ГИА

В. И. ГЛИЗБУРГ

МАТЕМАТИКА

комплексная подготовка

АЙРИС ПРЕСС

ГИА

В. И. Глизбург

МАТЕМАТИКА

комплексная подготовка

АЙРИС ПРЕСС
МОСКВА
2012

УДК 373.167.1:51(079)
ББК 22.1я72
Г54

Серийное оформление *А. М. Драгового*

Глизбург, В.И.

Г54 Математика. ГИА. Комплексная подготовка / В.И. Глизбург. — М.: Айрис-пресс, 2012. — 176 с. — (Домашний репетитор. Подготовка к ГИА).

ISBN 978-5-8112-4366-2

Пособие ориентировано на подготовку учащихся девятых классов к государственной итоговой аттестации (ГИА) по математике; соответствует ФГОС и совместимо с различными учебниками по алгебре и геометрии.

Издание содержит краткие теоретические сведения, задачи с решениями, базовые задачи и задачи для самостоятельного решения по 11 основным темам алгебры и геометрии. Такой подбор материала обеспечит комплексную подготовку к итоговой аттестации, повторение и обобщение учебного материала, осуществление контроля и самоконтроля знаний.

Доступный, но строгий с научной точки зрения язык изложения, а также большое количество примеров и задач позволят учащимся успешно сдать ГИА.

ББК 22.1я72
УДК 373.167.1:51(079)

ISBN 978-5-8112-4366-2

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Глава 4. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

Глава 6. АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Глава 7. ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

Глава 8. ТРИГОНОМЕТРИЯ В ПЛАНИМЕТРИИ

Глава 9. **ПЛОЩАДИ ФИГУР**

Глава 10. **ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ. УРАВНЕНИЯ ФИГУР. ВЕКТОРЫ**

Глава 11. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемый читатель! Вы держите в руках сборник материалов, предназначенный для подготовки учащихся девятых классов к государственной итоговой аттестации — ГИА по математике. В сборнике содержатся основные темы по алгебре и геометрии. Работа со сборником предполагает предварительное повторение соответствующих разделов математики, алгебры и геометрии, изученных ранее в 5–8 классах, а также изучение соответствующих тем девятого класса по учебникам алгебры и геометрии.

В сборнике имеется 11 глав, в каждой из которых изложены основные теоретические сведения, представлены задачи с решениями по основным разделам ГИА. В конце каждой главы предлагаются задачи с ответами, разбитые на два подраздела: базовые задачи и задачи для самостоятельного решения. Предполагается, что в процессе решения базовых задач читатель, готовящийся к ГИА, активизирует свои теоретические знания по материалу соответствующей главы; в процессе работы над задачами для самостоятельного решения читатель получит представление о формате и содержательной линии задач, по своей структуре соответствующих непосредственно ГИА, и сможет проверить свои возможности, уровень знаний и готовность решать задачи ГИА.

Желаем успехов Вам, уважаемый читатель, в подготовке и сдаче ГИА!

ГЛАВА 1

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение функции. Область определения. Область значений. График функции. Способы задания функции

Пусть даны числовое множество X и правило f, которое ставит в соответствие каждому элементу x из множества X определённое число y, тогда считают, что задана **функция** $y=f(x)$ с **областью определения** X $(x \in X)$. Переменная x называется **независимой переменной** (или аргументом), переменная y называется **зависимой переменной**. Область определения функции принято обозначать — $D(f)$. Множество всех значений функции $y=f(x)$ называется областью значений функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции $y=f(x)$, $x \in X$ называется множество точек $(x,\ y)$ координатной плоскости XOY, таких что $x \in X$, $y=f(x)$.

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Существуют различные способы задания функции. Перечислим основные способы.

Аналитическое задание функции

В этом случае функцию задают с помощью формулы $y=f(x)$, где $f(x)$ представляет собой некоторое выражение с переменной x.

Графическое задание функции

В этом случае на координатной плоскости задают линию, для всех точек которой абсцисса точки принадлежит области определения функции, а ордината равна соответствующему значению функции. Тем самым на области определения задаётся функция $y=f(x)$, $x \in X$.

Табличное задание функции

В этом случае приводится таблица, в которой указывают значения функции для имеющихся в таблице значений аргумента.

Свойства функций

Чётные и нечётные функции

Функция $y=f(x)$ называется **чётной**, если её область определения симметричное относительно O множество и выполняется равенство $f(-x)=f(x)$ для любого x из области определения функции. График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y=f(x)$ называется **нечётной**, если её область определения симметричное относительно O множество и для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Периодические функции

Функция $y=f(x)$ называется **периодической**, если существует отличное от нуля число T, такое что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$. Число, кратное T, называется периодом функции.

Монотонные функции

Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на промежутке, если какие бы два значения аргумента, принадлежащие этому промежутку, ни взять, окажется, что большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Линейная функция

Функция, заданная формулой $y=kx+b$, где k и b — действительные числа, называется **линейной функцией**. Если, в частности, $k=0$, то получаