	–1	–4
y	0	3

3) $y \leq 3$ при $x > -4$; $x \neq 0$; $x \neq 2$.

Ответ: $-4 \leq x < 0$; $0 < x < 2$; $x > 2$.

5.24(2) $y = \dfrac{-x^3 + 3x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$; $y = \dfrac{-x\left(x^2 - 3x + 2\right)}{x(x-2)}$; $x \neq 0$; $x \neq 2$.

$y = \dfrac{-x(x-2)(x-1)}{x(x-2)}$;

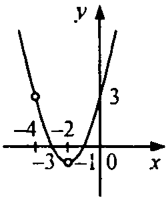


$y = -x+1$ ($x \neq 0; x \neq 2$)

x	1	-1
y	0	2

$y \leq 2$ при $x \geq -1$; $x \neq 0$; $x \neq 2$.

Ответ: $-1 \leq x < 0$; $0 < x < 2$; $x > 2$.



5.25(1) $y = \dfrac{\left(x^2+7x+12\right)\left(x^2+3x+2\right)}{x^2+6x+8}$;

$y = \dfrac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+4)}$; $x \neq -2$; $x \neq -4$.

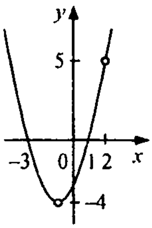
$y = (x+3)(x+1)$;

1) $y = x^2+4x+3$ (I) График функции (I) — парабола, ветви вверх; $x_0 = -2$; $y_0 = -1$.

2)

x	-3	-1	0
y	0	0	3

Ответ: Парабола $y = x^2+4x+3$ с выколотыми точками (-2; -1); (-4; 3).



5.25(2) $y = \dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-x-2}$;

$y = \dfrac{(x+3)(x+1)(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}$; $x \neq 2$; $x \neq -1$.

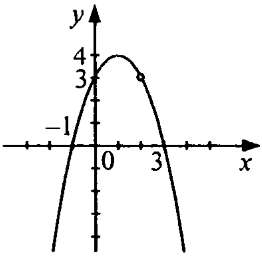
$y = (x+3)(x-1)$; $y = x^2+2x-3$ (I)

График функции (I) — парабола, ветви вверх.

x	-3	1	0	-1	2
y	0	0	-3	-4	5

Ответ: Парабола $y = x^2+2x-3$ с выколотыми точками (2; 5) и (-1; -4).

5.26(1)



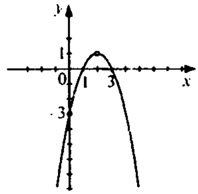
$y = \dfrac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(2-x)} =$

$= \begin{cases} (x+1)(3-x), & x \neq 2 \\ \text{не определена, если } x = 2 \end{cases}$

Прямая $y = m$ имеет одну общую точку с графиком функции, если $m = 3$ или $m = 4$.

Ответ: $m = 3$, $m = 4$.

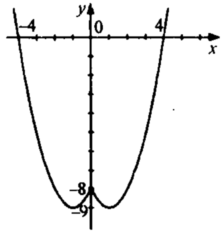
5.26(2)



$$y=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2-x}=$$

$$=\begin{cases}(x-1)(3-x), \text{ если } x\neq 2\\ \text{не определена, если } x=2\end{cases}$$

Прямая $y = m$ имеет одну общую точку с графиком функции, при $m = 1$. **Ответ:** $m = 1$.



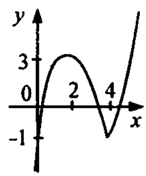
5.27(1) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-8, \text{ если } x\geq 0\\ x^2+2x-8, \text{ если } x<0\end{cases}$

Прямая $y = p$ имеет две общие точки с графиком функции, если $p = -9$ или $p\in(-8;+\infty)$.

Ответ: $p\in\{-9\}\cup(-8;+\infty)$.

5.27(2)

В условии задачи опечатка.



5.28(1) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x-1, \text{ если } x\geq 4\\ -x^2+4x-1, \text{ если } x<4\end{cases}$

1) $y = (x^2-4x+4)-5$; $y = (x-2)^2-5$, $x \geq 4$.

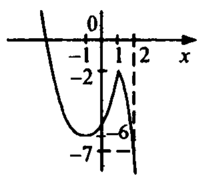
x	4	5	6
y	−1	4	11

2) $y = -x^2+4x-1$; $y = -(x^2-4x+1)$; $y = -(x-2)^2+3$, $x < 4$. $x_0 = 2$; $y_0 = 3$.

x	−1	0	1	2	4
y	−6	−1	2	3	−1

Ответ: прямая $y = m$ имеет с графиком 2 общие точки при $m = 3$ и $m = -1$.

5.28(2)



$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+1, \text{ если } x\geq 1\\ x^2+2x-5, \text{ если } x<1\end{cases}$$

1) $y = -(x^2+2x-1+1-1)$; $y = -(x+1)^2+2$, $x \geq 1$

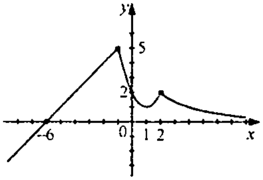
x	1	2
y	−2	−7

2) $y = x^2+2x+1-1-5$; $y = (x+1)^2-6$, $x < 1$.

x	−4	−3	−1	0	1
y	3	−2	−6	−5	−2

Ответ: прямая $y = m$ имеет с графиком 3 общие точки при $-6<m<-2$.

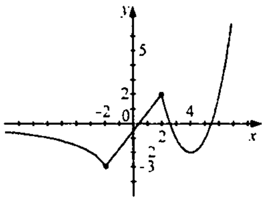
5.29(1)



$$f(x)=\begin{cases} x+6, \text{ если } x<-1 \\ x^2-2x+2, \text{ если } -1\le x<2 \\ \dfrac{4}{x}, \text{ если } x\ge 2 \end{cases}$$

Прямая $y = p$ имеет две общие точки с графиком функции, если $p\in(0;1)\cup(2;5)$. **Ответ:** $p\in(0;1)\cup(2;5)$.

5.29(2)



$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ если } x<-2 \\ \dfrac{5x-2}{4}, \text{ если } -2\le x\le 2 \\ x^2-8x+14, \text{ если } x>2 \end{cases}$$

Прямая $y = p$ имеет три общие точки с графиком функции, если $p = -2$ или $p\in[0;2)$. **Ответ:** $p\in\{-2\}\cup[0;2)$.

5.30(1) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) =$
$= (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$
$y(0) = 4$. Тогда $A(-2; 0)$; $C(2; 0)$; $B(0; 4)$.
Ответ: $A(-2; 0)$; $B(0; 4)$; $C(2; 0)$.

5.30(2) $y = -x^3 - 2x^2 + x + 2 = -x^2(x+2) + (x+2) =$
$= (x+2)(1-x^2) = (x+2)(1-x)(1+x)$
$y(0) = 2$. $M(-2; 0)$; $N(-1; 0)$; $K(0; -2)$
Ответ: $M(-2; 0)$; $N(-1; 0)$; $K(0; -2)$.

5.31(1) $y = -9x^4 + 10x^2 - 1 = 0$; $y(0) = -1 \Rightarrow B(0; -1)$
$t = x^2$; $-9t^2 + 10t - 1 = 0$; $9t^2 - 10t + 1 = 0$

$t_1 = 1$ $\qquad t_2 = \dfrac{1}{9}$

$x^2 = 1$ $\qquad x^2 = \dfrac{1}{9}$

$x = \pm 1$ $\qquad x = \pm\dfrac{1}{3}$

Тогда $A(-1; 0)$; $C\left(\dfrac{1}{3}; 0\right)$.

Ответ: $A(-1; 0)$; $B(0; -1)$; $C\left(\dfrac{1}{3}; 0\right)$.

5.31(2) $y = 4x^2 - 5x^2 + 1$; $y(0) = 1 \Rightarrow K(0;\ 1)$

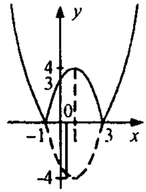
$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; $t = x^2$; $4t^2 - 5t + 1 = 0$

$t_1 = 1$; $\qquad x^2 = 1$; $\qquad x = \pm 1$

$t_2 = \dfrac{1}{4}$; $\qquad x^2 = \dfrac{1}{4}$; $\qquad x = \pm\dfrac{1}{2}$

$L\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$; $M(1;\ 0)$

Ответ: $K(0;\ 1)$; $L\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)$.



5.32(1) $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$;

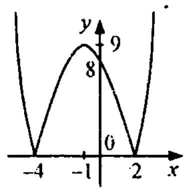
$y \geq 0$ при любом значении x.

1) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$; $x_0 = 1$; $y_0 = -4$ (для $y = x^2-2x-3$).

Для построения данного графика, построим график функции $y = x^2-2x-3$ и отобразим часть параболы, находящуюся ниже оси $0x$, симметрично относительно этой оси.

x	–2	–1	0	1	3	4
y	5	0	3	4	0	5

Ответ: Прямая $y = m$ может иметь с графиком: 1) 2 общие точки (при $m = 0$ и $m>4$); 2) 3 общие точки (при $m = 4$); 3) 4 общие точки (при $0<m<4$).



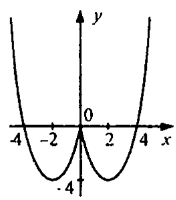
5.32(2) $y = \left|-x^2 - 2x + 8\right| = \left|x^2 + 2x - 8\right|$;

$y \geq 0$ при любом значении x;

1) $y = 0$ при $x = -4$; $x = 2$;

x	–3	–4	–1	0	2	3
y	5	0	9	8	0	7

Ответ: прямая $y = m$ может иметь с графиком 2 общие точки при $m = 0$ и $m>9$; 3 общие точки при $m = 9$; 4 общие точки при $0<m<9$.

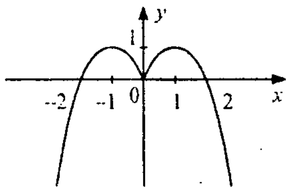


5.33(1) $y = x^2-4|x|$; $x^2-4|x| = x^2-4|-x|$

График симметричен относительно OY. При $x \geq 0$ $y = x^2 - 4x$; $y = x(x - 4)$; $y = 0$ при $x_1 = 0$; $x_2 = 4$, а также ввиду симметрии графика при $x_3 = -4$.

x	–5	–4	–2	0	2	4	5
y	5	0	–4	0	–4	0	5

Ответ: прямая $y = m$ может иметь с графиком 2 общие точки (при $m = -4$ и $m>0$); 3 общие точки (при $m = 0$); 4 общие точки при $-4<m<0$.

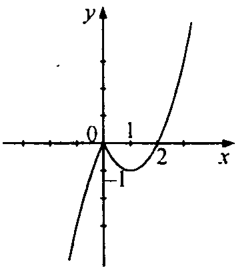


5.33(2) $y = -x^2+2|x|$;
$-x^2+2|x| = -(-x)^2+2|-x|$
График симметричен относительно OY.
При $x \geq 0$ $y = -x^2 + 2x$; $y = x(-x+2)$; $y = 0$ при $x_1 = 0$; $x_2 = 2$, а также при $x_3 = -2$.

1) $y = -x^2+2x$; $y = -x(x-2)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	0	1	0	1	0	-3

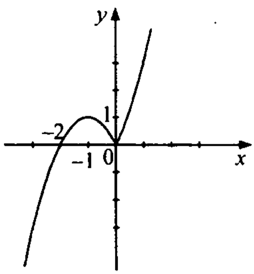
Ответ: прямая $y = m$ может иметь с графиком 2 общие точки (при $m = 1$ и $m<0$); 3 общие точки (при $m = 0$); 4 общие точки при $0<m<1$.



5.34(1)

$$y = x(x-2) = \begin{cases} -x^2+2x, \text{ если } x<0 \\ x^2-2x, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: 1 общая точка, если
$p \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;
2 общих точки, если $p = -1$ или $p = 0$;
3 общих точки, если $p \in (-1; 0)$.



5.34(2)

$$y = x(2+x) = \begin{cases} -x^2-2x, \text{ если } x<0 \\ x^2+2x, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: 1 общая точка, если $p \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;
2 общих точки, если $p = 0$ или $p = 1$;
3 общих точки, если $p \in (0; 1)$.

5.35(1) Если $x \geq 0$, то имеем уравнение $x^2 - x + 1 = 2 - x$
$x^2 = 1$
$x = 1$ (т.к. $x \geq 0$)
$y = 2 - |1| = 1$.
Координаты точки (1; 1).
Если $x < 0$, то имеем уравнение $x^2 - x + 1 = 2 + x$
$x^2 - 2x - 1 = 0$
$D = 4 + 4 = 8$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Т.к. $x < 0$, то $x = 1-\sqrt{2}$; $y = 2-\left|1-\sqrt{2}\right| = 2-\left|\sqrt{2}-1\right| = 3-\sqrt{2}$.

Координаты точки $\left(1-\sqrt{2}; 3-\sqrt{2}\right)$.

Ответ: $\left(1-\sqrt{2}; 3-\sqrt{2}\right); (1; 1)$.

5.35(2) Если $x \geq 0$, то имеем уравнение $-x^2 - x - 1 = x - 2$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$D = 4 + 4 = 8$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Т.к. $x \geq 0$, то $x = \sqrt{2}-1$; $y = \left|\sqrt{2}-1\right|-2 = \sqrt{2}-1-2 = \sqrt{2}-3$.

Координаты точки $\left(\sqrt{2}-1; \sqrt{2}-3\right)$.

Если $x < 0$, то имеем уравнение

$-x^2 - x - 1 = -x - 2$

$x^2 = 1$

$x = -1$ (т.к. $x < 0$)

$y = |-1| - 2 = 1 - 2 = -1$

Координаты точки $(-1; -1)$.

Ответ: $\left(\sqrt{2}-1; \sqrt{2}-3\right); (-1; -1)$.

5.36(1) Если $x \geq 0$, то $x(x + 4) = 3$

$x^2 + 4x - 3 = 0$

$D = 16 + 4 \cdot 3 = 28$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$$

Т.к. $x \geq 0$, то $x = -2 + \sqrt{7}$.

Если $x < 0$, то $-x(x + 4) = 3$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_1 = -1; x_2 = -3$

Ответ: $(-3; 3); (-1; 3); \left(\sqrt{7}-2; 3\right)$.

5.36(2) Если $x \geq 0$, то $x(6 - x) = 5$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 5$

Если $x < 0$, то $-x(6 - x) = 5$

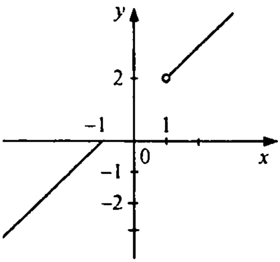
$x^2 - 6x - 5 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 5 = 56$

$$x_{1/2}=\frac{6\pm2\sqrt{19}}{2}=3\pm\sqrt{19}$$

Т.к. $x<0$, то $x=3-\sqrt{19}$.

Ответ: $\left(3-\sqrt{19};\,3\right)$; $(1;\,3)$; $(5;\,3)$.



5.37(1) $y=\frac{(\sqrt{x^2-1})^2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}$;

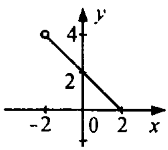
$x^2-1\geq0$, т.к. x^2-1 стоит под знаком радикала, $x\neq1$. Далее: $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$;

$x^2\geq1$; $x\neq1$; $x>1$; $x\leq-1$.

График функции $y=x+1$ — две части прямой линии:

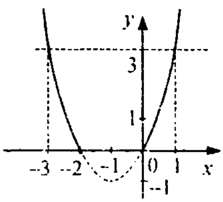
x	–3	–1	2	3
y	–2	0	3	4

$x\leq-1$ $\qquad\qquad$ $x>1$.



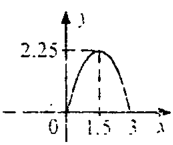
5.37(2) $y=\frac{(\sqrt{4-x^2})^2}{x+2}$; $4-x^2\geq0$, $x\neq-2$;

$$y=\frac{4-x^2}{x+2}=2-x,\ x^2\leq4;\ -2<x\leq2$$



5.38(1) $y=x^2+2x$; $x^2+2x\geq0$

График функции — верхняя часть ($y\geq0$) параболы. Ветви направлены вверх.
$x^2+2x=x(x+2)$; точки пересечения параболы с осью $0x$: $x=0$ и $x=-2$, координаты вершины: $x=-1$; $y=-1$. График симметричен относительно прямой $x=-1$.



5.38(2) $y=3x-x^2$; $3x-x^2\geq0$.

График — часть параболы ($y\geq0$), ветви которой направлены вниз: $3x-x^2=0$, $x(3-x)=0$; $x=0$; $x=3$ – точки пересечения с осью $0x$, координаты вершины: $x=1.5$; $y=2.25$.

5.39(1) $y=-x+4\sqrt{x}+1$; $x\geq0$. $\qquad$ 1) $-x+4\sqrt{x}+1=$

$=-(x-4\sqrt{x}-1)=-(x-4\sqrt{x}+4-4-1)=-(\sqrt{x}-2)^2+5$

2) $y = -\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + 5$. Наибольшее значение этой функции достигается при равенстве нулю отрицательного слагаемого: $-(\sqrt{x} - 2)^2 = 0$; $\sqrt{x} - 2 = 0$; $\sqrt{x} = 2$; $x = 4$.

Ответ: наибольшее значение функции 5; оно достигается при $x = 4$.

5.39(2) $y = x - 6\sqrt{x}$; $x \geq 0$.

1) $x - 6\sqrt{x} = x - 6\sqrt{x} + 9 - 9 = \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 - 9$.

2) $y = \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 - 9$. Наименьшее значение достигается при $(\sqrt{x} - 3)^2 = 0$; $\sqrt{x} - 3 = 0$; $\sqrt{x} = 3$; $x = 9$.

Ответ: наименьшее значение функции -9; оно достигается при $x = 9$.

5.40(1) $y = \dfrac{x^2 + 10}{x^2 + 5}$.

1) $y = \dfrac{x^2 + 5 + 5}{x^2 + 5}$; $y = 1 + \dfrac{5}{x^2 + 5}$.

Наибольшее значение достигается при наименьшем значении знаменателя второго слагаемого, т.е. при $x^2 + 5 = 5$, $x = 0$.

2) при $x = 0$; $y = 2$.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = 2$.

5.40(2) $y = \dfrac{x^2 + 6}{x^2 + 8}$; $y = \dfrac{x^2 + 8 - 2}{x^2 + 8}$; $y = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 8}$.

Наименьшее значение достигается при наибольшем значении дроби $\dfrac{2}{x^2 + 8}$, т.е. при $x = 0$. Тогда $y_{\text{наим}} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ при $x = 0$.

Ответ: $y_{\text{наим}} = \dfrac{3}{4}$.

6. Координаты и графики

2 балла

6.1(1) $y = kx + b$

1) $A(2{,}5;\ 1)$;	$k = 0{,}4$		
$-0{,}4 \cdot 2{,}5 + b = 1$;	$b = 1 + 1$;	$b = 2$;	$y = -0{,}4x + 2$
2) $y = 0$;	$-0{,}4x + 2 = 0$;	$-0{,}4x = -2$;	$x = 5$.

Ответ: $y = -0{,}4x + 2$; $(5;\ 0)$.

6.1(2) $y = kx+b$; $A(1,6; -2,2)$; $k = 0,5$

1) $0,5 \cdot 1,6+b = -2,2$; $b = -2,2-0,8 = -3$; $y = 0,5x-3$

2) $y = 0$; $0,5x-3 = 0$; $x = 6$.

Ответ: $y = 0,5x-3$; $(6; 0)$.

6.2(1) $y = -1,5x+4$; $C(7; -2,5)$

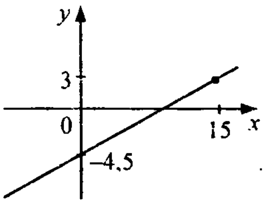
$k = -1,5$; $-1,5 \cdot 7+b = -2,5$; $b = -2,5+10,5 = 8$; $y = -1,5x+8$.

Ответ: $y = -1,5x+8$.

6.2(2) $y = 3,6x-1$; $D(-0,5; 8,2)$

$k = 3,6$; $-0,5 \cdot 3,6+b = 8,2$; $b = 8,2+1,8 = 10$; $y = 3,6x+10$.

Ответ: $y = 3,6x+10$.

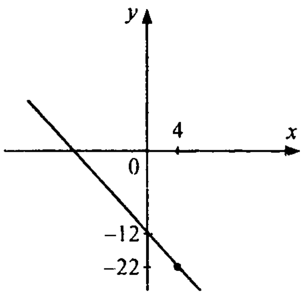


6.3(1) $y = kx+b$. Точки с координатами $(0; -4,5)$ и $(15; 3)$ принадлежат данной прямой.

$$\begin{cases} b = -4,5 \\ 15k + b = 3 \end{cases}; \ 15k-4,5 = 3;$$

$15k = 7,5$; $k = 0,5$; $y = 0,5x-4,5$.

Ответ: $y = 0,5x-4,5$; во II координатной четверти.



6.3(2) $y = kx+b$. Точки с координатами $(0; -12)$ и $(4; -22)$ принадлежат данной прямой.

$$\begin{cases} b = -12 \\ 4k + b = -22 \end{cases}$$

1) $4k = -22+12$; $4k = -10$; $k = -2,5$

2) $y = -2,5x-12$

Ответ: $y = -2,5x-12$;

в I координатной четверти.

6.4(1) $y = ax^2-4x+2$; $D = (3; -1)$

1) $9a-12+2 = -1$; $9a = 9$; $a = 1$; 2) $y = x^2-4x+2$; $D = 16-8>0$

Ответ: $a = 1$; пересекает.

6.4(2) $y = 2x^2+bx+3$; $B(2; 9)$

1) $8+2b+3 = 9$; $2b = -2$; $b = -1$; 2) $2x^2-x+3 = y$; $D = 1-24<0$

Ответ: $b = -1$; не пересекает.

6.5(1) $y = -2$; $6x+y = 22$; $6x-5y = -2$

$$\begin{cases} y = -2 \\ 6x + y = 22 \end{cases} \begin{cases} 6x = 24 \\ y = -2 \end{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \begin{cases} y = -2 \\ 6x - 5y = -2 \end{cases} \begin{cases} 6x = -12 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \begin{cases} 6x + y = 22 \\ 6x - 5y = -2 \end{cases} \begin{cases} 6y = 24 \\ 6x + y = 22 \end{cases} \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: $(4; -2)$; $(-2; -2)$; $(3; 4)$.

6.5(2) $\begin{cases} 4x-5y=-3 \\ x+5y=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x=-10 \\ x+5y=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+5y=-7 \\ x=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x-5y=-3 \\ x=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

Ответ: (–2; –1); (3; –2); (3; 3).

6.6(1)

$\begin{cases} 3x-y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: проходят.

6.6(2)

$\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Ответ: проходят.

4 балла

6.7(1) $A(-12; -7)$; $B(15; 2)$; $y = kx+b$

$\begin{cases} -12k+b=-7 \\ 15k+b=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 27k=9 \\ b=2-15k \end{cases}$ $\begin{cases} k=\dfrac{1}{3} \\ b=-3 \end{cases}$; $y=\dfrac{1}{3}x-3$

x	0	9
y	–3	0

Ответ: $y=\dfrac{1}{3}x-3$; (0; –3); (9; 0).

6.7(2) $A(10; -3)$; $B(-20; 12)$; $y = kx+b$

$\begin{cases} 10k+b=-3 \\ -20k+b=12 \end{cases}$ $\begin{cases} k=-0{,}5 \\ b=2 \end{cases}$

$y = -0{,}5x+2$

x	4	0
y	0	2

Ответ: $y = -0{,}5x+2$; (4; 0); (0; 2).

6.8(1) $A(12; 3)$; $B(14; 7)$; $y = kx+b$

1) $\begin{cases} 12k+b=3 \\ 14k+b=7 \end{cases}$

$k = 2$; $b = -21$. Уравнение прямой AB: $y = 2x-21$.

2) $C(-5; -28)$; $2(-5)-21 \neq -28$

Ответ: нет.

6.8(2) $M(-8;\ 12)$; $N(-10;\ 18)$; $y = kx+b$

1) $\begin{cases} -8k+b=12 \\ -10k+b=18 \end{cases}$

$k = -3$; $b = -12$; $y = -3x-12$ — уравнение прямой MN.
2) $Q(10;\ -42)$; $-3\cdot10-12 = -42$ верно.
Q лежит на прямой MN. **Ответ:** да.

6.9(1) $A(2;\ 5)$; $B(8;\ 5)$; $C(8;\ 2)$; $y = kx+b$

AB: $\begin{cases} 2k+b=5 \\ 8k+b=5 \end{cases}$ $\begin{cases} k=0, \\ b=5; \end{cases}$ $y=5$

AC: $\begin{cases} 2k+b=5 \\ 8k+b=2 \end{cases}$ $\begin{cases} -6k=3 \\ b=5-2k \end{cases}$ $\begin{cases} k=-\frac{1}{2}, \\ b=6; \end{cases}$ $y=-\frac{1}{2}x+6$.

BC: $\begin{cases} 8k+b=5; \\ 8k+b=2. \end{cases}$ $x=8$

Ответ: AB: $y = 5$; AC: $y=-\frac{1}{2}x+6$; BC: $x = 8$.

6.9(2) $M(-1;\ 4)$; $N(5;\ 4)$; $P(-1;\ -8)$

MN: $\begin{cases} -k+b=4 \\ 5k+b=4 \end{cases}$ $\begin{cases} k=0 \\ b=4 \end{cases}$ $y=4$ MP: $\begin{cases} -k+b=4 \\ -k+b=-8 \end{cases}$ $x=-1$

NP: $\begin{cases} 5k+b=4 \\ -k+b=-8 \end{cases}$ $\begin{cases} k=2 \\ b=-6 \end{cases}$ $y=2x-6$

Ответ: MN: $y = 4$; MP: $x = -1$; NP: $y = 2x-6$.

6.10(1) $y = 2x^2+bx+18$;
1) $D = b^2-144 = 0$; $b_1 = -12$; $b_2 = 12$
2) $y = 2x^2 + 12x + 18$ $(b = 12)$; $y = 2(x^2 + 6x + 9)$;
$y=2(x+3)^2$; $y=0$ при $x=-3$
3) $y = 2x^2 - 12x + 18$ $(b = -12)$; $y = 2(x^2 - 6x + 9)$;
$y=2(x-3)^2$; $y=0$ при $x=3$.
Ответ: $(-3;\ 0)$; $(3;\ 0)$.

6.10(2) 1) $y = -3x^2+bx-3$; $D = b^2-36 = 0$; $b_1 = -6$; $b_2 = 6$
2) $y = -3x^2-6x-3$; $y = -3(x^2+2x+1)$; $y = -3(x+1)^2$; $y = 0$; $x = -1$ $(b = -6)$
4) $y = -3x^2+6x-3$; $y = -3(x^2-2x+1)$; $y = -3(x-1)^2$; $y = 0$; $x = 1$ $(b = 6)$.
Ответ: $(1;\ 0)$; $(-1;\ 0)$.

6.11(1) $y = ax^2+bx+c$; $B(-1; 1/4)$; $x_0 = 0$; $y_0 = 0$;

1) $x_0=-\frac{b}{2a}$; $b = 0$; $f(0) = c$; $c = 0$; $a-b+c=\frac{1}{4}$; $a=\frac{1}{4}$.

2) $y=\frac{1}{4}x^2$; $\frac{x^2}{4}=9$; $x^2=36$; $x_1=6$; $x_2=-6$.

Ответ: $y=\frac{1}{4}x^2$; (6; 9); (–6; 9).

6.11(2) $y=ax^2+bx+c$; $a\neq 0$; $A\left(1;-\frac{1}{3}\right)$; $B(0; 0)$.

1) $x_0=-\frac{b}{2a}$; $-\frac{b}{2a}=0$; $b = 0$; $f(x_0) = f(0) = c$; $c = 0$; $a+b+c=-\frac{1}{3}$; $a=-\frac{1}{3}$

2) $y=-\frac{1}{3}x^2$; $-\frac{1}{3}x^2=-27$; $x^2=81$; $x_1=-9$; $x_2=9$.

Ответ: $y=-\frac{1}{3}x^2$; (–9; –27); (9; –27).

6.12(1) $y=2x^2+c$. Точка $(-\sqrt{3}; 0)$ принадлежит параболе;
$6+c=0$; $c=-6$; $y=2x^2-6$; $2x^2-6=-10$; $2x^2=-4$ (I).
Уравнение (I) не имеет решений.
Ответ: $c=-6$; не пересекает.

6.12(2) $y=-3x^2+c$.
Точка $(\sqrt{2}; 0)$ принадлежит параболе; $-6+c=0$; $c=6$;

$y=-3x^2+6$; $-3x^2+6=10$; $-3x^2=4$; $x^2=-\frac{4}{3}$ (I).

Уравнение (I) не имеет корней.
Ответ: $c=6$; не пересекает.

6.13(1) $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$).
Вершина в точке $A(0; -3)$; $B(6; 15)$.

1) $c=-3$, т.к. парабола проходит через точку A; $36a+6b-3=15$, т.к. парабола проходит через точку B; $36a+6b=18$; $6a+b=3$;

$x_0=-\frac{b}{a}$; $b=0$, следовательно $a=\frac{1}{2}$.

2) $y=\frac{1}{2}x^2-3$ — уравнение параболы.

3) $y=0$; $\frac{1}{2}x^2-3=0$; $x^2=6$; $x_1=-\sqrt{6}$; $x_2=\sqrt{6}$.

Ответ: $(-\sqrt{6}; 0)$; $(\sqrt{6}; 0)$.

6.13(2) $C(0; 5)$ — вершина параболы; парабола проходит через $B(4; -3)$.

1) $y = ax^2+bx+c$; $c = 5$, т.к. парабола проходит через точку $(0; 5)$. Далее $16a+4b+5 = -3$ (т. B принадлежит параболе);

$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $x_0 = 0$; $b = 0$; $16a = -8$; $a = -\dfrac{1}{2}$.

2) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 5$ — уравнение параболы.

$y = 0$; $x^2 = 10$; $x_1 = -\sqrt{10}$; $x_2 = \sqrt{10}$.

Ответ: $(-\sqrt{10}; 0)$; $(\sqrt{10}; 0)$.

6.14(1) $y = ax^2-2x-3$

1) $D>0$; $a<0$; $D = 4+12a$; $4+12a>0$; $12a>-4$; $a > -\dfrac{1}{3}$;

2) $-\dfrac{1}{3} < a < 0$. **Ответ:** $-\dfrac{1}{3} < a < 0$.

6.14(2) $y = ax^2-3x+1$

1) $D>0$; $a>0$; $D = 9-4a$; $9-4a>0$; $-4a>-9$; $a<2{,}25$.

2) $0<a<2{,}25$. **Ответ:** $0<a<2{,}25$.

6.15(1) $y = -x^2+px+q$.

Парабола проходит через точки $(-2; 0)$ и $(0; 8)$:

1) $\begin{cases} -4-2p+q=0, \\ q=0; \end{cases}$ $\begin{cases} -4-2p+8=0, \\ q=8; \end{cases}$ $\begin{cases} p=2, \\ q=8. \end{cases}$

2) $y = -x^2+2x+8$; $y = 0$; $x^2-2x-8 = 0$; $x_1 = 4$; $x_2 = -2$.

Ответ: $(4; 0)$.

6.15(2) $y = x^2+px+q$.

Парабола проходит через точки $(-1; 0)$ и $(0; -5)$:

1) $\begin{cases} 1-p+q=0, \\ q=-5; \end{cases}$ $\begin{cases} 1-p-5=0, \\ q=-5; \end{cases}$ $\begin{cases} p=-4, \\ q=-5. \end{cases}$

2) $y = x^2-4x-5$; $y = 0$; $x^2-4x-5 = 0$; $x_1 = 5$; $x_2 = -1$.

Ответ: $(5; 0)$.

6.16(1) $x^2 + x - 1 = kx - 2$; $\quad x^2 + x(1 - k) + 1 = 0$

Чтобы парабола и прямая не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы у этого уравнения не было корней.

$D = (1-k)^2 - 4 < 0$ (условие отсутствия корней)

$(1-k)^2 < 4$

$-2 < 1 - k < 2$

$-1 < k < 3$ **Ответ:** $k \in (-1; 3)$.

6.16(2) $x^2 + 2x - 3 = kx - 7$

$x^2 + x(2 - k) + 4 = 0$

Чтобы прямая пересекала параболу в двух точках, необходимо и достаточно, чтобы у этого уравнения было 2 корня.

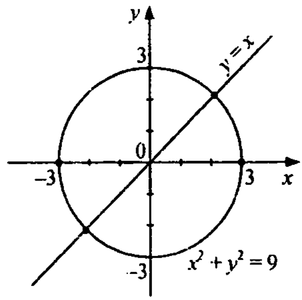
$D = (2 - k)^2 - 16 > 0$ (условие существования двух различных корней).

$4 - 4k + k^2 - 16 > 0$; $k^2 - 4k - 12 > 0$; $(k - 6)(k + 2) > 0$

$k \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$

Ответ: $k \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

6.17(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$



$x^2 + x^2 = 9$

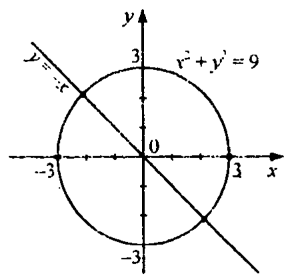
$2x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{2}$

$x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$; $y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

6.17(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = -x \end{cases}$



$x^2 + x^2 = 9$

$x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$; $y = \mp\frac{3}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

6.18(1) Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Точка $A(-1; 3)$ лежит на окружности, поэтому $(-1)^2 + 3^2 = R^2$.

$R^2 = 10$; $R = \sqrt{10}$. Итак, уравнение окружности: $x^2 + y^2 = 10$

$\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2 = 2 + 8 = 10 \Rightarrow$ окружность проходит через точку B.

Ответ: проходит.

6.18(2) Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2+y^2=R^2$

Точка $A\left(3;\sqrt{7}\right)$ лежит на окружности, поэтому $3^2+\left(\sqrt{7}\right)^2=R^2$.

$R^2=16$; $R=4$

Итак, уравнение окружности: $x^2+y^2=16$

$(-2{,}5)^2+3^2=6{,}25+9\neq 16$, поэтому окружность не проходит через точку B. **Ответ:** не проходит.

6 баллов

6.19(1) $y=kx+b$ уравнение прямой, $y=\dfrac{3}{x}$ — гипербола.

1) $y=kx+3$ (прямая проходит через точку $(0;\ 3)$); $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки касания.

$$\begin{cases} y_0=kx_0+3, \\ y_0=\dfrac{3}{x_0}; \end{cases} \qquad \frac{3}{x_0}=kx_0+3;\ kx_0^2+3x_0-3=0\ \ (I)$$

2) Уравнение (I) имеет единственное решение, если:

$D=9+12k=0;\ k=-\dfrac{3}{4}$.

3) Уравнение прямой: $y=-\dfrac{3}{4}x+3$; $y=0$; $\dfrac{3}{4}x=3$; $x=4$.

Ответ: (4; 0).

6.19(2) $y=kx+b$ уравнение прямой.

1) $y=kx-1$ (точка $(0;\ -1)$ принадлежит прямой); $(x_0 y_0)$ — точка касания.
$$\begin{cases} y_0=kx_0-1, \\ y_0=\dfrac{1}{x_0}; \end{cases} \qquad \frac{1}{x_0}=kx_0-1;\ kx_0^2-x_0-1=0\ \ (I)$$

Уравнение (I) имеет единственное решение, если:

$D=1+4k=0;\ k=-\dfrac{1}{4}$.

2) Уравнение прямой: $y=-\dfrac{1}{4}x-1$; $y=0$; $-\dfrac{1}{4}x-1=0$; $x=-4$

Ответ: (–4; 0).

6.20(1) $\begin{cases} 3x+2y=c \\ y=\dfrac{6}{x} \end{cases}$: $x\neq 0; x>0; y>0$. $3x+\dfrac{12}{x}=c$;

$3x^2-cx+12=0$ (I)

Уравнение (I) имеет единственное решение, если $D = c^2 - 144 = 0$;

$c^2 = 144$; $c_1 = -12$; $c_2 = 12$; $3x + \frac{12}{x} = 12$; $3x^2 - 12x + 12 = 0$;

$x^2 - 4x + 4 = 0$; $(x-2)^2 = 0$; $x = 2$; $y = 3$.

(2; 3) — точка касания; $2 > 0$; $3 > 0$. **Ответ:** (2; 3).

6.20(2) $\begin{cases} 2x - 3y = c \\ y = -\frac{6}{x} \end{cases}$; $x \neq 0$; $x < 0$. $2x + \frac{18}{x} = c$; $2x^2 - cx + 18 = 0$ (I).

Уравнение (I) имеет единственное решение, если $c^2 - 144 = 0$; $c_1 = -12$; $c_2 = 12$.

$2x + \frac{18}{x} = -12$; $2x^2 + 12x + 18 = 0$; $x^2 + 6x + 9 = 0$, $(x+3)^2 = 0$, $x = -3$;

$y = 2$; (–3; 2) — точка касания; $-3 < 0$. **Ответ:** (–3; 2).

6.21(1) По условию $x_0 < 0$; $y_0 > 0$, где $(x_0; y_0)$ — точка касания. Уравнение прямой $y = kx - 2$; $\begin{cases} y_0 = x_0^2 - 3x_0 + 2 \\ y_0 = kx_0 - 2 \end{cases}$;

$kx_0 - 2 = x_0^2 - 3x_0 + 2$, $x_0^2 - 3x_0 - kx_0 + 4 = 0$; $x_0^2 - x_0(3+k) + 4 = 0$ (I)

Уравнение (I) имеет единственное решение, если $(3+k)^2 - 16 = 0$; $3 + k = 4$ или $3 + k = -4$; $k_1 = 1$; $k_2 = -7$.

Условию удовлетворяет $k_2 = -7$. Уравнение прямой $y = -7x - 2$.

$\begin{cases} y = -7x - 2 \\ y = x^2 - 3x + 2; \end{cases}$ $x < 0$; $x^2 - 3x + 2 = -7x - 2$; $x^2 + 4x + 4 = 0$; $(x+2)^2 = 0$

$x_0 = -2$; $y_0 = 12$. **Ответ:** (–2; 12).

6.21(2) $y = kx + 2$ — уравнение прямой. $(x_0; y_0)$ — точка касания; по условию $x_0 > 0$; $y_0 > 0$; $\begin{cases} y_0 = x_0^2 + x_0 + 3 \\ y_0 = kx_0 + 2 \end{cases}$

$kx_0 + 2 = x_0^2 + x_0 + 3$; $x_0^2 + x_0 - kx_0 + 1 = 0$; $x_0^2 + x_0(1-k) + 1 = 0$ (I)

Уравнение (I) имеет единственное решение, если $(1-k)^2 - 4 = 0$; $1 - k = 2$; $k_1 = -1$; $1 - k = -2$; $k_2 = 3$.

1) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = x^2 + x + 3; \end{cases}$ $3x + 2 = x^2 + x + 3$; $x^2 - 2x + 1 = 0$; $(x-1)^2 = 0$; $x = 1$; $y = 5$.

2) $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x^2 + x + 3; \end{cases}$ $x^2 + x + 3 = -x + 2$; $x^2 + 2x + 1 = 0$; $x = -1 < 0$.

Ответ: (1; 5).

6.22(1) 1) $y = 6x+b$ (уравнение касательной к параболе).

2) $\begin{cases} y = 6x + b \\ y = x^2 \end{cases}$

3) $6x+b = x^2$; $x^2-6x-b = 0$ (I). Уравнение (I) имеет единственное решение, если $D = 36+4b = 0$; $b = -9$. Уравнение касательной: $y = 6x-9$.

3) $\begin{cases} y = 6x - 9 \\ y = x^2 \end{cases}$. а) $x^2 = 6x-9$; $x^2-6x+9 = 0$ $(x-3)^2 = 0$; 4) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$

Ответ: (3; 9).

6.22(2) 1) $y = -4x+b$ (уравнение касательной).

2) $\begin{cases} y = -4x + b \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$; а) $x^2+1 = -4x+b$; $x^2+4x+1-b = 0$ (I).

Уравнение (I) имеет единственное решение, если $D = 0$.
$16-4+4b = 0$; $b = -3$; $y = -4x-3$ (уравнение касательной)

3) $\begin{cases} y = -4x - 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$; а) $x^2+1 = -4x-3$; $x^2+4x+4 = 0$; $(x+2)^2 = 0$;

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$ **Ответ:** (-2; 5).

6.23(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = c \end{cases}$ $\begin{cases} x = c - y \\ (c - y)^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

1) $c^2-2cy+2y^2-8 = 0$; $2y^2-2cy+c^2-8 = 0$ (I)

Уравнение (I) имеет 2 различных корня, если $D = 4c^2-8(c^2-8)>0$; $c^2-2(c^2-8)>0$; $c^2-2c^2+16>0$; $c^2<16$; $-4<c<4$. **Ответ:** $-4<c<4$.

6.23(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x - y = c \end{cases}$ $\begin{cases} x = c + y \\ (c + y)^2 + y^2 = 18 \end{cases}$

1) $c^2+2cy+2y^2-18 = 0$; $2y^2+2cy+c^2-18 = 0$ (I)

2) Уравнение (I) не имеет решений, если $D = 4c^2-8(c^2-18)<0$; $c^2-2(c^2-18)<0$; $-c^2<-36$; $c^2>36$; $c<-6$; $c>6$. **Ответ:** $c<-6$; $c>6$.

6.24(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2x + b \end{cases}$; $x^2 + (2x + b)^2 = 5$

$x^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 - 5 = 0$; $5x^2 + 4bx + (b^2 - 5) = 0$

$D = 16b^2 - 20(b^2 - 5) = 100 - 4b^2 = 0$; $b^2 = 25$; $b = \pm 5$

Если $b = 5$, то $x = -\dfrac{4b}{2 \cdot 5} = -2$

$b = -5$, то $x = -\dfrac{4b}{2 \cdot 5} = 2$; $y = 2 \cdot 2 - 5 = -1$. **Ответ:** (2; –1).

6.24(2) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ y=3x+b \end{cases}$; $x^2+(3x+b)^2=10$;

$x^2+9x^2+6bx+b^2=10$; $10x^2+6bx+b^2-10=0$

$D=36b^2-4\cdot 10(b^2-10)=400-4b^2=0$

$b^2=100$; $b=\pm 10$

Если $b=10$, то $x=\dfrac{-6b}{2\cdot 10}=-3$; $y=3\cdot(-3)+10=1$

$b=-10$, то $x=\dfrac{-6b}{2\cdot 10}=3$ **Ответ:** (–3; 1).

6.25(1) $\begin{cases} 4=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ -1=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ -4=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \end{cases}$ $\begin{cases} c=4 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+2b+c=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=-5 \\ 4a+2b=-8 \end{cases}$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=4 \end{cases}$; $y=x^2-6x+4$; $x_в=\dfrac{-b}{2a}=3$; $y_в=3^2-6\cdot 3+4=-5$

Ответ: (3; –5).

6.25(2) $\begin{cases} -5=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ 10=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \\ -2=a\cdot(-3)^2+b\cdot(-3)+c \end{cases}$ $\begin{cases} c=-5 \\ 9a+3b+c=10 \\ 9a-3b+c=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} 9a+3b=15 \\ 9a-3b=3 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-5 \end{cases}$ $y=x^2+2x-5$

$x_в=\dfrac{-b}{2a}=-\dfrac{2}{2}=-1$; $y_в=1^2+2\cdot 1-5=-2$. **Ответ:** (–1; –2).

6.26(1) $y=ax^2+bx+c$; $x_в=-\dfrac{b}{2a}=2$

$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=2 \\ 2=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \\ -4=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c \end{cases}$ $\begin{cases} b=-4a \\ c=2 \\ 4a-2b+2=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$

Ответ: $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+2$.

6.26(2) $y = ax^2 + bx + c;\ x_в = -\dfrac{b}{2a} = -2$

$$\begin{cases} -1 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 7 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -1 \\ 16a + 4b + c = 7 \\ b = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} c = -1 \\ b = 2a \\ 16a + 4b = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = -1 \end{cases}$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x - 1$.

6.27(1) $y = a(x-x_0)^2+y_0$; $a > 0$. $y = a(x+1)^2-8 = ax^2 + 2ax + a - 8$;
$y = 0$; $x^2+2x+\dfrac{a-8}{a} = 0$. $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{a-8}{a}} = -1 \pm \sqrt{\dfrac{8}{a}}$.

Подставляя в это выражение различные $a > 0$, будем получать различные пары координат точек пересечения параболы вида $y = a(x+1)^2-8$ с осью OX. Для однозначного ответа в условии задачи недостаточно данных. В сборнике приведена парабола $y = 2(x+1)^2 - 8$; $a = 2$; $x_1 = -3$; $x_2 = 1$ (см. ответ в сборнике).

6.27(2) $y = a(x-3)^2+4$; $a < 0$.

$(x-3)^2 + \dfrac{4}{a} = 0$; $x^2 - 6x + 9 + \dfrac{4}{a} = 0$: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 9 - \dfrac{4}{a}}$;

$x_{1,2} = 3 \pm \dfrac{2}{\sqrt{-a}}$ ($a < 0$ по условию). Подставляя в это выражение различные $a < 0$, будем получать различные пары координат точек перессечения параболы вида $y = a(x-3)^2+4$ с осью OX. Для однозначного ответа в условии задачи не достаточно данных. В сборнике приведена парабола $y = -(x-3)^2+4$; $a = -1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ (см. ответ в сборнике). **Ответ:** (1; 0); (5; 0).

6.28(1) Найдем уравнение параболы, изображенной на рисунке $y = ax^2 + bx + c$

$y(0) = c = 10$; $x_в = -\dfrac{b}{2a} = 6 \Rightarrow b = -12a$

$y(6) = -8$: $-8 = 36a + 6b + 10$; $36a - 72a = -18$; $-36a = -18$

$a = \dfrac{1}{2}$; $b = -6$

$y = \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 10 = \dfrac{1}{2}(x-6)^2 - 8$

Тогда уравнение параболы, симметричной данной относительно оси ординат, имеет вид

$$y=\frac{1}{2}(x+6)^2-8=\frac{1}{2}x^2+6x+10 \qquad \textbf{Ответ: } y=\frac{1}{2}x^2+6x+10.$$

6.28(2) Найдем уравнение параболы, изображенной на рисунке.

$y=ax^2+bx+c;\ y(0)=c=16;\ x_в=-\dfrac{b}{2a}=-1\Rightarrow b=2a$

$y(-1)=18$: $18=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+16$

$a-b=2;\ a-2a=2;\ -a=2;\ a=-2;\qquad b=-4$

$y=-2x^2-4x+16=-2(x+1)^2+18$

Тогда уравнение параболы, симметричной данной относительно оси ординат, имеет вид $y=-2(x-1)^2+18=-2x^2+4x+18$

Ответ: $y=-2x^2+4x+18$.

6.29(1) $y=-x^2+(n-1)x+n$; $y<1$, если координата вершины $y_0<1$ (ветви параболы направлены вниз); $x_0=\dfrac{1-n}{-2}=\dfrac{n-1}{2}$;

$$y_0=-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+(n-1)\frac{n-1}{2}+n=$$

$$=\frac{-n^2+2n-1+2n^2-4n+2+4n}{4}=\frac{n^2+2n+1}{4}=\frac{(n+1)^2}{4}<1.$$

$(n+1)^2<4;\ -2<n+1<2;\ -3<n<1.$ **Ответ:** $-3<n<1$.

6.29(2) $x^2+(m+1)x+m>-4;\ x^2+(m+1)x+m+4>0;\ D<0;$

$(m+1)^2-4m-16<0;\ m^2-2m-15<0;\ m_1=5;\ m_2=-3.\ -3<m<5$

Ответ: $-3<m<5$.

6.30(1) $y=x^2-2px+p+2$

$$x_в=-\frac{-2p}{2}=p\ ;\ y_в=p^2-2p^2+p+2=-p^2+p+2$$

II четверть: $\begin{cases}x_в<0\\y_в>0\end{cases}$ $\begin{cases}p<0\\-p^2-p-2<0\end{cases}$ $\begin{cases}p<0\\p\in(-1;2)\end{cases}$ $p\in(-1;0)$

Ответ: $p\in(-1;0)$.

6.30(2) $y=x^2+2px-2p+3$

$$x_в=-\frac{2p}{2}=-1\ ;\ y_в=p^2-2p^2-2p+3=-p^2-2p+3$$

IV четверть: $\begin{cases}x_в>0\\y_в<0\end{cases}$ $\begin{cases}-p>0\\-p^2-2p+3<0\end{cases}$ $\begin{cases}p<0\\p^2+2p-3>0\end{cases}$

$\begin{cases} p < 0 \\ p \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \end{cases}$ **Ответ:** $p \in (-\infty; -3)$.

6.31(1) $y = (x - m)^2 - 9 = 0$

$(x - m)^2 = 9$; $x - m = \pm 3$; $x = m \pm 3$; $\begin{cases} m - 3 < 0 \\ m + 3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m < 3 \\ m > -3 \end{cases}$

Ответ: $m \in (-3; 3)$.

6.31(2) $y = (x - m)^2 - 1 = 0$; $(x - m)^2 = 1$; $x - m = \pm 1$; $x = m \pm 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m + 1 > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 1 < 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ **Ответ:** $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

6.32(1) 1) График функции $y = x^2-2px-1$ — парабола; ветви вверх. $D = 4p^2+4>0$ при любых значениях p. Следовательно, парабола пересекает ось OX в 2-х точках; вершина параболы находится ниже оси OX.

2) График функции $y = -x^2+4px+p$ парабола; ветви которой направлены вниз. Координаты вершины параболы:

$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = 2p \\ y_0 = -4p^2 + 8p^2 + p \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = 4p^2 + p, \\ x_0 = 2p; \end{cases}$ по условию

$y_0 = 4p^2 + p > 0$ (вершина 1-й параболы ниже оси OX; $p(4p + 1) > 0$. $p < -\dfrac{1}{4}$; $p > 0$. **Ответ:** $p < -\dfrac{1}{4}$; $p > 0$.

6.32(2) 1) $y = x^2-4mx-2$.

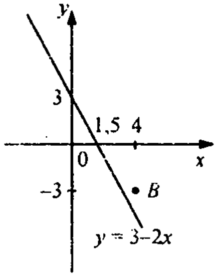
График функции — парабола, ветви вверх. $D = 16m^2+8>0$ при любых значениях m. Следовательно, парабола пересекает ось OX в 2-х точках; вершина параболы ниже оси OX.

2) График функции $y = -x^2-6mx+m$ парабола, ветви вниз;

$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; $x_0 = \dfrac{6m}{-2} = -3m$;

$y_0 = f(x_0) = f(-3m)$; $y_0 = -9m^2+18m^2+m = 9m^2+m$. Условие задачи выполняется, если $9m^2 + m < 0$; $m(9m + 1) < 0$; $m_1 = 0$; $m_2 = -\dfrac{1}{9}$.

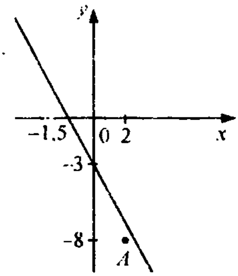
Ответ: $-\dfrac{1}{9} < m < 0$.



6.33(1) Точки $A(4; a)$ и $B(4; -3)$ расположены в разных полуплоскостях относительно прямой $y = 3-2x$.

x	0	4
y	3	–5

Точка $(4; -5)$ расположена на прямой $y = 3-2x$, следовательно $B\ (4; -3)$ расположена выше прямой $y = 3-2x$, поэтому $A\ (4; a)$ должна быть расположена ниже прямой и, следовательно, $a<-5$. **Ответ:** при $a<-5$.



6.33(2) Точки $A(2; -8)$ и $B(2; a)$ расположены в разных полуплоскостях относительно прямой $y = -2x-3$.

x	0	2
y	–3	–7

Точка $(2; -7)$ лежит на прямой $y = -2x-3$; точка $A\ (2; -8)$ расположена ниже прямой $y = -2x-3$; условие задачи выполнено, если $a > -7$. **Ответ:** при $a > -7$.

6.34(1) $\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = a-5x \end{cases}$

1) $2x+1 = a-5x$; $7x = a-1$; $x = \dfrac{a-1}{7}$; $x > 0$; $a-1>0$; $a>1$.

2) $y = a - \dfrac{5(a-1)}{7}$; $y = \dfrac{2a+5}{7}$; $y>0$; $2a+5>0$; $a>-2{,}5$.

3) $\begin{cases} a>1 \\ a>-2{,}5 \end{cases}$ **Ответ:** $a > 1$.

6.34(2) $\begin{cases} y = 2-3x \\ y = a+2x \end{cases}$

1) $2-3x = a+2x$; $5x = 2-a$; $x = \dfrac{2-a}{5}$; $x<0$; $2-a<0$; $a>2$.

2) $y = a + \dfrac{2(2-a)}{5}$; $y = \dfrac{3a+4}{5}$; $y>0$; $3a+4>0$; $a > -\dfrac{4}{3}$

3) $\begin{cases} a>2 \\ a>-\dfrac{4}{3} \end{cases}$ **Ответ:** $a > 2$.

6.35(1) $\begin{cases} x-y=b \\ 0{,}2y-x=3 \end{cases}$; $\quad y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=b \\ -x=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=b \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow b=-3$

Ответ: $b=-3$.

6.35(2) $\begin{cases} x+y=a \\ x-0{,}3y=5 \end{cases}$; $\quad y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow a=5$

Ответ: $a=5$.

6.36(1) $A(-3;\ 15)$; $B(9;\ -5)$; $C(24;\ m)$. $\begin{cases} -3k+b=15 \\ 9k+b=-5 \end{cases}\Bigg|\,3$

$\begin{cases} -9k+3b=45 \\ 9k+b=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} b=10 \\ k=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$. Уравнение прямой AB: $y=-\dfrac{5}{3}x+10$.

Точка C принадлежит прямой AB. $m=-\dfrac{5}{3}\cdot 24+10=-30$

Ответ: $m=-30$.

6.36(2) $A(a;\ -36)$; $B(12;\ -4)$; $C(-3;\ -14)$

1) $y=kx+b$: $\begin{cases} 12k+b=-4 \\ -3k+b=-14 \end{cases}\Bigg|\,4$ $\begin{cases} 12k+b=-4 \\ -12k+4b=-56 \end{cases}$

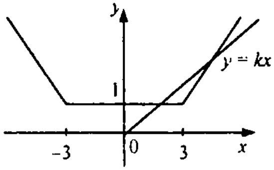
Уравнение прямой BC: $\begin{cases} b=-12, \\ k=\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\quad y=\dfrac{2}{3}x-12$.

Точка A принадлежит прямой BC.

$\dfrac{2}{3}a-12=-36$; $\dfrac{2}{3}a=-24$; $a=-36$ **Ответ:** $a=-36$.

6.37(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+2, \text{ если } x<3 \\ -2x+10, \text{ если } x\geq 3 \end{cases}$

6.37(2) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{2}x-3, \text{ если } x<2 \\ 3x-12, \text{ если } x\geq 2 \end{cases}$



6.38(1) $y=\begin{cases} 1, \text{ если } |x|<3 \\ -2x-5, \text{ если } x\leq -3 \\ 2x-5, \text{ если } x\geq 3 \end{cases}$

1) $y = -2x-5,\ x \le -3$

x	-4	-5
y	3	5

2) $y = 2x-5,\ x \ge 3$

x	4	5
y	3	5

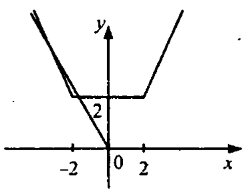
$y > 0$; $k > 0$; $y = kx$; $kx > 0$, $x > 0$; пересечение в 1-й четверти.

1) $0 < x < 3$ тогда $\begin{cases} y = 1 \\ y = kx \end{cases}$; $kx = 1$; $k = \frac{1}{x}$; $k > \frac{1}{3}$.

2) $x \ge 3$ тогда $\begin{cases} y = kx, \\ y = 2x - 5; \end{cases}$ $kx = 2x-5$; $kx-2x = -5$; $x(k-2) = -5$ (I);

$x = -\frac{5}{k-2}$; $x = \frac{5}{2-k} \ge 3$; $2-k>0$, т.к. $x > 0$, следовательно, $0 < 2-k \le \frac{5}{3}$; $\frac{1}{3} < k < 2$. (При $\frac{5}{2-k} = 3$, $2-k = \frac{5}{3}$ получим $k = \frac{1}{3}$ и только одну точку пересечения (3; 1).

Ответ: $\frac{1}{3} < k < 2$.



6.38(2) $y = \begin{cases} 2, \text{ если } |x| \le 2 \\ -3x-4, \text{ если } x < -2 \\ 3x-4, \text{ если } x > 2 \end{cases}$

$y = -3x-4$

x	-3	-4
y	5	8

$y = 3x-4$

x	3	4
y	5	8

$y > 0$; $k < 0$; $kx > 0$; $x < 0$; пересечение во 2-й четверти.

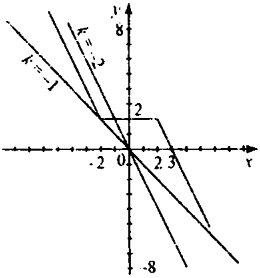
1) $-2 \le x < 0$; тогда $\begin{cases} y = 2 \\ y = kx \end{cases}$; $kx = 2$; $k = \frac{2}{x}$; $k \le -1$.

2) $x < -2$, тогда $\begin{cases} y = kx, \\ y = -3x - 4; \end{cases}$ $kx = -3x - 4$; $x(k+3) = -4$;

$x = -\frac{4}{k+3}$; $\frac{-4}{k+3} < 0$; $k+3>0$; $k>-3$. (Заметим, что при $k = -1$ будет только одна точка пересечения $(-2; 2)$).

Ответ: $-3 < k < -1$.

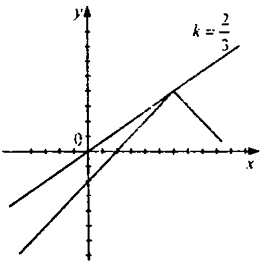
6.39(1) — См. решение в сборнике, стр. 219.



6.39(2)

$$y=\begin{cases}2, \text{ если } |x|\le 2\\ -2x+6, \text{ если } x>2\\ -2x-2, \text{ если } x<-2\end{cases}$$

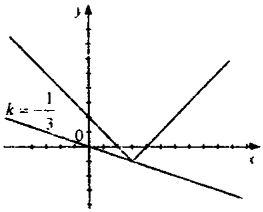
Ответ: $-2<k<-1$.



6.40(1)

$$y=\begin{cases}x-2, \text{ если } x<6\\ 10-x, \text{ если } x\ge 6\end{cases}$$

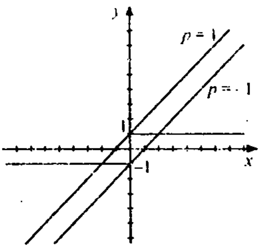
Ответ: $0<k<\dfrac{2}{3}$.



6.40(2)

$$y=\begin{cases}x-4, \text{ если } x\ge 3\\ 2-x, \text{ если } x<3\end{cases}$$

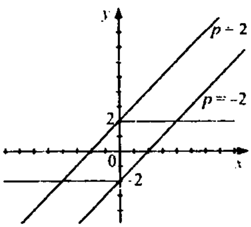
Ответ: $-\dfrac{1}{3}<k<0$.



6.41(1)

$$y=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0\\ \text{не определена, если } x=0\\ 1, \text{ если } x>0\end{cases}$$

Ответ: $-1<p<1$.

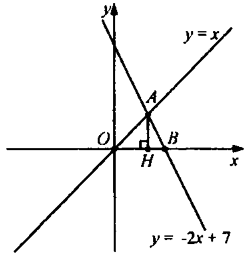


6.41(2)

$$y=\frac{2|x|}{x}=\begin{cases}-2, \text{ если } x<0\\ \text{не определена, если } x=0\\ 2, \text{ если } x>0\end{cases}$$

Ответ: $-2<p<2$.

6.42(1) $x = -2x + 7$; $3x = 7$; $x = \frac{7}{3}$



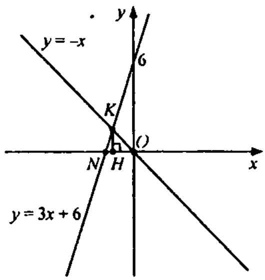
Координаты точки $A\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

$-2x + 7 = 0$; $2x = 7$; $x = \frac{7}{2}$

Координаты точки $B\left(\frac{7}{2}; 0\right)$.

$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} AH \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}$. **Ответ:** $4\frac{1}{12}$.

6.42(2). $-x = 3x + 6$; $-4x = 6$; $x = -1{,}5$;



Координаты точки $K(-1{,}5;\ 1{,}5)$.

$3x + 6 = 0$;

$3x = -6$;

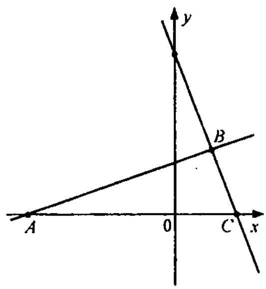
$x = -2$;

Координаты точки $N(-2;\ 0)$.

$S_{\Delta KNO} = \frac{1}{2} KH \cdot NO = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 1{,}5$

Ответ: 1,5.

6.43(1). $-2{,}5x + 12{,}5 = \frac{1}{3}x + 4$;



$\frac{1}{3}x + 2{,}5x = 8{,}5$; $\frac{17}{6}x = \frac{17}{2}$; $x = 3$;

$y = \frac{1}{3} \cdot 3 + 4 = 5$; $B(3;\ 5)$; $\frac{1}{3}x + 4 = 0$;

$\frac{1}{3}x = -4$; $x = -12$; $A(-12;\ 0)$;

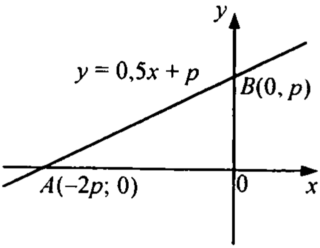
$12{,}5 - 2{,}5x = 0$; $x = 5$; $C(5;\ 0)$; $AC = 5 - (-12) = 17$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 17 = 42{,}5$

6.43(2) $\frac{1}{3}x - 7 = -35x + 10$; $\frac{17}{6}x = 17$;

$x = 6$; $y = \frac{1}{3} \cdot 6 - 7 = -5$; $B(6;\ -5)$;

$A(0;\ -7)$; $C(0;\ 10)$; $AC = 17$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 17 = 51$



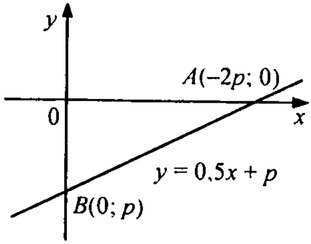
6.44(1) $y = 0{,}5x+p$

x	0	$-2p$
y	p	0

а) $p > 0$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{|AO|\cdot OB}{2} = \frac{2p\cdot p}{2} = p^2;$$

$p^2 = 81;\quad p = 9.\quad (p > 0).$



б) $p < 0$

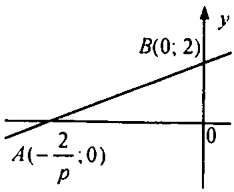
$$S_{\Delta AOB} = \frac{AO\cdot|OB|}{2} =$$

$$= \frac{-2p(-p)}{2} = +p^2 = 81;\quad p = -9.$$

$(p < 0).$

Ответ: при $p = \pm 9$.

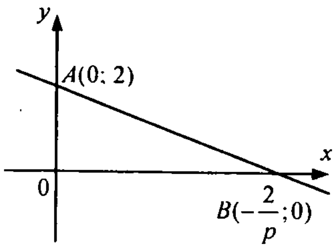
6.44(2) $y = px+2$



x	0	$-\frac{2}{p}$
y	2	0

а) $p > 0$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{\left|-\frac{2}{p}\right|\cdot 2}{2} = \frac{\frac{2}{p}\cdot 2}{2} = \frac{2}{p} = 16;\quad p = \frac{1}{8}.$$

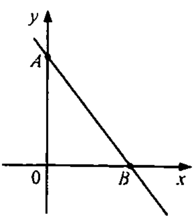


б) $p < 0$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{-\frac{2}{p}\cdot 2}{2} = -\frac{2}{p} = 16;$$

$$-p = \frac{1}{8};\quad p = -\frac{1}{8}.$$

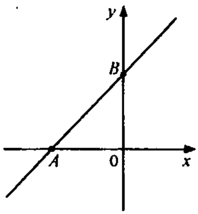
Ответ: при $p = \pm\frac{1}{8}$.



6.45(1) $y = kx + b$; $0 = 3k + b$; $b = -3k$;
Итак, $y = kx - 3k = k(x - 3)$.
$A(0; -3k)$; $B(3; 0)$;

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot(-3k)\cdot 3 = 27;\ 9k = -54;\ k = -6;$$

$y = -6(x - 3) = 18 - 6x$ **Ответ:** $18 - 6x$.



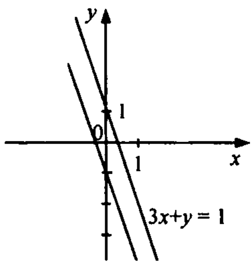
6.45(2) $B(0;3)$

$y = kx + b;\ 3 = k\cdot 0 + b \Rightarrow b = 3;$

$y = kx + 3 = 0;\ kx = -3;\ x = -\frac{3}{k};\ A\left(-\frac{3}{k};0\right)$

$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{k}\right)\cdot 3 = 36;\ \frac{9}{k} = -72;\ k = -\frac{1}{8}$

Ответ: $y = -\frac{1}{8}x + 3$.



6.46(1) $9x^2+6xy+y^2 = 1;\ (3x+y)^2 = 1;$

$3x+y = 1;\ 3x+y = -1.$

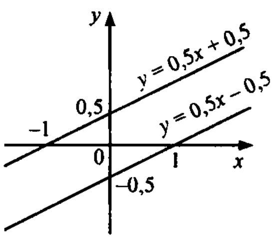
1) $3x+y = 1;\ y = 1-3x$

x	0	1
y	1	-2

2) $3x+y = -1;\ y = -1-3x$

x	0	1
y	-1	-4

Ответ: Графиком уравнения являются две параллельные прямые: $y = 1-3x$ и $y = -1-3x$.



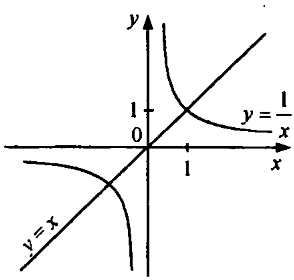
6.46(2) $x^2-4xy+4y^2 = 1;$

$(x-2y)^2 = 1;\ x-2y = 1;\ x-2y = -1.$

1) $x-2y = 1;\ y = \frac{x-1}{2};\ y = 0{,}5x-0{,}5.$

2) $x-2y = -1;\ y = \frac{x+1}{2};\ y = 0{,}5x+0{,}5.$

Ответ: Графиком уравнения являются две параллельные прямые: $y = 0{,}5x-0{,}5$ и $y = 0{,}5x+0{,}5$.



6.47(1) $(y-x)(xy-1) = 0;$

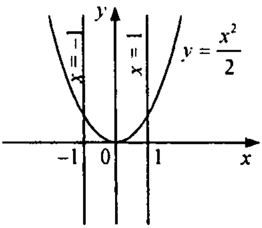
1) $y-x = 0;\ y = x$; график — прямая.

2) $xy-1 = 0;\ y = \frac{1}{x}\ \ (x \neq 0);$

график — гипербола.

x	1	2	$\frac{1}{2}$
y	1	$\frac{1}{2}$	2

Ответ: График — объединение гиперболы $y = \frac{1}{x}$ и прямой $y = x$.



6.47(2) $(x^2-2y)(x^2-1) = 0$

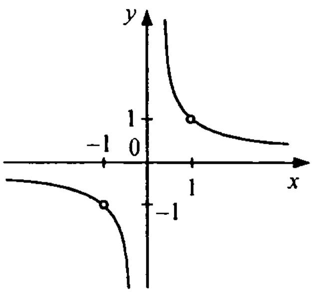
1) $x^2-2y = 0$; $y = \frac{x^2}{2}$

x	0	1	2	3
y	0	$\frac{1}{2}$	2	4,5

График — парабола, ветви которой симметричны относительно прямой OY.

2) $x = 1$; $x = -1$. График — две прямые, параллельные OY.

Ответ: График — объединение параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ и двух вертикальных прямых $x = -1$ и $x = 1$.



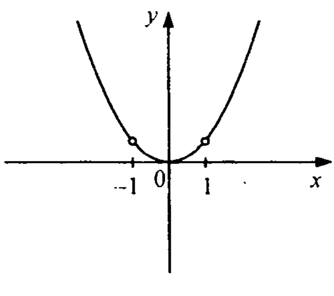
6.48(1). $\frac{xy-1}{y-x} = 0$; $\begin{cases} xy-1=0 \\ y-x \neq 0 \end{cases}$;

$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y \neq x \end{cases}$; $y = \frac{1}{x}$

График — гипербола.

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$

Ответ: Гипербола $y = \frac{1}{x}$ без точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$.



6.48(2) $\frac{x^2-2y}{x^2-1} = 0$;

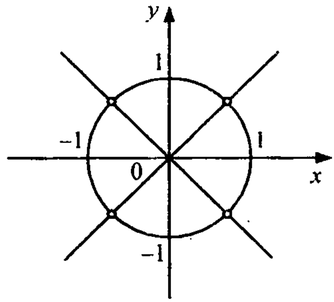
$\begin{cases} x^2-2y=0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$; $y = \frac{x^2}{2}$

График — парабола, ветви вверх.

x	0	2	3
y	0	2	4,5

Ответ: Парабола $y = \frac{1}{2}x^2$ без точек $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

6.49(1) $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2}=0$;



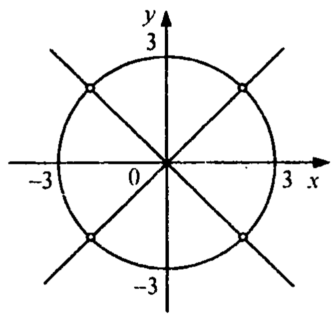
$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-y)(x+y)\neq 0 \end{cases}$

1) График уравнения $x^2+y^2=1$ — окружность с центром в начале координат и радиусом 1.

2) $(x-y)(x+y)\neq 0$; означает, что $y\neq \pm x$, т.е. нужно исключить точки, принадлежащие прямым $y=x$ и $y=-x$ из решения уравнения $x^2+y^2=1$.

Ответ: окружность $x^2+y^2=1$ без 4-х точек, принадлежащих прямым: $y=x$ и $y=-x$.

6.49(2) $\dfrac{x^2+y^2-9}{x^2-y^2}=0$;

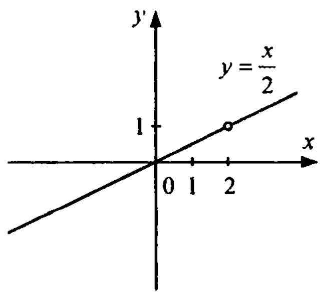


$\begin{cases} x^2+y^2=9; \quad (I) \\ (x-y)(x+y)\neq 0; \end{cases}$

График уравнения (I) — окружность с центром в начале координат и радиусом 3.

Ответ: окружность $x^2+y^2=9$ без 4-х точек, принадлежащих прямым: $y=x$; $y=-x$.

6.50(1) $\dfrac{2y-x}{(x-2)^2+(y-1)^2}=0$;



$\begin{cases} 2y-x=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2\neq 0 \end{cases}$

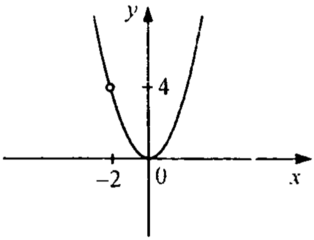
1) $y=\dfrac{x}{2}$

x	0	2
y	0	1

2) $(x-2)^2+(y-1)^2\neq 0$;

$\begin{cases} x-2\neq 0 \\ y-1\neq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\neq 2 \\ y\neq 1 \end{cases}$;

Ответ: Прямая $y=\dfrac{1}{2}x$ без точки (2; 1).



6.50(2) $\dfrac{y-x^2}{(x+2)^2+(y-4)^2}=0$;

$\begin{cases} y=x^2 \\ x\neq -2;\ y\neq 4 \end{cases}$; $y=x^2$

График — парабола.

x	-1	0	1	2	-2
y	1	0	1	4	4

Ответ: Парабола $y=x^2$ без точки $(-2;\ 4)$.

7. Арифметическая и геометрическая прогрессии

2 балла

7.1(1) (a_n) — арифметическая прогрессия; $a_5=8{,}4$; $a_{10}'=14{,}4$

$\begin{cases} a_1+4d=8{,}4 \\ a_1+9d=14{,}4; \end{cases}$ $5d=6$

$a_{15}=a_1+14d$; или $a_{15}=a_{10}+5d=14{,}4+6=20{,}4$

Ответ: 20,4.

7.1(2) (a_n) — арифметическая прогрессия. $a_4=4{,}5$; $a_{12}=-12$

$\begin{cases} a_1+3d=4{,}5 \\ a_1+11d=-12 \end{cases}$, $8d=-16{,}5$; $a_{20}=a_{12}+8d=-12-16{,}5=-28{,}5$.

Ответ: $a_{20}=-28{,}5$.

7.2(1) $\begin{cases} a_1+7d=-3{,}8 \\ a_1+11d=-11 \end{cases}$; $\begin{cases} 4d=-7{,}2 \\ a_1=-3{,}8-7d \end{cases}$;

$\begin{cases} d=-1{,}8 \\ a_1=-3{,}8+12{,}6 \end{cases}$; $\begin{cases} d=-1{,}8 \\ a_1=8{,}8 \end{cases}$

$a_n=a_1+d(n-1)$; $8{,}8-1{,}8(n-1)=-30{,}8$; $1{,}8(n-1)=8{,}8+30{,}8=39{,}6$; $n-1=22$; $n=23$ **Ответ:** является.

7.2(2) $\begin{cases} a_1+5d=10{,}4 \\ a_1+15d=5{,}8 \end{cases}$; $\begin{cases} -10d=4{,}6 \\ a_1=10{,}4-5d \end{cases}$; $\begin{cases} d=-0{,}46 \\ a_1=10{,}4+2{,}3 \end{cases}$;

$\begin{cases} d=-0{,}46 \\ a_1=12{,}7 \end{cases}$; $a_n=12{,}7-0{,}46(n-1)=6{,}2$; $6{,}5=0{,}46(n-1)$;

$a_n=a_1+d(n-1)$; $\dfrac{13}{2}=\dfrac{23}{50}(n-1)$; $n-1=\dfrac{13\cdot 50}{2\cdot 23}=\dfrac{325}{23}$; $n=14\dfrac{3}{23}+1\notin\mathbb{N}$

Ответ: не является.

7.3(1) $a_1 = 3$; $d = 5$; $a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 143$
$5(n-1) = 140$; $n - 1 = 28$; $n = 29$ **Ответ:** 29.

7.3(2) $a_1 = 31$; $d = -3$; $a_n = a_1 + d(n-1) = 31 - 3(n-1) = -80$
$-3(n-1) = -111$; $n - 1 = 37$; $n = 38$ **Ответ:** 38.

7.4(1) $a_1 = 6$; $d = 4$; $a_n > 260$; $a_n = a_1 + d(n-1)$;

$6+4(n-1)>260$; $4(n-1)>254$; $n-1>\frac{254}{4}$; $n>1+63{,}5$; $n>64{,}5$

Ответ: с 65 номера.

7.4(2) $a_1 = 380$; $d = -6$; $a_n<100$; $a_1+d(n-1)<100$; $380-6(n-1)<100$;

$-6(n-1)<-280$; $n-1>\frac{280}{6}$; $n>1+46\frac{2}{3}$; $n>47\frac{2}{3}$

Ответ: начиная с номера 48.

7.5(1) $d = a_2 - a_1 = 82{,}8 - 87{,}4 = -4{,}6$;
$a_n = a_1 + d(n-1) = 87{,}4 - 4{,}6(n-1) > 0$; $4{,}6(n-1) < 87{,}4$;

$n-1<\frac{874}{46}$; $n<1+\frac{437}{23}$; $n<20$ **Ответ:** 19.

7.5(2) $d = a_2 - a_1 = -35{,}1 + 37{,}8 = 2{,}7$;
$a_n = a_1 + d(n-1) = -37{,}8 + 2{,}7(n-1) < 0$;

$(n-1)<\frac{378}{27}$; $n < 1 + 14$; $n < 15$ **Ответ:** 14.

7.6(1) $a_1 = 60$; $a_n = 110$; $d = 1$.

1) $a_n = a_1+d(n-1)$; $60+n-1=110$; $n = 51$

2) $S_{51} = \frac{(60+110)51}{2} = 85\cdot 51 = 4335$ **Ответ:** 4335.

7.6(2) $a_1 = 50$; $a_n = 120$; $d = 1$.
1) $a_n = a_1+d(n-1)$; $120 = 50 + n - 1$; $n = 120-50+1$; $n = 71$

2) $S_{71} = \frac{(50+120)71}{2} = 85\cdot 71 = 6035$ **Ответ:** 6035.

7.7(1) $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$; $a_1 = 1$; $d = 1$; $\frac{2+n-1}{2}\cdot n = 120$;

$(n+1)n-240 = 0$; $n^2+n-240 = 0$; $n = \frac{-1\pm\sqrt{961}}{2} = \frac{-1\pm 31}{2}$

$n_1 = -16$; $n_2 = 15$; n — натуральное число. **Ответ:** 15.

7.7(2) $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$;

$a_1 = 1$; $d = 1$; $\frac{2+n-1}{2}\cdot n = 105$; $(n+1)n = 210$; $n^2+n-210 = 0$;

$n=\frac{-1\pm\sqrt{841}}{2}=\frac{-1\pm 29}{2}$; $n_1=-15$; $n_2=14$;

n — натуральное число. **Ответ:** 14.

7.8(1) $a_1=1$; $d=2$; $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=729$;

$\frac{2+2(n-1)}{2}\cdot n=729$; $n^2=729$; $n=27$. **Ответ:** 27.

7.8(2) $a_1=2$; $d=2$; $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=324$;

$\frac{4+2(n-1)}{2}\cdot n=324$;; $n^2+n-324=0$;

$D=1+4\cdot 324=1297$ В задании ошибка.

7.9(1) $\begin{cases} b_1q^{11}=3^{15}\ (1) \\ b_1q^{13}=3^{17}\ (2) \end{cases}$ разделим почленно (2):(1):

1) $q^2=3^2$; $q^2=9$; $q_1=3$; $q_2=-3$;

2) $b_1=\frac{3^{15}}{q^{11}}$; $\begin{cases} b_1=\frac{3^{15}}{3^{11}}, \\ q=3; \end{cases}$ $b_1=3^4=81$; $\begin{cases} b_1=\frac{3^{15}}{(-3)^{11}} \\ q=-3 \end{cases}$;

$b_1=-3^4$; $b_1=-81$ **Ответ:** $b_1=3^4$ или $b_1=-3^4$.

7.9(2) $b_8=2^{-12}$; $b_{10}=2^{-14}$; $\begin{cases} b_1q^7=2^{-12} \\ b_1q^9=2^{-14} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{b_1q^7}{b_1q^9}=\frac{2^{-12}}{2^{-14}}=2^2 \\ b_1q^7=2^{-12} \end{cases}$;

$\frac{1}{q^2}=2^2$; $q^2=\frac{1}{4}$; $q=-\frac{1}{2}$ или $q=\frac{1}{2}$;

2) $\begin{cases} b_1=2^{-12}:\left(-\frac{1}{2}\right)^7 \\ q=-\frac{1}{2} \end{cases}$ $b_1=2^{-12}:\left(-2^{-7}\right)=-2^{-5}$ или

3) $\begin{cases} b_1=2^{-12}:\left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ q=\frac{1}{2} \end{cases}$ $b_1=2^{-12}:2^{-7}=2^{-5}$

Ответ: $b_1=2^{-5}$ или $b_1=-2^{-5}$.

7.10(1) (b_n) — геометрическая прогрессия; $b_4 = \frac{1}{24}$; $q = \frac{1}{2}$

1) $\begin{cases} b_1q^3 = \frac{1}{24}, \\ q = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24}, \\ q = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{3}, \\ q = \frac{1}{2}; \end{cases}$ $S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$;

$$S_6 = \frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}} = \frac{63\cdot 2}{3\cdot 64} = \frac{63}{3\cdot 32} = \frac{63}{96} = \frac{21}{32}$$

Ответ: $\frac{21}{32}$.

7.10(2) $b_1q^4 = \frac{3}{4}$, $q = -2$; $b_1 = \frac{3}{4} : (-2)^4 = \frac{3}{64}$.

$$S_6 = \frac{\frac{3}{64}\cdot((-2)^6 - 1)}{-3} = \frac{3\cdot 63}{64(-3)} = -\frac{63}{64}.$$

Ответ: $-\frac{63}{64}$.

4 балла

7.11(1) $\begin{cases} a_1 + 4d = -150, \\ a_1 + 5d = -147; \end{cases}$ $d = 3$; $a_1 = -162$; $a_n > 0$; $-162+3(n-1) > 0$;

$-54+n-1>0$; $n-55>0$; $n>55$.

Ответ: $n = 56$.

7.11(2) $\begin{cases} a_1 + 5d = 160, \\ a_1 + 6d = 156; \end{cases}$ $a_1 = 180$; $d = -4$; $a_n<0$; $a_n = a_1+d(n-1)$;

$180-4(n-1)<0$; $45-(n-1)<0$; $45-n+1<0$; $-n<-46$; $n>46$.

Ответ: $n = 47$.

7.12(1) (a_n) — арифметическая прогрессия.

$d = 21{,}4-22{,}7 = -1{,}3$; $a_1 = 22{,}7$; $a_n = a_1+d(n-1)$.

$a_n = 22.7 - 1{,}3(n-1) > 0$: $a_{n+1} = 22{,}7 - 1{,}3n < 0$;

$\begin{cases} 1{,}3(n-1) < 22{,}7, \\ 1{,}3n > 22{,}7; \end{cases}$ $\begin{cases} n-1 < \frac{227}{13} = 17\frac{6}{13}, \\ n > 17\frac{6}{13}; \end{cases}$ $\begin{cases} n < 18\frac{6}{13}, \\ n > 17\frac{6}{13}. \end{cases}$

n — натуральное; $n = 18$. $a_{18} = 22{,}7 + (-1{,}3)\cdot 17 = 0{,}6$.

$a_{19} = 22{,}7 + (-1{,}3)\cdot 18 = 0{,}6 - 1{,}3 = -0{,}7$. К нулю ближе a_{18}.

Ответ: $a_{18} = 0{,}6$.

7.12(2) (a_n) — арифметическая прогрессия;

$a_1 = -15{,}1$. $d = -14{,}4+15{,}1 = 0{,}7$; $a_n = -15{,}1 + 0{,}7(n-1) < 0$;

$a_{n+1} = -15{,}1 + 0{,}7n > 0$.

$$\begin{cases} 0,7(n-1) < 15,1 \\ 0,7n > 15,1 \end{cases} \quad \begin{cases} n-1 < 21\dfrac{4}{7}, \\ n > 21\dfrac{4}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} n < 22\dfrac{4}{7} \\ n > 21\dfrac{4}{7} \end{cases}; \ n = 22;$$

$a_{22} = -15{,}1 + 0{,}7 \cdot 21 = -0{,}4$; $a_{23} = -15{,}1 + 0{,}7 \cdot 22 = 0{,}3$.

К нулю ближе a_{23}. **Ответ:** $a_{23} = 0{,}3$.

7.13(1) $d = -6{,}3+7{,}1 = 0{,}8$; $a_1 = -7{,}1$

$a_n = -7{,}1+0{,}8(n-1)$; $a_n<0$; $0{,}8(n-1)<7{,}1$; $n < \dfrac{71}{8}+1$; $n < 9\dfrac{7}{8}$; $n = 9$;

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n; \ S_9 = \frac{-14,2+0,8\cdot 8}{2}\cdot 9 = (-7,1+3,2)\cdot 9 = -35,1$$

Ответ: $-35{,}1$.

7.13(2) $d = 5{,}8-6{,}3 = -0{,}5$; $a_1 = 6{,}3$; $a_n>0$

$6{,}3 - 0{,}5(n-1) > 0$; $-0{,}5(n-1) > -6{,}3$; $n < \dfrac{63}{5}+1$;

$n < 13{,}6$; $n = 13$;

$$S_{13} = \frac{12,6-0,5\cdot 12}{2}\cdot 13 = (6,3-3)\cdot 13 = 42,9$$

Ответ: 42,9.

7.14(1) $a_6 = 14$; $a_{10} = 20$; $a_{16} = 28$;

1) $\begin{cases} a_1 + 5d = 14 \\ a_1 + 9d = 20 \end{cases}$; $\begin{cases} d = 1,5 \\ a_1 = 6,5 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a_1 + 9d = 20 \\ a_1 + 15d = 28 \end{cases}$; $d = \dfrac{4}{3}$.

Ответ: не существует.

7.14(2) $a_8 = 50$; $a_{12} = 44$; $a_{20} = 32$

1) $\begin{cases} a_1 + 11d = 44 \\ a_1 + 7d = 50 \end{cases}$ $\begin{cases} d = -1,5; \\ a_1 = 60,5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_1 + 19d = 32, \\ a_1 + 11d = 44; \end{cases}$ $8d = -12$; $\begin{matrix} d = -1,5 \\ a_1 = 60,5 \end{matrix}$ **Ответ:** существует.

7.15(1) $a_1 = 6$; $a_6 = 17$; $17 = 6 + d \cdot 5$; $d = 2{,}2$;

Ответ: 8,2; 10; 4; 12,6; 14,8.

7.15(2) $a_1 = 12$; $a_5 = 26$; $26 = 12 + d \cdot 4$; $d = 3{,}5$

Ответ: 15,5 ; 19; 22,5.

7.16(1) $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 90 \\ a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 78 \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое:

$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + (a_8 - a_7) + (a_{10} - a_9) + (a_{12} - a_{11}) = -12;$

$2d = -12;\ d = -2;$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_8 + a_{11} = 6a_1 + 30d = 90;\ 6a_1 = 150;\ a_1 = 25$

Ответ: $a_1 = 25;\ d = -2.$

7.16(2) $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 40 \\ a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 55 \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения первое: $5d = 15;\ d = 3;$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 5a_1 + 20d = 40;\ 5a_1 = -20;\ a_1 = -4$

Ответ: $a_1 = -4;\ d = 3.$

7.17(1) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = n(2n+7)$;

$2a_1 + d(n-1) = 4n + 14;\ d = 4;\ a_1 = 9;\ a_5 = a_1 + 4d = 25$

Ответ: 25.

7.17(2) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = n(3n-5)$;

$2a_1 + d(n-1) = 6n - 10;\ d = 6;\ a_1 = -2;\ a_4 = a_1 + 3d = 16$

Ответ: 16.

7.18(1) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3a_1 + 3d = 0 \\ 4a_1 + 6d = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{2} \\ d = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$S_{10} = \dfrac{2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot 9}{2} \cdot 10 = 17{,}5$ **Ответ:** 17,5.

7.18(2) $\begin{cases} \dfrac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 3 \\ \dfrac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 + 3d = 1{,}5 \\ 2a_1 + 4d = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0{,}5 \\ a_1 = 0 \end{cases}$

$S_9 = \dfrac{0{,}5 \cdot 8}{2} \cdot 9 = 18$ **Ответ:** 18.

7.19(1) $a_1 = 1;\ d = 2;\ S_n = \dfrac{(2 + 2(n-1))n}{2} < 300$; $n^2 < 300;\ n = 17.$

Ответ: 17 чисел.

7.19(2) $a_1 = 1$; $d = 2$; $S_n = \dfrac{(2+2(n-1))n}{2} > 500$; $n^2 > 500$; $n = 23$.

Ответ: 23 числа.

7.20(1) $d = 3$; $a_1 = 3$; $a_n = 150$; $a_n = a_1+d(n-1)$; $3+3(n-1) = 150$; $1+n-1 = 50$; $n = 50$.

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}n$; $S_{50} = \dfrac{3+150}{2}\cdot 50 = 153\cdot 25 = 3825$. **Ответ:** 3825.

7.20(2) $d = 5$; $a_1 = 5$; $a_n = 300$; $a_n = a_1+d(n-1)$; $5+5(n-1) = 300$;

$1+n-1 = 60$; $n = 60$. $S_{60} = \dfrac{5+300}{2}\cdot 60 = 305\cdot 30 = 9150$.

Ответ: 9150.

7.21(1) Найдем сумму всех натуральных чисел от 1 до 200:

$S_{200} = \dfrac{1+200}{2}\cdot 200 = 20100$

Найдем сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 200, которые делятся на 6:

$a_1 = 6$; $d = 6$; $a_n = 6 + 6(n-1) = 198$; $1 + n - 1 = 33$; $n = 33$.

$S_{33} = \dfrac{6+198}{2}\cdot 33 = 3366$; $S_{200}–S_{33} = 20100–3366 = 16734$

Ответ: 16734.

7.21(2) Найдем сумму всех натуральных чисел от 1 до 250.

$S_{250} = \dfrac{1+250}{2}\cdot 250 = 31375$. Найдем сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 250, которые делятся на 7.

$a_1 = 7$; $a_n = 245$; $n = 35$; $S_{35} = \dfrac{7+245}{2}\cdot 35 = 4410$;

$S_{250}–S_{35} = 31375–4410 = 26965$ **Ответ:** 26965.

7.22(1) $a_n = 3n+5$; $a_{30} = 3\cdot 30 + 5 = 95$; $a_{40} = 3\cdot 40 + 5 = 125$; количество членов с 30-го по 40-й одиннадцать.

$S_{11} = \dfrac{95+125}{2}\cdot 11 = 1210$. **Ответ:** 1210.

7.22(2) $a_n = 4n+2$; $a_{25} = 102$; $a_{35} = 142$; $n = 35 - 24 = 11$.

$S_{11} = \dfrac{102+142}{2}\cdot 11 = 1342$. **Ответ:** 1342.

7.23(1) $b_2 = -6$; $b_5 = 48$; $b_7 = 192$

1) $\begin{cases} b_1 q = -6, \\ b_1 q^4 = 48, \end{cases}$ $q^3 = -8$; $q = -2$;

2) $\begin{cases} b_1q=-6 \\ b_1q^6=192 \end{cases}$ $\quad q^5=-32;\ q=-2$

3) $\begin{cases} b_1q^4=48 \\ b_1q^6=192 \end{cases}$ $\quad q^2=4;\ q_1=2;\ q_2=-2$

при $q=-2$ существует **Ответ:** существует.

7.23(2) $b_2=12;\ b_5=\frac{3}{2};\ b_7=\frac{3}{4}$

I. $\begin{cases} b_1q=12, \\ b_1q^4=\frac{3}{2}, \end{cases}$ $\quad q^3=\frac{1}{8};\ q=\frac{1}{2};$

II. $\begin{cases} b_1q=12 \\ b_1q^6=\frac{3}{4} \end{cases}$; $q^5=\frac{1}{16};\ q=\frac{1}{\sqrt[5]{16}};\ \frac{1}{2}\neq\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$

Ответ: не существует.

7.24(1) (b_n) — геометрическая прогрессия; $b_1=2$; $b_5=18$.

$\begin{cases} b_1q^4=18 \\ b_1=2; \end{cases}$ $\quad q^4=9;\ q=\pm\sqrt{3}$.

Если $q=\sqrt{3}$, то $b_2=2\sqrt{3}$; $b_3=6$; $b_4=6\sqrt{3}$; $b_5=18$.

Если $q=-\sqrt{3}$, то $b_2=-2\sqrt{3}$; $b_3=6$; $b_4=-6\sqrt{3}$; $b_5=18$

Ответ: $2\sqrt{3}; 6; 6\sqrt{3}$ или $-2\sqrt{3}; 6; -6\sqrt{3}$.

7.24(2) (b_n) — геометрическая прогрессия. $b_1=3$; $b_5=12$

$\begin{cases} b_1=3 \\ b_1q^4=12 \end{cases}$ $\quad q^4=4;\ q=\sqrt{2}$; или $q=-\sqrt{2}$

Если $q=\sqrt{2}$, то $b_2=3\sqrt{2}$; $b_3=6$; $b_4=6\sqrt{2}$; $b_5=12$.

Если $q=-\sqrt{2}$, то $b_2=-3\sqrt{2}$; $b_3=6$; $b_4=-6\sqrt{2}$; $b_5=12$.

Ответ: $3\sqrt{2}; 6; 6\sqrt{2}$ или $-3\sqrt{2}; 6; -6\sqrt{2}$.

7.25(1) $b_1+b_2=45$; $b_2+b_3=30$; $\begin{cases} b_1+b_1q=45, \\ b_1q+b_1q^2=30; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1(1+q)=45, \\ b_1q(1+q)=30; \end{cases}$

$\frac{1}{q}=\frac{3}{2};\ q=\frac{2}{3}.\ b_1\left(1+\frac{2}{3}\right)=45;\ b_1=45:\frac{5}{3};\ b_1=27;$

$b_2=27\cdot\frac{2}{3}=18;\ b_3=18\cdot\frac{2}{3}=12.$ **Ответ:** 27; 18; 12.

7.25(2) (b_n) — геометрическая прогрессия.

$b_1+b_2 = 140$; $b_2+b_3 = 105$

$$\begin{cases} b_1+b_1q=140, \\ b_1q+b_1q^2=105; \end{cases} \begin{cases} b_1(1+q)=140, \\ b_1q(1+q)=105; \end{cases} \frac{1}{q}=\frac{140}{105};\ \frac{1}{q}=\frac{4}{3};\ q=\frac{3}{4}.$$

$$b_1(1+\frac{3}{4})=140;\ b_1\cdot\frac{7}{4}=140;\ b_1=80;\ b_2=80\cdot\frac{3}{4}=60;\ b_3=60\cdot\frac{3}{4}=45.$$

Ответ: 80; 60; 45.

7.26(1) $q>0$; $b_1\cdot b_2 = 27$; $b_3\cdot b_4=\frac{1}{3}$. $\begin{cases} b_1\cdot b_1q=27, \\ b_1q^2\cdot b_1q^3=\frac{1}{3}; \end{cases} \begin{cases} b_1^2q=27, \\ b_1^2q^5=\frac{1}{3}; \end{cases}$

$\frac{1}{q^4}=81$; $q^4=\frac{1}{81}$; $q^4=(\frac{1}{3})^4$, $q_1=\frac{1}{3}$; $q_2=-\frac{1}{3}$. По условию $q>0$, следовательно $q=\frac{1}{3}$. Далее $b_1^2q=27$; $b_1^2=81$; $b_1=9$; $b_1=-9$.

Ответ: 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$ или -9; -3; -1; $-\frac{1}{3}$.

7.26(2) (b_n) — геометрическая прогрессия.

$$q<0;\ \begin{cases} b_1\cdot b_1q=-\frac{1}{2}; \\ b_1q^2\cdot b_1q^3=-8; \end{cases} \begin{cases} b_1^2q=-\frac{1}{2} & (1) \\ b_1^2\cdot q^5=-8 & (2) \end{cases} (2):(1)$$

$q^4 = 16$; $q_1 = 2$; $q_2 = -2$; q_1 не удовлетворяет условию; $q = -2$; $b_1^2\cdot(-2)=-\frac{1}{2}$; $b_1^2=\frac{1}{4}$; $b_1=\pm\frac{1}{2}$.

1) $b_1=\frac{1}{2}$; $q=-2$: $\frac{1}{2}$; -1; 2; -4. 2) $b_1=-\frac{1}{2}$; $q=-2$: $-\frac{1}{2}$; 1; -2; 4.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 1; -2; 4 или $\frac{1}{2}$; -1; 2; -4.

7.27(1) (b_n) — геометрическая прогрессия, $b_2 = 6$; $b_4 = 24$

$$\begin{cases} b_1q=6, \\ b_1q^3=24; \end{cases} q^2=4;\ q_1=2;\ q_2=-2.\ \begin{cases} q=2 \\ b_1=3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} q=-2 \\ b_1=-3 \end{cases}.$$

Имеем: 1) при $q = 2$; $b_1 = 3$:

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1};\ S_8=\frac{3\cdot(2^8-1)}{2-1}=3\cdot255=765.$$

2) при $q=-2$; $b_1=-3$: $S_8=\dfrac{-3((-2)^8-1)}{-3}=255.$

Ответ: 765 или 255.

7.27(2) (b_n) — геометрическая прогрессия. $\begin{cases} b_3=54; \\ b_5=6. \end{cases}$

$\begin{cases} b_1q^2=54; \\ b_1q^4=6; \end{cases}$ $\dfrac{1}{q^2}=9$; $q^2=\dfrac{1}{9}$; $q_1=\dfrac{1}{3}$; $q_2=-\dfrac{1}{3}$. $q=\dfrac{1}{3}$; $b_1=486$;

$$S_6=\frac{486\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right)}{\frac{1}{3}-1}=\frac{486\left(\frac{1}{729}-1\right)}{-\frac{2}{3}}=\frac{486\cdot3\cdot728}{2\cdot729}=\frac{243\cdot728}{243}=728$$

3) $q=-\dfrac{1}{3}$; $b_1=486$.

$$S_6'=\frac{486\left(\left(\frac{1}{3}\right)^6-1\right)}{-\frac{1}{3}-1}=\frac{486\cdot728\cdot3}{729\cdot4}=\frac{486\cdot728}{243\cdot4}=\frac{2\cdot728}{4}=\frac{728}{2}=364.$$

Ответ: 728 или 364.

7.28(1) $S_4=\dfrac{b_1\cdot\left(3^4-1\right)}{3-1}=40$. Отсюда $b_1=1$.

$S_8=\dfrac{1\cdot\left(3^8-1\right)}{3-1}=3280$. **Ответ:** 3280.

7.28(2) $S_3=\dfrac{b_1\cdot\left((-4)^2-1\right)}{-4-1}=39$. Отсюда $b_1=13$.

$S_6=\dfrac{13\cdot\left((-4)^6-1\right)}{-4-1}=-2457$. **Ответ:** –2457.

6 баллов

7.29(1) 1) $a_5+a_9=40$; $a_1+4d+a_1+8d=40$; $2a_1+12d=40$;
$a_1+6d=20$; $a_7=20$.
2) $a_3+a_{11}=a_1+2d+a_1+10d=2a_1+12d=2(a_1+6d)=2a_7=40$
3) $a_3+a_{11}+a_7=60$ **Ответ:** 60.

7.29(2) (a_n) — арифметическая прогрессия
1) $a_4+a_6=38$; $a_1+3d+a_1+5d=38$; $2a_1+8d=38$; $a_1+4d=19$; $a_5=19$.
2) $a_2+a_5+a_8=19+a_1+d+a_1+7d=19+2a_1+8d=19+2(a_1+4d)=$
$=19+2a_5=57$ **Ответ:** 57.

7.30(1) $a_4 + a_{10} = 10$; $a_1 + 3d + a_1 + 9d = 10$; $2a_1 + 12d - 10$;

$S_{13} = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = 5 \cdot 13 = 65$. **Ответ:** 65.

7.30(2) $a_3 + a_{13} = 11$; $a_1 + 2d + a_1 + 12d = 11$; $2a_1 + 14d = 11$;

$S_{15} = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = \frac{11}{2} \cdot 15 = 82,5$. **Ответ:** 82,5.

7.31(1) 1) $S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = (a_1 + a_1 + 3d) \cdot 2 = (2a_1 + 3d) \cdot 2$;

$S_4' = \frac{a_5 + a_8}{2} \cdot 4 = (a_1 + 4d + a_1 + 7d) \cdot 2 = (2a_1 + 11d) \cdot 2$; $S_4 + 32 = S_4'$

$2(2a_1+3d)+32 = 2(2a_1+11d)$; $2a_1+3d+16 = 2a_1+11d$; $8d = 16$; $\boldsymbol{d = 2}$

2) $S_{10}' - S_{10} = \frac{a_{11} + a_{20}}{2} \cdot 10 - \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1+10d+a_1+19d)5 -$

$-(a_1+a_1+9d)5 = (2a_1+29d-2a_1-9d)5 = 20d \cdot 5 = 20 \cdot 5 \cdot 2 = 200$

Ответ: на 200.

7.31(2) $S_5 - S_5' = 200$; $\frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 - \frac{a_6 + a_{10}}{2} \cdot 5 = 200$;

$(2a_1+4d) \cdot 5 - (2a_1+14d) \cdot 5 = 400$;

$5(2a_1+4d-2a_1-14d) = 400$; $-10d = 80$; $\boldsymbol{d = -8}$.

II. $S_{10} - S_{10}' = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 - \frac{a_{11} + a_{20}}{2} \cdot 10 =$

$=(2a_1 + 9d) \cdot 5 - (2a_1 + 29d) \cdot 5 = 5(2a_1 + 9d - 2a_1 - 29d) =$

$=5 \cdot (-20d) = 5 \cdot 20 \cdot 8 = 800$.

Ответ: на 800.

7.32(1) 3, 8, 13, 18, 23 ...;

$d = 5$ арифметическая прогрессия, 4, 11, 18, ...; $d = 7$ арифметическая прогрессия, $a_1 = 18$ — первый совпадающий член этих прогрессий.

Совпадающие члены данных прогрессий также составляют арифметическую прогрессию: $a_1 = 18$, ... Разность ее равна наименьшему общему кратному разностей данных прогрессий,

т.е. $d = 35$ и $S_{20} = \frac{2 \cdot 18 + 35 \cdot 19}{2} \cdot 20 = 7010$.

Ответ: 7010.

7.32(2) 3, 7, 11, 15, 19 ...; $d = 4$ — арифметическая прогрессия, 1, 10, 19, ...; $d = 9$ — арифметическая прогрессия,

$a_1 = 19$; $d = 36$ (см. № 6.28 (1)) и $S_{10} = \frac{2 \cdot 19 + 36 \cdot 9}{2} \cdot 10 = 1810$.

Ответ: 1810.

7.33(1) $(x+1)+(x+5)+(x+9)+...+(x+157)=3200$;
$x+1$; $x+5$; ...; $x+157$ — арифметическая прогрессия, т.к. $(x+5)-(x+1)=4$ и $(x+9)-(x+5)=4$. Далее: $x+157=(x+1)+4\cdot39$. Следовательно $x+157$ — 40-й член этой прогрессии; $d=4$. Левая часть уравнения — сумма первых 40 членов этой арифметической прогрессии.

$$S_{40}=\frac{a_1+a_{40}}{2}40;\ S_{40}=\frac{x+1+x+157}{2}\cdot40=(2x+158)\cdot20;$$

$(2x+158)\cdot20=3200$; $2x+158=160$; $2x=2$; $x=1$.

Ответ: 1.

7.33(2) $(x+248)+(x+243)+(x+238)+...+(x+3)=6225$;
$x+248, x+243, ..., x+3$ — арифметическая прогрессия, $d=a_2-a_1=-5$; $a_3-a_2=-5$. Левая часть уравнения — сумма членов арифметической прогрессии, в которой $a_1=x+248$; $d=-5$; $a_n=a_1+d(n-1)$; $x+3=x+248-5(n-1)$; $-5(n-1)=-245$; $n=50$;

$$S_{50}=\frac{x+248+x+3}{2}\cdot50=(2x+251)\cdot25;\ (2x+251)\cdot25=6225;$$

$2x+251=249$; $2x=-2$; $x=-1$.

Ответ: -1.

7.34(1) Составим разности: $50^2-49^2=99\cdot1$; $48^2-47^2=95\cdot1$; ...
Число слагаемых четное, поэтому последняя разность:
$2^2-1=(2-1)(2+1)=3\cdot1$.
Мы получили арифметическую прогрессию: 99; 95; ..., 3;
$d=-4$; $a_1=99$.
$a_n=a_1+d(n-1)$; $3=99-4(n-1)$; $n-1=24$; $n=25$;

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2};\ S_{25}=\frac{(99+3)25}{2}=51\cdot25=1275.$$

Ответ: 1275.

7.34(2) $1^2-2^2+3^2-4^2+...+99^2-100^2$; $1^2-2^2=-3$;
$3^2-4^2=-7$; ..., $99^2-100^2=-199$.

Получили арифметическую прогрессию -3; -7; ...; -199; $d=-4$.

$$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1;\ n=\frac{-199+3}{-4}+1=50.$$

Найдем сумму $S_{50}=\dfrac{-3+(-199)}{2}\cdot50=-101\cdot50=-5050$.

Ответ: -5050.

7.35(1) $a_1=-29$; $d=7$; $S_n=S_5=\dfrac{2\cdot(-29)+7\cdot4}{2}\cdot5=-75$

Ответ: -75.

7.35(2) $a_1 = 29$; $d = -5$; $S_n = S_6 = \frac{2\cdot 29 - 5\cdot 5}{2}\cdot 6 = 99$.

Ответ: 99.

7.39(1) 1) Найдем число трехзначных натуральных чисел, делящихся на 20. $a_1 = 100$; $a_n = 980$; $a_n = a_1 + d(n-1)$; $d = 20$;

$980 = 100+(n-1)\cdot 20$; $880 = 20(n-1)$; $n = 45$

2) Найдем число трехзначных натуральных чисел, которые делятся только на 4.

$a_1 = 100$; $a_n = 996$; $996 = 100+4(n-1)$; $896 = 4(n-1)$, $n = 225$.

3) Найдем число трехзначных натуральных чисел, которые делятся только на 5.

$a_1 = 100$; $a_n = 995$; $995 = 100+5(n-1)$; $895 = 5(n-1)$; $n = 180$.

4) $225+180-2\cdot 45 = 315$.

Ответ: 315.

7.39(2) 1) Найдем число трехзначных натуральных чисел, которые делятся на 30.

$a_1 = 120$; $a_n = 990$; $d = 30$; $990 = 120+30(n-1)$; $870 = 30(n-1)$;
$29 = n-1$, $n = 30$.

2) Найдем число трехзначных натуральных чисел, которые делятся только на 5.

$a_1 = 100$; $a_n = 995$; $100+5(n-1) = 995$; $5(n-1) = 895$; $n-1 = 179$,
$n = 180$.

3) Найдем число трехзначных натуральных чисел, которые делятся только на 6.

$a_1 = 102$; $a_n = 996$; $102+6(n-1) = 996$; $6(n-1) = 894$; $n = 150$.

4) $180+150-2\cdot 30 = 270$.

Ответ: 270.

7.40(1) $a_n = 5n-2$, $n \in N$. (a_n) — множество чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3. $a_1 = 3$; $a_n = 198$; $5n-2 = 198$;

$5n = 198+2$; $n = 40$. $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$; $S_{40} = \frac{3+198}{2}\cdot 40 = 4020$

Ответ: 4020.

7.40(2) $a_n = 3n-1$, $n \in \mathbb{N}$

(a_n) — арифметическая прогрессия; множество чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2. $a_1 = 2$; $a_n = 149$; $3n-1 = 149$;

$3n = 150$; $n = 50$; $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$; $S_{50} = \frac{2+149}{2}\cdot 50 = 3775$

Ответ: 3775.

7.41(1) (a_n) — арифметическая прогрессия;

$\frac{S_{10}}{10} = 20$; $S_{10} = 200$;

$\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 200$; $a_1 + a_{10} = 40$; $2a_1 + d \cdot 9 = 40$; $d \cdot 9 = 40 - 2a_1$.

В этом равенстве справа — число четное,
следовательно $9 \cdot d$ — четное и меньше, чем 40.
1) $9d = 18$; $d = 2$; $a_1 = 11$
2) $9d = 36$; $d = 4$; $a_1 = 2$.
Ответ: $a_1 = 11$; $d = 2$ или $a_1 = 2$; $d = 4$.

7.41(2) $\frac{S_8}{8} = 23$; $S_8 = 184$; $\frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 184$; $2a_1 + d \cdot 7 = 46$.

$d \cdot 7$ — четное.
1) $7d = 14$; $d = 2$; $a = 16$; 2) $7d = 28$; $d = 4$; $a = 9$;
3) $7d = 42$; $d = 6$; $a = 2$.
Ответ: $a_1 = 2$; $d = 6$ или $a_1 = 9$; $d = 4$ или $a_1 = 16$; $d = 2$.

7.44(1) (b_n) — геометрическая прогрессия

$\begin{cases} b_1 + b_5 = 51 \\ b_2 + b_6 = 102; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 + b_1q^4 = 51 \\ b_1q + b_1q^5 = 102; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1\left(1+q^4\right) = 51 \\ b_1q\left(1+q^4\right) = 102; \end{cases}$ $\begin{cases} q = 2, \\ b_1 = 3; \end{cases}$

$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$; $\frac{3 \cdot (2^n - 1)}{2-1} = 3069$;

$3(2^n - 1) = 3069$; $2^n = 1024$; $n = 10$
Ответ: $n = 10$.

7.44(2) (b_n) — геометрическая прогрессия;

$\begin{cases} b_4 - b_1 = 52 \\ b_5 - b_2 = 156 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1q^3 - b_1 = 52 \\ b_1q^4 - b_1q = 156 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1\left(q^3 - 1\right) = 52 \\ b_1q\left(q^3 - 1\right) = 156 \end{cases}$ $\begin{cases} q = 3 \\ b_1 = 2 \end{cases}$;

$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$; $\frac{2\left(3^n - 1\right)}{2} = 242$; $3^n - 1 = 242$; $3^n = 243$; $n = 5$.

Ответ: 5.

7.45(1) a_1; a_2; a_3 — убывающая арифметическая прогрессия;

$S_3 = \frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = 60$; $\frac{2a_1 + 2d}{2} = 20$; $a_1 + d = 20$; $\begin{cases} a_2 = 20 \\ a_1 = 20 - d \end{cases}$

1) $a_1 - 10$; 12; $a_1 + 2d$ — геометрическая прогрессия.

$$\begin{cases}12^2=(a_1-10)(a_1+2d) \\ a_1=20-d\end{cases} \qquad \begin{cases}144=(a_1-10)(40-a_1) \\ a_1=20-d,\end{cases}$$

(поскольку $a_1+d=20$; $d=20-a_1$; $2d=40-2a_1$)

$144=40a_1-400-a_1^2+10a_1$; $a_1^2-50a_1+544=0$;

$a_1=25\pm\sqrt{625-544}=25\pm 9$; $a_1=34$; $a_1'=16$; $d_1=-14$; $d_2=4$.

2) По условию арифметическая прогрессия убывающая, следовательно $d=-14$; $a_1=34$.

Ответ: 34; 20; 6.

7.45(2) $a_1<a_2<a_3$ — возрастающая арифметическая прогрессия.

$S_3=63$; $\dfrac{a_1+a_3}{2}\cdot 3=63$; $2a_1+2d=42$; $a_2=21$.

2) a_1+10; 24; a_3 — геометрическая прогрессия.

$$\begin{cases}24^2=(a_1+10)(a_1+2d), \\ d=21-a_1;\end{cases} \quad a_1+2d=a_1+2(21-a_1)=42-a_1;$$

$576=(a_1+10)(42-a_1)$, $576=42a_1+420-a_1^2-10a_1$,

$a_1^2-32a_1+156=0$; $a_1=16\pm\sqrt{256-156}=16\pm 10$; $a_1=26$; $a_1'=6$;

$d_1=-5$; $d_2=15$. Арифметическая прогрессия возрастает: $d=15$; $a_1=6$.

6; 21; 36 — искомые числа.

Ответ: 6; 21; 36.

7.46(1) a, aq, aq^2 — геометрическая прогрессия, $a\neq 0$; a, $2aq$, aq^2 — арифметическая прогрессия, поэтому $\dfrac{a+aq^2}{2}=2aq$;

$a+aq^2=4aq$; $1+q^2-4q=0$, $q=2\pm\sqrt{4-1}$; $q=2\pm\sqrt{3}$;

по условию $|q|<1$, значит $q=2-\sqrt{3}$.

Ответ: $q=2-\sqrt{3}$.

7.46(2) a, aq, aq^2 — геометрическая прогрессия.

$a>0$; $q>1$; a, aq, $\dfrac{aq^2}{2}$ — арифметическая прогрессия.

$a+\dfrac{aq^2}{2}=2aq$; $1+\dfrac{q^2}{2}=2q$; $2+q^2-4q=0$; $q^2-4q+2=0$;

$q=2\pm\sqrt{2}$. По условию $q>1$, значит $q=2+\sqrt{2}$.

Ответ: $2+\sqrt{2}$.

7.48(1) a; b; c — геометрическая прогрессия; следовательно $b = aq$; $c = aq^2$; $a \neq 0$. $a + b$, $b + c$, $a + c$ — арифметическая прогрессия, следовательно $2(b + c) = a + b + a + c$.

Далее: $2(aq + aq^2) = 2a + aq + aq^2$; $2(q + q^2) = 2 + q + q^2$;
$2q+2q^2 = 2+q+q^2$, $q^2 + q - 2 = 0$, $q_1 = -2$; $q_2 = 1$; $q \neq 1$
(следует из определения геометрической прогрессии)
Ответ: $q = -2$.

7.48(2) a; b; c — геометрическая прогрессия; $b = aq$; $c = aq^2$; $a \neq 0$.
$a - b$, $b + c$, $b - c$ — арифметическая прогрессия;
$2(b + c) = a - b + b - c$; $2(b + c) = a - c$; $2(aq + aq^2) = a - aq^2$;
$2(q + q^2) = 1 - q^2$; $2q + 2q^2 - 1 + q^2 = 0$; $3q^2 + 2q - 1 = 0$;

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3}; \ q_1 = -1; \ q_2 = \frac{1}{3}. \ q \neq -1$$

(следует из определения геометрической прогрессии).

Ответ: $\frac{1}{3}$.

7.36(1) $a_1 = f(1) = 3$; $d = f(3) - f(1) = 7 - 3 = 4$; $n = 51$;

$$S_{51} = \frac{3 + 4 \cdot 50}{2} \cdot 51 = 5176,5$$

7.36(2) $a_1 = f(0) = -1$;
$d = f(2) - f(0) = 5 - (-1) = 6$; $n = 51$;

$$S_{51} = \frac{-1 + 6 \cdot 50}{2} \cdot 51 = 7624,5$$

7.37(1) Найдем сумму всех четных трехзначных чисел:
$100 + 102 + ... + 998$
$a_1 = 100$; $d = 2$;
$998 = 100 + 2(n-1) \Rightarrow n = 450$;

$$S_{450} = \frac{2 \cdot 100 + 2 \cdot 449}{2} \cdot 450 = 247050$$

Найдем сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3:
$102 + 108 + ... + 996$
$a_1 = 102$; $d = 6$;
$996 = 102 + 6 \cdot (n-1) \Rightarrow n = 150$;

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot 149}{2} \cdot 150 = 82350$$

Искомая сумма равна разности полученных сумм, т.е. 164700.
Ответ: 164700.

7.37(2) Сумма всех четных трехзначных чисел равна 247050 (см. предыдущий пункт).

Найдем сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 5: 100 + 105 + ... + 995.

$a_1 = 100$; $d = 5$;

$995 = 100 + 5(n-1) \Rightarrow n = 180$;

$$S_{180} = \frac{2 \cdot 100 + 5 \cdot 179}{2} \cdot 180 = 98550$$

Искомая сумма равна разности полученных сумм, т.е. 148500.

Ответ: 148500.

7.38(1) 108 + 120 + 132 + ... + 996 — ?

$a_1 = 128$; $d = 12$;

$996 = 108 + 12 \cdot (n-1) \Rightarrow n = 75$;

$$S_{74} = \frac{2 \cdot 108 + 12 \cdot 74}{2} \cdot 75 = 41400$$

Ответ: 41400.

7.38(2) 108 + 126 + ... + 990 — ?

$a_1 = 108$; $d = 18$;

$990 = 108 + 18 \cdot (n-1) \Rightarrow n = 50$

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 108 + 18 \cdot 49}{2} \cdot 50 = 27450$$

Ответ: 27450.

7.42(1) $b_4 + b_{10} = b_4 + b_7 \cdot q^3 = b_4 + b_7 \cdot \dfrac{b_7}{b_4} = \dfrac{b_4^2 + b_7^2}{b_4} =$

$$= \frac{7 + 6\sqrt{7} + 9 + 2}{\sqrt{7} + 3} = \frac{18 + 6\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 3} = 6$$

Ответ: 6.

7.42(2) $b_2 + b_{12} = b_2 + b_7 q^5 = b_2 + b_7 \cdot \dfrac{b_7}{b_2} = \dfrac{b_2^2 + b_7^2}{b_2} =$

$$= \frac{13 + 8\sqrt{13} + 16 + 3}{\sqrt{13} + 4} = \frac{32 + 8\sqrt{13}}{4 + \sqrt{13}} = 8.$$

Ответ: 8.

7.43(1) $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 112 \\ b_4 + b_5 + b_6 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1(1 + q + q^2) = 112 \\ b_1 q^3 (1 + q + q^2) = 14 \end{cases}$

$$q^3=\frac{14}{112}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2};$$

$$b_1=\frac{112}{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{112}{1,75}=64;$$

$$b_7=b_1q^6=64\cdot\frac{1}{64}=1$$

Ответ: 1.

7.43(2) $\begin{cases}b_1(1+q+q^2)=9\\ b_1q^3(1+q+q^2)=-72\end{cases}$

$$q^3=-8\Rightarrow q=-2;$$

$$b_1=\frac{9}{1+(-2)+(-2)^2}=3;$$

$$b_5=b_1\cdot q^4=3\cdot(-2)^4=48$$

Ответ: 48.

7.47(1) $S_6=\frac{2\cdot3+6\cdot5}{2}\cdot6=108;$

$$S_8=\frac{3\cdot\left(\left(\sqrt{2}\right)^8-1\right)}{\sqrt{2}-1}=\frac{45}{\sqrt{2}-1};45\left(\sqrt{2}+1\right);$$

$$108\vee45\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$2,4\vee\sqrt{2}+1$; $2,4<\sqrt{2}+1$, поэтому S_8 больше

Ответ: Больше сумма первых восьми членов геометрической прогрессии.

7.47(2) $S_8=\frac{2\cdot6+2\cdot7}{2}\cdot8=104;$

$$S_6=\frac{3\cdot\left(\left(\sqrt{3}\right)^6-1\right)}{\sqrt{3}-1}=\frac{78}{\sqrt{3}-1}=78\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}=39\left(\sqrt{3}+1\right);$$

$104\vee39\left(\sqrt{3}+1\right)$; $2\frac{2}{3}<\sqrt{3}+1$ (т.к. $\sqrt{3}>1,7$), поэтому S_6 больше.

Ответ: Больше сумма первых шести членов геометрической прогрессии.

8. Текстовые задачи

8.1(1) x мин. — время движения Андрея, $(x+4)$ мин. — время движения Николая.

$60(x+4) = 80x$; $60x+240 = 80x$;

$20x = 240$; $x = 12$;

$v = 80$ м/мин; $x = 12$ мин; $s = 960$ м.

Ответ: 960 м.

8.1(2)

	v км/ч	t ч	s км
движение мотоцикла	60	$x+1$	$60(x+1)$
движение автомобиля	90	x	$90x$

$60(x+1) = 90x$;

$60x+60 = 90x$;

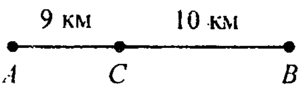
$30x = 60$;

$x = 2$.

$s = 90\cdot 2 = 180$ (км)

Ответ: 180 км.

8.2(1) $s = 19$ км;



	v км/ч	s км	t ч
движение пешехода, вышедшего из A	$x+1$	9	$\frac{9}{x+1}+\frac{1}{2}$
движение пешехода, вышедшего из B	x	10	$\frac{10}{x}$

Пешеходы вышли одновременно и встретились, следовательно

$$\frac{9}{x+1}+\frac{1}{2}=\frac{10}{x};$$

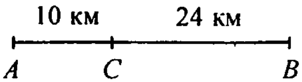
$$\frac{19+x}{2(x+1)}=\frac{10}{x};$$

$19x + x^2 = 20x + 20$;

$x^2 - x - 20 = 0$.

$x_1 = 5$; $x_2 = -4$

Ответ: 5 км/ч и 6 км/ч.

8.2(2) 

	v км/ч	s км	t ч
движение мотоциклиста, выехавшего из A	x+8	10	$\frac{10}{x+8}+\frac{1}{2}$
движение мотоциклиста, выехавшего из B	x	24	$\frac{24}{x}$

$\frac{10}{x+8}+\frac{1}{2}=\frac{24}{x}$; $\frac{28+x}{2(x+8)}=\frac{24}{x}$; $28x+x^2=48x+24\cdot 16$;

$x^2-20x-384=0$; $x_{1,2}=10\pm\sqrt{100+384}=10\pm 22$;

$x_1=32$, $x_2<0$. $x_1+8=40$.

Ответ: 32 км/ч; 40 км/ч.

8.3(1) 2 км/ч — скорость течения реки; 8 км/ч — собственная скорость лодки; 10 км/ч — скорость лодки по течению; 6 км/ч — скорость лодки против течения. 2 ч — время движения лодки.

x км — расстояние, на которое лодка может отплыть.

Тогда: $\frac{x}{10}+\frac{x}{6}=2$; $3x+5x=60$; $8x=60$; $x=7{,}5$.

Ответ: 7,5 км.

8.3(2) 2 км/ч — скорость течения реки; 6 км/ч — собственная скорость лодки; 8 км/ч — скорость лодки по течению; 4 км/ч — скорость лодки против течения; 3 ч — время движения лодки.

x км — расстояние, на которое лодка должна отплыть.

Тогда: $\frac{x}{8}+\frac{x}{4}=3$; $x+2x=24$; $x=8$.

Ответ: на 8 км.

8.4(1) x км/ч — скорость течения реки

8 км/ч — собственная скорость лодки

	v км/ч	s км	t ч
движение лодки по течению	8+x	15	$\frac{15}{8+x}$
движение лодки против течения	8–x	6	$\frac{6}{8-x}$
движение плота	x	5	$\frac{5}{x}$

$$\frac{15}{8+x}+\frac{6}{8-x}=\frac{5}{x};$$

$x \neq 0; \pm 8;$

$$\frac{120-15x+48+6x}{64-x^2}=\frac{5}{x};$$

$x(-9x+168) = 5(64-x^2);$

$-9x^2+168x = 320-5x^2;$

$4x^2-168x+320 = 0;$

$x^2-42x+80 = 0;$

$x_1 = 40;$

$x_2 = 2$

Ответ: 2 км/ч.

8.4(2) x км/ч — скорость течения реки

15 км/ч — скорость катера в стоячей воде

	v км/ч	s км	t ч
движение катера по течению	$15+x$	24	$\frac{24}{15+x}$
движение катера против течения	$15-x$	20	$\frac{20}{15-x}$
движение плота	x	9	$\frac{9}{x}$

$$\frac{24}{15+x}+\frac{20}{15-x}=\frac{9}{x};$$

$x \neq 0; \pm 15;$

$$\frac{24(15-x)+20(15+x)}{225-x^2}=\frac{9}{x};$$

$$\frac{24\cdot 15-24x+20\cdot 15+20x}{225-x^2}=\frac{9}{x};$$

$(660-4x)x = 2025-9x^2;$

$660x-4x^2 = 2025-9x^2;$

$5x^2+660x-2025 = 0;$

$x^2+132x-405 = 0;$

$x = -66 \pm \sqrt{4356+405} = -66 \pm 69.$

$x_1 = 3;$

$x_2 = -135; (v > 0)$

Ответ: 3 км/ч.

8.5(1) x (м) сторона квадратного участка.
Тогда длина выделенного участка $x + 60$ (м),
а ширина — $x - 48$ (м).
Площади прямоугольника и квадрата равны.
Имеем:
$(x+60)(x-48) = x^2$;
$x^2+60x-48x-2880 = x^2$;
$12x = 2880$;
$x = 240$.
Ответ: 240 м.

8.5(2) x (м) — сторона квадратного участка;
$x-18$ (м); $x+27$ (м) — размеры площадки прямоугольной формы;
$(x-18)(x+27) = x^2$;
$x^2+9x-486 = x^2$;
$9x = 486$; $x = 54$.
Ответ: 54 м.

8.6(1) $a = x$ (м); $b = x+5$ (м); $S = ab$; $S = x(x+5)$;
$a_1 = x+5$ (м); $b_1 = x+7$ (м); $S_1 = (x+5)(x+7)$;
$(x+5)(x+7)-x(x+5) = 280$; $(x+5)(x+7-x) = 280$;
$x+5 = 40$; $x+7 = 42$; $S_1 = 40 \cdot 42 = 1680$.
Ответ: 1680 м^2.

8.6(2) $a = x$ (м); $b = x+25$ (м); $a_1 = x+4$ (м);
$b_1 = x+30$ (м); $(x+4)(x+30)-x(x+25) = 300$;
$x^2+34x+120-x^2-25x = 300$; $9x = 180$; $x = 20$;
$S_1 = 24 \cdot 50 = 1200$
Ответ: 1200 м^2.

8.7(1)

	v км/ч	t ч	s км
движение автомобиля	x	2	$2x$
движение автобуса	$x-20$	$2\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}(x-20)$

$AB = 300$ км.

$$2x + \frac{7}{3}(x-20) = 300\ ;$$

$3 \cdot 2x+7x-140 = 900$;
$13x = 1040$;
$x = 80$;
80 км/ч — скорость автомобиля.
Ответ: 80 км/ч.

8.7(2) $AB = 205$ км

	v км/ч	t ч	s км
движение автобуса	x	$1\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}x$
движение мотоцикла	$x-20$	1	$x-20$

$\frac{5}{4}x + x - 20 = 205$;

$5x + 4x - 80 = 820$;

$9x = 900$; $x = 100$.

100 км/ч — скорость автобуса.

Ответ: 100 км/ч.

8.8(1)

	v км/ч	t_1 ч	t_2 ч
движение 1 пешехода	x	2,5	$1\frac{2}{3}$
движение 2 пешехода	y	2	$2\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} 2,5x + 2y = 20 \\ \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 4y = 40 \\ 5x + 8y = 60 \end{cases}$$

$4y = 20$; $y = 5$; $x = 4$.

Ответ: 4 км/ч; 5 км/ч.

8.8(2)

	v (км/ч)	t_1 (ч)	t_2 (ч)
движение 1 велосипедиста	x	1 ч 48 мин	36 мин
движение 2 велосипедиста	y	48 мин	1 ч 36 мин

$$\begin{cases} 1\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}y = 36 \\ \frac{3}{5}x + 1\frac{3}{5}y = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{9}{5}x + \frac{4}{5}y = 36 \\ \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}y = 36 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x + 4y = 180 \\ 3x + 8y = 180 \end{cases} \Bigg| \cdot -2$$

$$\begin{cases} -18x - 8y = -360 \\ 3x + 8y = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$$

Ответ: 12 км/ч; 18 км/ч.

8.9(1) x км — расстояние до железнодорожной станции

$\frac{x}{15}-\frac{1}{2}=\frac{x}{40}+2$; $\frac{2x-15}{30}=\frac{x+80}{40}$;

$80x - 15\cdot 40 = 30x + 30\cdot 80$;

$8x-60 = 3x+240$;

$5x = 300$; $x = 60$.

Ответ: 60 км.

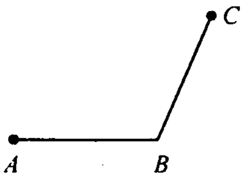
8.9(2) x км — расстояние от дома до стадиона.

$\frac{x}{5}-1=\frac{x}{10}+\frac{1}{2}$;

$2x-10 = x+5$; $x = 15$.

Ответ: 15 км.

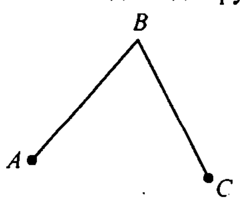
8.10(1) 12 км/ч — скорость на горизонтальном участке
8 км/ч — скорость на подъеме; 15 км/ч — скорость на спуске.
$AB = x$ км; $BC = y$ км.



$\begin{cases}\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1\\ \frac{x}{12}+\frac{y}{15}=\frac{23}{30}\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{y}{8}-\frac{y}{15}=1-\frac{23}{30}\\ \frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{7y}{120}=\frac{7}{30}\\ \frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1\end{cases}$ $\begin{cases}y=4\\ x=6\end{cases}$

Ответ: 10 км.

8.10(2) $AB = x$ км; $BC = y$ км; 3 км/ч — скорость пешехода в гору; 6 км/ч — скорость пешехода под гору.



$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=\frac{5}{3}\\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=\frac{7}{3}\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=10\\ x+2y=14\end{cases}\Bigg| -2$ $\begin{cases}2x+y=10\\ -2x-4y=-28\end{cases}$ $\begin{cases}y=6\\ x=2\end{cases}$

Ответ: 8 км.

8.11(1)

	v км/ч	t ч
движение автобуса	x	$\frac{60}{x}$
движение автомобиля	$1{,}2x$	$\frac{60}{1{,}2x}$

$\frac{60}{1{,}2x}+\frac{1}{20}+\frac{7}{60}=\frac{60}{x}$; $\frac{60}{x}-\frac{50}{x}=\frac{1}{6}$; $\frac{10}{x}=\frac{1}{6}$; $x = 60$; $1{,}2x = 72$;

$v_1 = 60$ км/ч; $v_2 = 60\cdot 1{,}2 = 72$ км/ч.

Ответ: 60 км/ч; 72 км/ч.

8.11(2) x км/ч — скорость 1-го автобуса;

$1{,}5x$ км/ч — скорость 2-го автобуса;

$\frac{80}{x}$ ч — время движения 1-го автобуса;

$\frac{80}{1{,}5x}$ ч — время движения 2-го автобуса;

$\frac{80}{1{,}5x}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{80}{x}$; $\frac{80}{x}=\frac{80}{1{,}5x}+\frac{1}{3}$; $\frac{80}{x}=\frac{160}{3x}+\frac{1}{3}$;

$240 = 160+x$; $x = 80$. 80 км/ч $= v_1$, $v_2 = 80\cdot 1{,}5 = 120$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч; 120 км/ч.

8.12(1)

	задач, решенных за 1 день	кол-во дней	кол-во решенных задач
по норме	12	x	$12x$
решал в действительности	20	$x-5$	$20(x-5)$

$20(x-5)-12x = 20$; $20x-100-12x = 20$;

$8x = 120$; $x = 15$;

$20\cdot 10 = 200$ задач решил Николай.

Ответ: 200 задач.

8.12(2)

	кол-во слов, выученных в 1 день	кол-во дней	кол-во выученных слов
норма	24	x	$24x$
в действительности	30	$x-2$	$30(x-2)$

$24x = 30(x-2)+18$; $24x = 30x-60+18$; $6x = 42$;
$x = 7$; $24 \cdot 7 = 168$ слов должна была выучить Ирина.
Ответ: 168 слов.

8.13(1) За x мин. можно сделать всю работу на 1-й машине, работая в отдельности, за $(x+15)$ мин. — на 2-й.

Примем объем работы за 1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{10}$;
$10(x + 15 + x) = x^2 + 15x$;
$20x + 150 = x^2 + 15x$;
$x^2 - 5x - 150 = 0$;
$x_1 = -10$; $x_2 = 15$.
x_1 не удовлетворяет условию задачи.
Ответ: за 15 мин.; за 30 мин.

8.13(2) За x мин. можно сделать копию на 1 аппарате, работая в отдельности, за $x + 30$ мин. — на 2-м.
$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+30}=\frac{1}{20}$; $20(2x+30) = x(x+30)$;
$40x+600 = x^2+30x$;
$x^2-10x-600 = 0$;
$x_1 = -20$; $x_2 = 30$.
Ответ: за 30 мин. и за 1 час.

8.14(1) Фирма A может выполнить заказ за x дней, фирма B — за $x + 4$ дня.

Объем работы примем за 1.
$24\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)=5$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{5}{24}$; $\frac{2x+4}{x^2+4x}=\frac{5}{24}$;
$24(2x+4) = 5(x^2+4x)$;
$48x+96 = 5x^2+20x$;
$5x^2-28x-96 = 0$;
$$x=\frac{14\pm\sqrt{196+480}}{5}=\frac{14\pm 26}{5}$$
$x_1 = 8$; $x_2<0$;
$x = 8$; $x + 4 = 12$.
Ответ: Фирма A — за 8 дней; фирма B — за 12 дней.

8.14(2) Фирма A может вспомнить заказ за x дней, фирма B за $(x + 10)$ дней.

Тогда их производительности $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+10}$.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}}=8\,;\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}\,;\ \frac{2x+10}{x^2+10x}=\frac{1}{12}\,;$$

$x^2 + 10x = 24x + 120;$

$x^2 - 14x - 120 = 0;$

$D = 196 + 4 \cdot 120 = 676 = 26^2;$

$x = \frac{14 \pm 26}{2}$; $x = 20$; $y = 30$

Ответ: 20 дней; 30 дней.

8.15(1) $x+6$ дней потребовалось бы 1-му строителю, x дней потребовалось бы 2-му строителю.

Примем объем работы за 1.

Тогда $\frac{14}{x+6}+\frac{11}{x}=1$; $14x+11x+66 = x^2+6x$, $x^2-19x-66 = 0$;

$x_1 = 22$; $x_2 = -3 < 0$;

$x = 22$; $x + 6 = 28$.

Ответ: за 28 дней и за 22 дня.

8.15(2) x дней потребуется 1-му мастеру на выполнение работы, работая отдельно, $x+7$ дней — второму. $\frac{15}{x}+\frac{8}{x+7}=1$,

$15x+105+8x = x^2+7x;$

$x^2-16x-105 = 0;$

$x_1 = 21$; $x_2 = -5 < 0$;

$x = 21$; $x + 7 = 28$.

Ответ: за 28 дней и за 21 день.

8.16(1) 1-й автомат может упаковать дневную норму за x ч.; 2-й — за y ч. Примем объем работы за 1.

$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12};\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{5};\end{cases}$ Пусть $\frac{1}{x}=a; \frac{1}{y}=b$, тогда $\begin{cases}a+b=\frac{1}{12}\\ 2a+3b=\frac{1}{5}\end{cases}\Bigg| \begin{matrix}-2\\ \\ \end{matrix}$;

$$\begin{cases}-2a-2b=-\frac{1}{6}\\ 2a+3b=\frac{1}{5}\end{cases};\ \begin{cases}b=\frac{1}{30}\\ a=\frac{1}{20}\end{cases};\ \begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{20}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{30}\end{cases};\ \begin{cases}x=20\\ y=30\end{cases}$$

Ответ: 1-й автомат за 20 ч.; 2-й — за 30 ч.

8.16(2) За x ч. может набрать весь текст 1-й оператор, работая отдельно; за y ч — 2-й. Примем объем работы за 1.

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}; \\ \frac{3}{x}+\frac{12}{y}=\frac{3}{4}; \end{cases} \text{ Пусть } \frac{1}{x}=a; \frac{1}{y}=b \text{, тогда } \begin{cases} a+b=\frac{1}{8} \\ 3a+12b=\frac{3}{4} \end{cases} \Bigg| \cdot(-3);$$

$$\begin{cases} -3a-3b=-\frac{3}{8} \\ 3a+12b=\frac{3}{4} \end{cases}; \begin{cases} 9b=\frac{3}{8} \\ a=\frac{1}{8}-b \end{cases}; \begin{cases} b=\frac{1}{24} \\ a=\frac{1}{12} \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{y}=\frac{1}{24} \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{12} \end{cases}; \begin{cases} y=24 \\ x=12 \end{cases}$$

Ответ: 1-й оператор за 12 ч., 2-й — за 24 ч.

8.17(1) За Андреева было отдано x голосов; за Васильева было отдано $1{,}5x$ голосов; за Борисова было отдано $4 \cdot 2{,}5x = 10x$ голосов. Победитель — Борисов.

Всего проголосовало $x+1{,}5x+10x = 12{,}5x$ человек.

$12{,}5x$ — 100%; $10x$ — a%; $a=\frac{1000x}{12{,}5x}=80\%$

Ответ: 80%.

8.17(2) За Дмитриева было отдано x голосов; за Гаврилова — $3x$ голосов; за Егорова — $9(x+3x)=36x$ голосов.

Всего проголосовало $x+3x+36x = 40x$ человек.

$40x$ — 100%; $36x$ — a%; $a=\frac{3600x}{40x}=90\%$.

Ответ: 90%.

8.18(1) Немецкий язык изучают $8k$ человек; французский язык изучают $5k$ человек; английский язык — $12k$ человек. Вся группа составляет 100%; $12k + 8k + 5k = 25k$ (слушателей).

$25k$ — 100%; $5k$ — x%; $x=\frac{5k \cdot 100}{25k}=20$ (%).

Французский язык изучают 20% слушателей.

Ответ: 20% слушателей.

8.18(2) $11k$ человек занимается самбо; $6k$ человек занимается дзюдо; $8k$ человек занимается карате.

100% количество всех учащихся; $11k+6k+8k = 25k$ (учащихся);

$25k$ — 100%; $11k$ — x%; $x=\frac{11k \cdot 100}{25k}=44$(%).

Ответ: 44% учащихся.

8.19(1)

	Сумма вклада в рублях	Годовой %	Вклад на конец года в рублях
1-й счет	x	8%	$x+0,08x = 1,08x$
2-й счет	$3000-x$	10%	$(3000-x)+0,1(3000-x) = 1,1(3000-x)$

$1,08x + 1,1(3000 - x) = 3260;$

$1,08x + 3300 - 1,1x = 3260;$

$0,02x = 40;$

$x = 2000.$

Ответ: 1000 р., 2000 р.

8.19(2)

	Было	Уменьшилось в %	Стало
ДТП в 1-м городе	x	10%	$x-0,1x$
ДТП во 2-м городе	$900-x$	30%	$(900-x)-0,3(900-x)$

$0,9x+0,7(900-x) = 740;$

$9x+7(900-x) = 7400;$

$9x-7x+6300 = 7400;$

$2x = 1100;$

$x = 550$

Ответ: 550; 350.

8.20(1)

	В прошлом году	Изменилось в %	Стало
Число заявлений, поданных на 1 ф-т	x	Уменьшилось на 20%	$x-0,2x = 0,8x$
Число заявлений, поданных на 2 ф-т	$1100-x$	Увеличилось на 30%	$(1100-x)+$ $+0,3(1100-x) =$ $= 1,3(1100-x)$

$0,8x+1,3(1100-x) = 1130;$

$8x+13(1100-x) = 11300;$

$8x+14300-13x = 11300;$

$5x = 3000;$

$x = 600.$

Число заявлений, поданных в текущем году на 1 ф-т — $600 \cdot 0,8 = 480$; на 2 ф-т — 650.

Ответ: 480; 650.

8.20(2)

	Было	Изменилось в %	
Количество депутатов 1-й партии	x	Увеличилось на 15%	$x+0,15x = 1,15x$
Количество депутатов 2-й партии	$60-x$	Уменьшилось на 20%	$0,8(60-x)$

$1,15x+0,8(60-x) = 55;$

$1,15x+48-0,8x = 55;$

$0,35x = 7;$

$x = 20.$

В городской думе после выборов в 1-й партии —

$20\cdot 1,15 = 23$ (чел); во 2-й партии — 32 чел.

Ответ: 23; 32.

8.21(1) x кг — количество сена с влажностью 20%. Значит на x кг сена приходится $0,2x$ кг воды и $0,8x$ кг сухого вещества. $0,8x$ кг составляют 40% от количества свежескошенной травы. Тогда $0,8x$ кг — 40%; 100% свежескоженной травы — $\dfrac{0,8x\cdot 100}{40} = 2x;$

$2x = 1$ (т); $x = 0,5$ (т).

Ответ: 500 кг.

8.21(2)

В 1700 г. свежих грибов содержится 10% сухого вещества, что составляет 170 г. Эта масса (170 г) составляет 85% массы высушенных грибов. Следовательно, вся масса высушенных грибов — $\dfrac{170}{85}\cdot 100 = 200$ (г).

Ответ: 200 г.

8.22(1)

В сиропе содержится $180:4 = 45$ (г) сахара; после добавления x г воды получится $(180+x)$ г сиропа и в нем сахара $0,2(180+x)$ г., следовательно $(180+x)0,2 = 45$; $36+0,2x = 45$; $0,2x = 9$; $x = 45$.

Ответ: 45 г.

8.22(2)

Пусть надо добавить x г сиропа, в нем будет содержаться $0,25x$ г сахара. Масса полученного раствора составит $(200+x)$ г, из которых сахара $(200+x)0,05$ г.

Далее: $0,25x = (200+x)\cdot 0,05$; $5x = 200+x$; $4x = 200$; $x = 50$.

Ответ: 50 г.

8.23(1) Было x г 75% раствора кислоты, в нем содержится $0{,}75x$ (г) кислоты. В 30 г 15%-го раствора кислоты содержится $30\cdot 0{,}15 = 4{,}5$ (г) кислоты. В $(30+x)$ г 50%-го раствора содержится $0{,}5(30+x)$ г кислоты.

Следовательно, $0{,}75x+4{,}5 = 0{,}5(x+30)$; $1{,}5x+9 = x+30$;

$0{,}5x = 21$; $x = 42$.

Ответ: 42 г.

8.23(2) Было x г 15%-го раствора соли, в нем $0{,}15x$ (г) — соли. В 50 г 60%-го раствора соли содержится $50\cdot 0{,}6 = 30$ (г соли). В $(50+x)$ г раствора должно содержаться $0{,}4(50+x)$ г соли, т.е. $0{,}15x+30 = 0{,}4(50+x)$; $0{,}15x+30 = 20+0{,}4x$; $10 = 0{,}25x$; $x = 40$.

Ответ: 40 г.

8.24(1)

$v_1>v_2$ на 200 м/мин, т.е. на $200\cdot 60 = 12000$ м/ч = 12 км/ч;

$10\text{ с} = \frac{1}{360}$ ч ; $v_1 = x$ км/ч; $v_2 = (x+12)$ км/ч.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+12}=\frac{1}{360};\quad \frac{x+12-x}{x(x+12)}=\frac{1}{360}$$

$x(x+12) = 12\cdot 360$;

$x^2+12x-4320 = 0$.

$x = -6 \pm \sqrt{36+4320} = -6 \pm 66$;

$x_1 = -72$; $x_2 = 60$.

x_1 не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 60 км/ч; 72 км/ч.

8.24(2) $v_1>v_2$ на 5 м/мин, т.е. на $5\cdot 60$ м/ч $= 300$ м/ч $= 0{,}3$ км/ч.

$$50\text{ с} = \frac{50}{3600}\text{ ч} = \frac{1}{72}\text{ ч};$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+0{,}3}=\frac{1}{72};$$

$$\frac{x+0{,}3-x}{x(x+0{,}3)}=\frac{1}{72};$$

$x(x+0{,}3) = 0{,}3\cdot 72$;

$x^2+0{,}3x-21{,}6 = 0$;

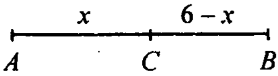
$10x^2+3x-216 = 0$;

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+8640}}{20}=\frac{-3\pm 93}{20};$$

$x_1 = 4{,}5$; $x_2 = -4{,}8 < 0$.

Ответ: 4,5 км/ч; 4,8 км/ч.

8.25(1)



$AB = 6$ км; $AC = x$ км; $CB = 6–x$ км; C — место встречи.

Движение после встречи	s км	t ч	v км/ч
Движение пешехода, шедшего из A	$6–x$	24 мин. $= \frac{24}{60}$ ч. $= \frac{2}{5}$ ч.	$\frac{6-x}{\frac{2}{5}} = \frac{5(6-x)}{2}$
Движение пешехода, шедшего из B	x	54 мин. $= \frac{54}{60}$ ч. $= \frac{9}{10}$ ч.	$\frac{x}{\frac{9}{10}} = \frac{10x}{9}$

Время движения пешеходов до встречи одинаково

$\frac{2x}{5(6-x)} = \frac{(6-x)\cdot 9}{10x}$; $20x^2 = 45(6–x)^2$; $4x^2 = 9(6–x)^2$;

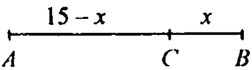
$(2x)^2 = (3(6–x))^2$; $2x = 18–3x$; $5x = 18$;

$x = 3{,}6$; $2x = 3x–18$;

$x = 18$; $x < 6$ по условию.

Ответ: 3,6 км.

8.25(2)



Движение после встречи	s км	t ч	v км/ч
Движение велосипедиста, выехавшего из A	x	20 мин. $= \frac{1}{3}$ ч.	$\frac{x}{\frac{1}{3}} = 3x$
Движение велосипедиста, выехавшего из B	$15–x$	45 мин. $= \frac{3}{4}$ ч.	$\frac{15-x}{\frac{3}{4}} = \frac{4(15-x)}{3}$

Время движения велосипедистов до встречи одинаково

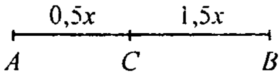
$\frac{15-x}{3x} = \frac{3x}{4(15-x)}$; $9x^2 = 4(15–x)^2$; $(3x)^2 = (2(15–x))^2$;

$3x = 30–2x$; $5x = 30$; $x = 6$; $3x = 2x–30$;

$x = –30 < 0$.

Ответ: 6 км.

8.26(1)

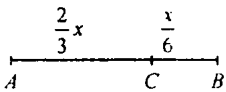


$v_в = x$ км/ч; $BC = 1{,}5x$ км; $AC = 0{,}5x$ км; $v_т = \dfrac{0{,}5x}{1{,}5} = \dfrac{x}{3}$ км/ч;

$t_т = 1{,}5x : \dfrac{x}{3} = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$ (ч) — время, затраченное туристом на прохождение пути CB; на весь путь турист затратил $1{,}5 + 4{,}5 = 6$ (ч).

Ответ: 6 ч.

8.26(2)



$v_а = x$ км/ч; $AC = \dfrac{2}{3}x$ км; $CB = \dfrac{x}{6}$ км

$v_в = \dfrac{x}{6} : \dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{4}$ км/ч; $t_в = \dfrac{2x}{3} : \dfrac{x}{4} = \dfrac{8}{3}$ ч. $= 2\dfrac{2}{3}$ ч. = 2 ч. 40 мин.

Ответ: 2 ч. 40 мин.

8.27(1) $AB = x$ км; $BC = (9-x)$ км. Скорость пешехода на подъеме y км/ч; скорость пешехода на спуске $y+2$ км/ч.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{9-x}{y+2} = 1\dfrac{5}{6}; \\ \dfrac{9-x}{y} + \dfrac{x}{y+2} = 1\dfrac{11}{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{xy+2x+9y-xy}{y(y+2)} = \dfrac{11}{6}; \\ \dfrac{(9-x)(y+2)+xy}{y(y+2)} = \dfrac{23}{12}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x+9y}{y(y+2)} = \dfrac{11}{6}; \\ \dfrac{9y-xy+18-2x+xy}{y(y+2)} = \dfrac{23}{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} 6(2x+9y) = 11y(y+2); \\ 12(9y+18-2x) = 23y(y+2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x+54y = 11y^2+22y; \\ 108y+216-24x = 23y^2+46y; \end{cases} \quad \begin{cases} 12x+32y-11y^2 = 0 \\ -24x+62y-23y^2+216 = 0 \end{cases} \Big| \, 2;$$

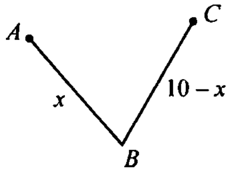
$$\begin{cases} 24x+64y-22y^2 = 0; \\ -24x+62y-23y^2+216 = 0; \end{cases}$$ 8) $126y-45y^2+216 = 0$; $14y-5y^2+24 = 0$;

$5y^2-14y-24 = 0$; $y = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+120}}{5} = \dfrac{7 \pm 13}{5}$; $y_1 = 4$; $y_2 < 0$

$\frac{x}{4}+\frac{9-x}{6}=\frac{11}{6}$; $3x+18-2x=22$; $x=4$.

Ответ: длина подъема 4 км; скорость на подъеме 4 км/ч; скорость на спуске 6 км/ч.

8.27(2) $AB=x$ км; $BC=10-x$ км



Скорость туриста на подъеме y км/ч; скорость туриста на спуске $y+3$ км/ч.

I. $\begin{cases}\frac{x}{y+3}+\frac{10-x}{y}=2\frac{2}{3},\\ \frac{10-x}{y+3}+\frac{x}{y}=2\frac{1}{3},\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{xy+(y+3)(10-x)}{y(y+3)}=\frac{8}{3};\\ \frac{x(y+3)+y(10-x)}{y(y+3)}=\frac{7}{3};\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{xy+10y+30-xy-3x}{y(y+3)}=\frac{8}{3};\\ \frac{xy+3x+10y-xy}{y(y+3)}=\frac{7}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}3(10y+30-3x)=8(y^2+3y);\\ 3(3x+10y)=7(y^2+3y);\end{cases}$

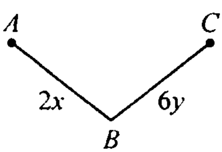
$\begin{cases}30y+90-9x=8y^2+24y;\\ 9x+30y=7y^2+21y;\end{cases}$ $\begin{cases}-9x+6y-8y^2+90=0;\\ 9x+9y-7y^2=0;\end{cases}$

$15y-15y^2+90=0$; $y^2-y-6=0$; $y_1=3$; $y_2=-2<0$; -2 не удовлетворяет условию задачи; $y=3$.

II. $\frac{x}{6}+\frac{10-x}{3}=\frac{8}{3}$; $x+20-2x=16$; $x=4$.

Ответ: длина спуска 4 км, скорость на подъеме 3 км/ч; скорость на спуске 6 км/ч.

8.28 (1) x км/ч — скорость автомобиля при движении с горы;
y км/ч — скорость автомобиля в гору;
$2x$ км — путь с горы;
$6y$ км — путь в гору.



$\frac{6y}{x}+\frac{2x}{y}=13$, $\frac{x}{y}=a$; $2a+\frac{6}{a}-13=0$;

$2a^2-13a+6=0$; $a=\frac{13\pm\sqrt{169-48}}{4}=\frac{13\pm 11}{4}$;

$a_1=6$; $a_2=\frac{1}{2}$.

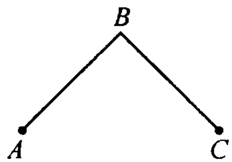
Ответ: в 6 раз.

8.28(2)

x км/ч — скорость автобуса в гору;

y км/ч — скорость автобуса с горы.

$AB=5x$ км; $BC=3y$ км



$\frac{3y}{x}+\frac{5x}{y}=16$; $\frac{y}{x}=a$; $3a+\frac{5}{a}=16$; $3a^2-16a+5=0$;

$a=\frac{8\pm\sqrt{64-15}}{3}=\frac{8\pm 7}{3}$; $a_1=5$; $a_2=\frac{1}{3}$.

Ответ: в 5 раз.

8.29(1) $v_1=5$км/ч; $v_2=4$ км/ч; $v_3=x$ км/ч; 3-й турист догоняет 2-го туриста через y ч после своего выхода;

1) $\begin{cases} xy=4\left(y+\frac{1}{2}\right) \\ x(y+4)=5(y+5) \end{cases}$; 2) $\begin{cases} xy=4y+2 \\ xy+4x=5y+25 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} xy=4y+2 \\ xy=5y-4x+25 \end{cases}$; $4y+2=5y-4x+25$; $4x-y-23=0$; $y=4x-23$.

4) $\begin{cases} y=4x-23 \\ x(4x-23)=4(4x-23)+2 \end{cases}$;

$4x^2-23x=16x-92+2$; $4x^2-39x+90=0$;

$x=\frac{39\pm\sqrt{1521-1440}}{8}=\frac{39\pm 9}{8}$;

$x_1=6$; $x_2=3{,}75<4$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6 км/ч.

8.29(2) $v_1 = 50$ км/ч; $v_2 = 60$ км/ч; $v_3 = x$ км/ч

y ч. — время, за которое 3-я машина догнала 1-ю.

$$\begin{cases} xy = 50(y+1) \\ x\left(y+1\frac{1}{3}\right) = 60\left(y+2\frac{1}{3}\right) \end{cases} \text{(I)}; \quad \begin{cases} xy = 50(y+1) \\ x\left(y+\frac{4}{3}\right) = 60\left(y+\frac{7}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 50(y+1) \\ x(3y+4) = 60(3y+7) \end{cases}; \quad \begin{cases} x = \dfrac{60(3y+7)}{3y+4} \\ y\cdot\dfrac{60(3y+7)}{3y+4} = 50(y+1) \end{cases};$$

$$\frac{6y(3y+7)}{3y+4} = 5(y+1);$$

$18y^2+42y = (3y+4)(5y+5)$;

$18y^2+42y = 15y^2+15y+20+20y$; $3y^2+7y-20 = 0$;

$$y = \frac{-7\pm\sqrt{49+240}}{6} = \frac{-7\pm17}{6};$$

$y_1 = -4$; $y_2 = \frac{5}{3}$; y_1 не удовлетворяет условию задачи.

При $y = 1\frac{2}{3}$ уравнение (I) имеет вид: $3x = 60\cdot4$; $x = 80$.

Ответ: 80 км/ч.

8.30(1) v_1 км/ч — скорость грузовика; v_2 км/ч — скорость легкового автомобиля; t ч. — время, которое понадобится легковому автомобилю, чтобы догнать грузовик. Тогда $v_2t = (\frac{1}{2}+t)v_1$ или $(v_2-v_1)t = v_1\cdot0{,}5$ (I). s_1 км — путь грузовика после первой встречи до второй встречи: $s_1 = 30 - 6 = 24$ км.

s_2 км — путь легкового автомобиля после первой встречи до второй встречи: $s_2 = 30 + 6 = 36$ км.

Пусть t_1 — время движения автомобилей между первой и второй встречами; тогда $v_2 = \frac{36}{t_1}$ км/ч, $v_1 = \frac{24}{t_1}$ км/ч.

Подставим значения v_2 и v_1 в уравнение (I):

$$\left(\frac{36}{t_1}-\frac{24}{t_1}\right)t = \frac{24}{t_1}\cdot0{,}5; \quad \frac{12t}{t_1} = \frac{12}{t_1}; \quad t = 1$$

Ответ: 1 час.

8.30(2) v_1 км/ч — скорость 1-го маршрутного такси; v_2 км/ч — скорость 2-го маршрутного такси $v_2>v_1>0$. t ч. — время, которое понадобится 2-му маршрутному такси, чтобы догнать 1-е маршрутное такси. $(v_2-v_1)t = v_1 \cdot 0,2$ (I); $s_2 = 35$ км; $s_1 = 25$ км

s_2 км и s_1 км — пути, пройденные каждым маршрутным такси между двумя встречами. Тогда: $\frac{35}{v_2} = \frac{25}{v_1}$; $v_2 = \frac{7}{5}v_1$. Далее: из (1) имеем: $\frac{2}{5}v_1 \cdot t = v_1 \cdot \frac{1}{5}$; $t = \frac{1}{5} : \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$ ч.

Ответ: 30 мин.

8.31(1) Примем путь AB за 1; $v_{\text{плота}} = v_{\text{теч.реки}} = \frac{1}{12}$ км/ч;

$v_{\text{лодки по теч}} = v_{\text{в стояч. воде}} + v_{\text{теч. реки}} = \frac{1}{3}$ км/ч; $v_{\text{в стояч. воде}} = x$ км/ч;

$\frac{1}{3} = x + \frac{1}{12}$; $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$; $x = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ км/ч — скорость лодки в стоячей воде. Все расстояние AB моторная лодка преодолеет за $1 : \frac{1}{4} = 4$ (часа). **Ответ:** 4 ч.

8.31(2) Примем путь AB за 1; $v_{\text{плота}} = v_{\text{теч.реки}} = \frac{1}{6}$ (км/ч); x (км/ч) — скорость лодки в стоячей воде; $v_{\text{лодки против течения}} = \frac{1}{2}$ (км/ч);

$v_{\text{лодки против теч}} = v_{\text{в стояч. воде}} - v_{\text{теч. реки}}$: $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{6}$; $x = \frac{2}{3}$ (км/ч). Искомое время: $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ (ч). За 1,5 ч. моторная лодка преодолеет путь AB.

Ответ: 1,5 ч.

8.32(1) Примем расстояние AB за 1.

$v_{\text{катера в стоячей воде}} > v_{\text{пл.}}$ в 4 раза: $v_{\text{собств. катера}} = 4v_{\text{плота (течения)}}$

$v_{\text{катера по теч}} > v_{\text{пл.}}$ в 5 раз: $v_{\text{катера по теч.}} = 5v_{\text{плота (течения)}}$

$v_{\text{катера против теч.}} > v_{\text{пл.}}$ в 3 раза; $v_{\text{катера против теч.}} = 3v_{\text{плота (течения)}}$

1) Плот движется навстречу катеру $\frac{v_{\text{пл}}}{v_{\text{кат}}} = \frac{1}{3}$. Следовательно, плот к моменту встречи проплыл $\frac{1}{4}$ пути, а катер $\frac{3}{4}$ пути.

2) Плот и катер плывут по течению. $\frac{v_{пл}}{v_{кат}} = \frac{1}{5}$. Следовательно, плот к моменту возвращения катера в пункт B проплыл $\frac{1}{5}$ от $\frac{3}{4}$ пути, т.е. $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$.

Всего плот проплыл от A к B $\frac{3}{20} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$ пути.

8.32(2) Примем расстояние AB за 1.
$v_{б.\ собств.} > v_{пл.}$ в 3 раза; $v_{б.\ собств.} = 3v_{плота\ (течения)}$
$v_{б.\ по\ теч.} > v_{пл.}$ в 4 раза; $v_{б.\ по\ теч.} = 4v_{плота\ (течения)}$
$v_{б.\ против\ теч.} > v_{пл.}$ в 2 раза; $v_{б.\ против\ теч.} = 2v_{плота\ (течения)}$

1) Баржа движется против течения навстречу плоту $\frac{v_{пл.}}{v_б} = \frac{1}{2}$

Плот проплыл $\frac{1}{3}$ расстояния AB, баржа проплыла $\frac{2}{3}$ расстояния AB.

2) Баржа и плот движутся в одном направлении $\frac{v_{пл.}}{v_б} = \frac{1}{4}$

К моменту возвращения баржи в пункт A плот проплыл $\frac{1}{4}$ расстояния от $\frac{2}{3}$, т.е. $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. Всего плот проплыл $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, и ему останется проплыть $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ расстояния от A до B.

Ответ: $\frac{1}{2}$ пути.

8.33(1) 3 км/ч — скорость течения реки; x км/ч — собственная скорость катера; $v_{по\ теч.} = 3+x$ км/ч, $v_{против\ теч.} = x-3$ км/ч
Примем путь от A до B за 1.
$s_{кат.} = 2s_{по\ теч.} + s_{против\ теч.}$
$\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3}$; $\frac{2x-6+x+3}{x^2-9} = \frac{1}{3}$; $\frac{3x-3}{x^2-9} = \frac{1}{3}$; $9x-9 = x^2-9$;
$9x-x^2 = 0$; $x(9-x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
x_1 не удовлетворяет условию задачи.
Ответ: 9 км/ч.

8.33(2) 2 км/ч — скорость течения реки; x км/ч — собственная скорость теплохода; $v_{\text{по теч.}} = x+2$ км/ч; $v_{\text{против теч}} = x-2$ км/ч.

Примем расстояние от A до B за 1. $S_{\text{тепл}} = 3S_{\text{по теч.}}+2S_{\text{против теч}}$

$\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{2}$; $\frac{3x-6+2x+4}{x^2-4}=\frac{1}{2}$; $\frac{5x-2}{x^2-4}=\frac{1}{2}$;

$10x-4 = x^2-4$; $10x-x^2 = 0$; $x(10-x) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 10$.

Ответ: 10 км/ч.

8.34(1) За 1 ч. 1-я мельница может смолоть $\frac{38}{6}=\frac{19}{3}$ ц. пшеницы; 2-я — $\frac{32}{5}$ ц.; 3-я — 5 ц.

133 т = 1330 центнеров; $\frac{19}{3}t+\frac{32}{5}t+5t=1330$;

t — время помола; $t(95 + 96 + 75) = 1330\cdot15$;

$266t = 1330 \cdot 15$; $2t = 150$; $t = 75$.

$75\cdot\frac{19}{3}=475$ (ц.); $75\cdot6{,}4 = 480$ (ц.); $75\cdot5 = 375$ (ц.)

Ответ: 475 ц.; 480 ц.; 375 ц.

8.34(2) За 1 час Маша печатает 10 стр., Таня — 8 стр., Оля — 9 стр.

Пусть t — время печатания, тогда $(10 + 8 + 9)t = 54$; $t=\frac{54}{27}=2$ (ч).

За 2 часа Маша напечатает 20 стр., Таня — 16 стр., Оля — 18 стр.

Ответ: 20 стр.; 16 стр.; 18 стр.

8.35(1) Каждая из бригад, работая отдельно, может разгрузить вагон за x ч.; y ч.; z ч. и u ч. Примем объем работы за 1.

$$\begin{cases}\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{4} & (1)\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{3} & (2);\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} & (3)\end{cases} \qquad (2)-(1) \quad \begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12};\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6};\end{cases}$$

$\frac{2}{x}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$; $\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{x}=\frac{1}{8}$;

2) $\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}\right)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$ — такую часть работы могут выполнить за один час все четыре бригады, работая вместе. Всю работу они выполнят за $1:\dfrac{3}{8}=\dfrac{8}{3}$ часов.

Ответ: 2 ч. 40 мин.

8.35(2) Каждый из насосов, работая отдельно, может откачать воду за x мин., y мин., z мин. и u мин. Примем объем работы за 1.

1) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10} & (1)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{12} & (2);\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{15} & (3)\end{cases}$ $(1)-(2)$ 2) $\begin{cases}\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{60}\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{15};\end{cases}$

$\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{12}$; $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{24}$; $(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{u})+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{3}{24}=\dfrac{1}{8}$ ($\dfrac{1}{8}$ всего объема воды откачают в минуту четыре насоса, работая вместе). Чтобы откачать всю воду, насосам понадобится $1:\dfrac{1}{8}=8$ минут.

Ответ: 8 мин.

8.36(1) m кг — масса свежих яблок. В m кг содержится 0,8 m воды и 0,2 m сухого вещества, составляющего 80% массы сушеных яблок.

Вся масса сушеных яблок составляет 0,2 m : 0,8 = $\dfrac{1}{4}m$ (кг).

Таким образом, из m кг свежих яблок получается $\dfrac{m}{4}$ кг сушеных, что составляет 25% первоначальной массы.

Усушка составляет $m-\dfrac{m}{4}=\dfrac{3}{4}m$, т.е. 75%.

Ответ: 75%.

8.36(2) m кг — свежих абрикосов; $0{,}4m$ (кг) — сушеных абрикосов; из $0{,}4m$ (кг) вода составляет 25%, т.е. $0{,}4m$: 4 = $0{,}1m$ (кг); а сухое вещество составляет 0,3 m кг, т.е. 0,3 массы свежих абрикосов или 0,3 · 100% = 30%. Значит свежие абрикосы содержат 70% воды.

Ответ: 70%.

8.37(1) 1) $x\%$ — концентрация 1-го раствора.

В 2-х кг. раствора содержится $2 \cdot 0{,}01x = 0{,}02x$ (кг) кислоты.

$y\%$ — концентрация 2-го раствора. В 6 кг. раствора содержится $6 \cdot 0{,}01y = 0{,}06y$ (кг) кислоты.

В 8 кг раствора содержится $8 \cdot 0{,}36 = 2{,}88$ кг кислоты.

$0{,}02x+0{,}06y = 2{,}88$; $2x+6y = 288$; $x+3y = 144$;

2) $0{,}01x+0{,}01y = 2 \cdot 0{,}32$; $x+y = 64$.

$$\begin{cases} x+3y=144 \\ x+y=64 \end{cases}; \begin{cases} 2y=80 \\ x=64-y \end{cases}; x = 24; y = 40$$

Ответ: 24% и 40%.

8.37(2) $x\%$ — концентрация 1-го сиропа; $y\%$ — концентрация 2-го сиропа.

$$\begin{cases} 0{,}01 \cdot 5x + 0{,}01 \cdot 7y = 12 \cdot 0{,}35 \\ 0{,}01x + 0{,}01y = 0{,}36 \cdot 2 \end{cases}; \begin{cases} 5x+7y=420 \\ x+y=72 \end{cases} \Bigg| -5;$$

$$\begin{cases} 5x+7y=420 \\ -5x-5y=-360 \end{cases}; \begin{cases} 2y=60 \\ x=72-y \end{cases}; \begin{cases} x=42 \\ y=30 \end{cases}$$

Ответ: 42% и 30%.

8.38(1) x г — масса 1-го раствора; $0{,}2x$ — масса кислоты; y г — масса 2-го раствора; $0{,}5y$ — масса кислоты.

$0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}3(x + y)$; $0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}3x + 0{,}3y$;

$0{,}1x = 0{,}2y$; $x = 2y$; $\dfrac{x}{y} = 2$; $x:y = 2:1$

Ответ: 2:1.

8.38(2) x кг — масса 1-го сплава; $0{,}7x$ — масса меди; y кг — масса 2-го сплава; $0{,}4x$ — масса меди.

$0{,}7x + 0{,}4y = 0{,}5(x + y)$; $0{,}7x + 0{,}4y = 0{,}5x + 0{,}5y$;

$0{,}2x = 0{,}1y$; $2x = y$; $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$; $x:y = 1:2$.

Ответ: 1:2.

8.39(1) x (р.) — закупочная цена; $\dfrac{3}{2}x$ (р.) — цена кружки в магазине; $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{2}x\right) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{5}x = \dfrac{9}{10}x$ (р.) — предновогодняя цена; $x - \dfrac{9}{10}x = \dfrac{1}{10}x$ (р.). $0{,}1x$ (р.) составляет 10% от x.

Ответ: Предновогодняя; на 10%

8.39(2) x (р.) — закупочная цена футболки; $x+0,4x = 1,4x$ (р.) — цена футболки в магазине; $1,4x-0,7x = 0,7x$ (р.) — цена после снижения. $x-0,7x = 0,3x$ (р.) — составляет 30% от x.

Ответ: цена в конце года; на 30%.

8.40(1) x (р.) — первоначальная цена 1 картины;

y (р.) — первоначальная цена 2 картины;

$\frac{6}{5}x$ (р.) — цена продажи 1 картины;

$\frac{3}{2}y$ (р.) — цена продажи 2 картины;

$\frac{13}{10}(x+y) = \frac{6}{5}x + \frac{3}{2}y$; $\frac{13}{10}x - \frac{6}{5}x = \frac{3}{2}y - \frac{13}{10}y$; $\frac{1}{10}x = \frac{1}{5}y$;

$5x = 10y$; $x = 2y$.

Ответ: Первоначальная стоимость 1-й картины в 2 раза больше, чем 2-й.

8.40(2) x (р.) — первоначальная стоимость питания; y (р.) — первоначальная стоимость проживания; $(x+y)$ р. — первоначальная цена путевки.

$\frac{3}{2}x$ (р.) — цена питания после подорожания;

$\frac{5}{4}y$ (р.) — цена проживания после подорожания;

$\left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y\right)$ — стоимость путевки после подорожания.

$140\% = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$; $\frac{7}{5}(x+y) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y$;

$\frac{3}{2}x - \frac{7}{5}x = \frac{7}{5}y - \frac{5}{4}y$; $\frac{x}{10} = \frac{3y}{20}$; $x = \frac{3}{2}y$.

Ответ: За питание платили в 1,5 раза больше, чем за проживание.

8.41(1) $x > 0$. x (р.) — цена апельсинов до снижения;

$0,7x$ (р.) — новая цена;

$2,8x$ (р.) — цена 2,8 кг по цене x р. за килограмм;

$2,8x : 0,7x = 4$ (кг).

Ответ: 4 кг.

8.41(2) x (р.) — первоначальная цена 1 кг фруктов;

$1,15x$ (р.) — новая цена 1 кг фруктов.

$\frac{230}{x}-\frac{230}{1,15x}=3$; $\frac{230}{x}-\frac{200}{x}=3$; $\frac{30}{x}=3$; $x=10$. 10 р. — первоначальная цена; 11,5 р. — новая цена; цена возросла на 1,5 р.

Ответ: 1,5 р.

8.42(1) 2000 р. — первоначальная цена товара; 20 р. — 1% от 2000 р.; $20a$ р. — a% от 2000 р.; $(2000-20a)$ р. — цена после 1-го снижения на a%. $(2000-20a)-\frac{2000-20a}{100}a=1805$ — цена после второго снижения на a%.

$(2000-20a)-(20-0,2a)a = 1805$; $2000-20a-20a+0,2a^2 = 1805$; $a^2-200a+975 = 0$; $a=100\pm\sqrt{10000-975}=100\pm95$;

$a_1 = 195$; $a_2 = 5$; a_1 не подходит по смыслу задания.

Ответ: 5%.

8.42(2) 6000 р. — первоначальная цена; 60 р. — 1% от 6000 р.; $60a$ р. — a% от 6000 р.; $(6000+60a)$ р. — цена после 1-го повышения на a%; $(6000+60a)+\frac{6000+60a}{100}a=6615$ — цена после 2-го повышения на a%. $6000+60a+(60+0,6a)a = 6615$; $6000+60a+60a+0,6a^2 = 6615$; $0,6a^2+120a-615 = 0$; $6a^2+1200a-6150 = 0$; $a^2+200a-1025 = 0$; $a=-100\pm\sqrt{10000+1025}=-100\pm105$;

$x_1 = 5$; $x_2 = -205$; x_2 не удовлетворяет условию задания.

Ответ: 5%.

8.43(1)

Число учеников	Было вчера	Стало сегодня
Присутствовало на уроке	$8x$	$8x-2$
Отсутствовало на уроке	x	$x+2$

Всего учеников в классе — $9x$. $x+2$ составляет $\frac{1}{5}$ часть от $8x-2$

$8x-2 = 5(x+2)$; $8x-2 = 5x+10$; $3x = 12$; $x = 4$.

В классе было 36 человек.

Ответ: 36.

8.43(2)

Число учеников	Было вчера	Стало сегодня
Присутствовало на уроке	$4x$	$4x+3$
Отсутствовало на уроке	x	$x-3$

$4x+3 = 9(x-3)$; $4x+3 = 9x-27$; $5x = 30$; $x = 6$.

Всего в классе было $5x$ учеников.

Ответ: 30 человек.

Раздел III. Тренировочные варианты экзаменационной работы

Работа № 1

Вариант 1

Часть 1

1. $100\% - 28\% - 31\% - 36\% = 5\%$

$\frac{5}{100} \cdot 320 = 16$ **Ответ:** Б.

2. А. $\frac{9}{20} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60} < 1$; Б. $\frac{27}{50} + \frac{2}{3} = \frac{81+100}{150} = \frac{181}{150} > 1$;

В. $\frac{4}{18} + \frac{6}{18} + \frac{3}{18} = \frac{13}{18} < 1$; Г. $0{,}84 < 1$. **Ответ:** Б.

3. $a < 0$; $b > 0$; $|a| > |b|$
Тогда $a + b < 0$; $2a < 0$;
$2b > 0$; $b - a > 0$;
$b - a > b + b = 2b$ **Ответ:** Г.

4. $\frac{1}{9}\sqrt{36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. **Ответ:** $\frac{2}{3}$.

5. t мин $= 60t$ с.; за $60t$ принтер распечатает $\frac{60t}{6} = 10t$ (стр.)

Ответ: Б.

6.

$$\frac{m-n}{m+n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} = \frac{(m-n)^2 - m^2 - n^2}{m^2-n^2} = \frac{m^2 - 2mn + n^2 - m^2 - n^2}{m^2-n^2} =$$

$$= -\frac{2mn}{m^2-n^2}.$$ **Ответ:** $-\frac{2mn}{m^2-n^2}$.

7. $\left(27 \cdot 3^{-4}\right)^2 = \left(3^3 \cdot 3^{-4}\right)^2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$. **Ответ:** А.

8. $3\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{2} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
Ответ: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

9. $\frac{x}{3} + \frac{x-1}{2} = 4$; $2x+3x-3 = 24$; $5x = 27$; $x = 5{,}4$.
Ответ: Г.

10. $S_{\text{прямоугольника}} = 56 \cdot 32$

Площадь 4 квадратов равна $4x^2$.

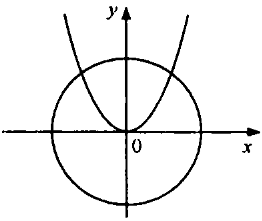
Условию задачи соответствует уравнение Г.

Ответ: г.

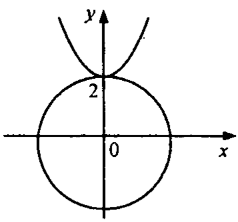
11. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 \end{cases}$

2) $x^2+y^2 = 4$; $y = x^2+2$

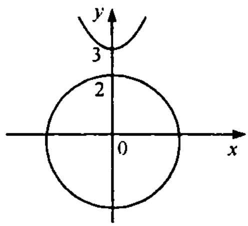
3) $x^2+y^2 = 4$; $y = x^2+3$



2 решения.



1 решение.



Нет решений.

Ответ:

1	2	3
в	б	а

12. $9x-3>10x-2$; $-x>1$; $x<-1$; $-4{,}9 < -1$; $-1{,}7 < -1$; $-1{,}1<-1$; $-0{,}7 > -1$.

Ответ: Г.

13. $a > b$ и $b \le c$, значит $b < a$ и $b \le c$. **Ответ:** Г.

14. Прогрессия 4; 8; 12; ... состоит из чисел, кратных 4. Поэтому число 34 не является членом этой прогрессии.

Ответ: В.

15. $f(0) = 2$ на всех графиках, $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$ на А. **Ответ:** А.

16. 10 р. — первоначальная цена, 12 р. — цена в конце месяца. Цена выросла на 2 р. 2 р. составляют $\frac{1}{5}$ часть от 10 р., т.е. 20%.

Ответ: В.

Часть 2 решена в сборнике (стр. 202–203).

Вариант 2

1. $100\% - 31\% - 35\% - 26\% = 8\%$

$\frac{8}{100} \cdot 400 = 32$. **Ответ:** В.

2. $\frac{1}{3}+\frac{47}{100}=\frac{100+141}{300}=\frac{241}{300}$; $\frac{241}{300}<1$. Проверка показывает, что суммы Б, В, Г больше 1. **Ответ:** А.

3. Наибольшим является число 24. **Ответ:** 5.

4. $\frac{\sqrt{18}}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9}}{6}=\frac{1}{2}$. **Ответ:** $\frac{1}{2}$.

5. t мин = $60t$ с. За $60t$ с принтер напечатает $\frac{60t}{4}=15t$ (стр.)

Ответ: Г.

6.

$$\frac{a^2+9}{a^2-9}-\frac{a+3}{a-3}=\frac{a^2+9-(a+3)^2}{a^2-9}=\frac{a^2+9-a^2-6a-9}{a^2-9}=-\frac{6a}{a^2-9}$$

Ответ: $-\frac{6a}{a^2-9}$.

7. $16\cdot\left(2^{-3}\right)^2=2^4\cdot2^{-6}=2^{-2}=\frac{1}{4}$. **Ответ:** Б.

8. $\sqrt{50}-4\sqrt{2}-\sqrt{5}=5\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\sqrt{5}=\sqrt{2}-\sqrt{5}$

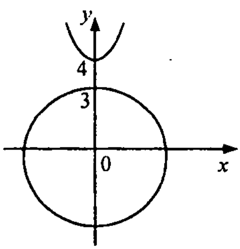
Ответ: $\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

9. $\frac{x+9}{3}-\frac{x}{5}=1$; $5x+45-3x=15$; $2x=-30$; $x=-15$. **Ответ:** Г.

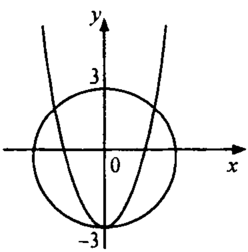
10. Площадь противня равна $48\cdot36-4x^2$.

Ответ: А.

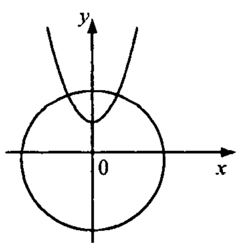
11. 1) $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=x^2+4\end{cases}$ 2) $x^2+y^2=9,\ y=x^2-3$. 3) $\begin{cases}x^2+y^2=9\\ y=x^2+2\end{cases}$



Нет решений.



3 решения.



2 решения.

Ответ:

1	2	3
а	б	в

12. $6x-15>8x-11$; $-2x>4$; $x<-2$; $-1,8 > -2$; $-2,6 < -2$; $-3,7 < -2$; $-8,9 < -2$. **Ответ:** А.

13. $a \geq b$; $c < b$; $a \geq b$; $b > c$ значит $a \geq b > c$, $a > c$.
Ответ: А.

14. Прогрессия 1; 2; 4; 8; ... состоит из степеней числа 2. Поэтому число 34 не является членом данной прогрессии.
Ответ: В.

15. $f(x)$ убывает при $-\infty < x \leq 2$ только на рис. В.

Ответ: В.

16. 8 р. — цена акций в начале месяца, 6 р. — цена акций в конце месяца. Цена снизилась на 2 р. 2 р. от 8 р. составляют $\frac{1}{4}$ часть, т.е. 25%.

Ответ: Б.

Часть 2 — решена в сборнике (стр. 203–204).

Работа № 2

Вариант 1

Часть 1

1.
$$\begin{array}{r|l} -\,20 & 9 \\ \underline{18} & \overline{0,22...} \\ -\,20 & \\ \underline{18} & \\ 2 & \end{array}$$

$\frac{2}{9} \approx 0,22$

Ответ: Б.

2. Ответ: Б.

3. Цена равна $50 \cdot 800 \cdot 0,9 = 36000$ р.
Ответ: Г.

4. $S = 2500 \cdot 60 = 150000$ см = 1500 м = 1,5 км
Ответ: 1,5.

5. Ответ: Дробь имеет смысл, если ее знаменатель не равен 0, поэтому

1	2	3
г	в	б

6. $\left(3\cdot10^{-3}\right)^2\cdot\left(2\cdot10^3\right)=9\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^3=18\cdot10^{-3}=0,018$

Ответ: 0,018.

7. $\dfrac{n}{m^2-mn}:\dfrac{n^2}{m^2-n^2}=\dfrac{n}{m(m-n)}\cdot\dfrac{(m-n)(m+n)}{n^2}=\dfrac{m+n}{mn}$.

Ответ: $\dfrac{m+n}{mn}$.

8. $S=\dfrac{1}{2}\left(7-\sqrt{5}\right)\left(7+\sqrt{5}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot(49-5)=\dfrac{1}{2}\cdot44=22\ (\text{см}^2)$

Ответ: Г.

9. $\dfrac{1}{3}x^2+x-6=0$;

$D=1-4\cdot\dfrac{1}{3}\cdot(-6)=9$;

$x_{1/2}=\dfrac{-1\pm3}{\dfrac{2}{3}}$;

$x_1=-6;\ x_2=3$

Ответ: –6; 3.

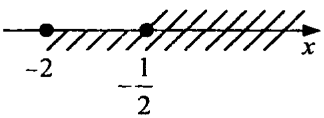
10. $\begin{cases}x+5y=-7\\3x+2y=5\end{cases}\Big|{-3}$; $\begin{cases}-3x-15=21\\3x+2y=5\end{cases}$; $\begin{cases}x=-7-5y\\-13y=26\end{cases}$; $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$

Ответ: Г.

11. $(x+4)$ км/ч — скорость на велосипеде.
Тогда $2(x+4)=6\cdot x$

Ответ: Б.

12. $\begin{cases}6x+3>0\\7-4x<-1\end{cases}$; $\begin{cases}6x>-3\\-4x<-8\end{cases}$; $\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\x>-2\end{cases}$



$x>-0,5$

Ответ: А.

13. Так как $x^2\geq0$ при всех значениях x, то и $x^2+9\geq0$ — верно при всех значениях x. **Ответ:** В.

14. $q = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2$;

$x = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

15. $y = -\frac{1}{2}x$

x	0	–2
y	0	1

Это рисунок В.
Ответ: В.

16. За кандидата А в период с 45-й до 60-й минуты дебатов было подано 15 тыс. голосов; за кандидата Б — 10 тыс. голосов.
Ответ: за А; на 5 тыс.

Часть 2 — решена в сборнике (стр. 205–207).

Вариант 2

1.
$$\begin{array}{r|l} -70 & 9 \\ \cline{2-2} \underline{63} & 0{,}77\ldots \\ -70 & \\ \underline{63} & \\ 7\ldots & \end{array}$$

$\frac{7}{9} \approx 0,78$

Ответ: В.

2. **Ответ:** Г.

3. Стоимость: $20 \cdot 1100 \cdot 0{,}9 = 19800$ р.
Ответ: Г.

4. $S = 40 \cdot 3500 = 140000$ см $= 1400$ м $= 1{,}4$ км
Ответ: 1,4.

5. Дробь имеет смысл, если ее знаменатель не равен нулю.
Ответ:

1	2	3
в	г	а

6. $\left(2\cdot 10^{-2}\right)^3\cdot\left(3\cdot 10^4\right)=8\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^4=24\cdot 10^{-2}=0{,}24$

Ответ: 0,24.

7. $\frac{10}{5c+c^2}-\frac{2}{c}=\frac{10-2(c+5)}{c(c+5)}=-\frac{2c}{c(c+5)}=-\frac{1}{c+5}$

Ответ: $-\frac{1}{c+5}$.

8. $S=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{11}-1\right)\left(\sqrt{11}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot(11-1)=\frac{1}{2}\cdot 10=5$ (см^2).

Ответ: В.

9. $\frac{1}{2}x^2-3x-8=0$;

$x^2-6x-16=0$;

$D=36+4\cdot 16=100$;

$x_{1/2}=\frac{6\pm 10}{2}$;

$x_1=-2$; $x_2=8$

Ответ: –2; 8.

10. $\left\{\begin{array}{l|l}2x+5y=4 & \\ 3x+y=-7 & -5\end{array}\right.$; $\begin{cases}2x+5y=4\\ 15x-5y=35\end{cases}$; $\begin{cases}-13x=39\\ y=\frac{4-2x}{5}\end{cases}$; $\begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$

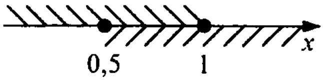
Ответ: Б.

11. Скорость автобуса равна $\frac{x}{3}$ км/ч; автомобиля — $\frac{x}{2}$ км/ч.

Тогда $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=25$.

Ответ: Г.

12. $\begin{cases}4x-2>0\\ 7-6x>1\end{cases}$; $\begin{cases}4x>2\\ -6x>-6\end{cases}$; $\begin{cases}x>0{,}5\\ x<1\end{cases}$



Ответ: Г.

13. $x^2+4\geq 0$ при всех значениях x, поэтому неравенство Г не имеет решений.

Ответ: Г.

14. $d = -5 - (-8) = 3$;
$x = -5 + 3 = -2$
Ответ: –2.

15. $y = -2x$

x	0	1
y	0	–2

Ответ: Г.

16. За А: 5 тыс.
За Б: 20 тыс.
Ответ: за 5; на 15 тыс.

Часть 2 — решена в сборнике (стр. 207–208)

Приложение 2 (Вероятность и статистика) — все решения даны в сборнике.

Справочное издание

Громова Ирина Николаевна

Решение задач ГИА по алгебре

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. H 15295 от 13.04.2011 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *А.Ю. Горелик*
Корректор *И.В. Русанова*
Компьютерная верстка *И.Ю. Иванова, Е.Ю. Лысова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.: 641-00-30 (многоканальный).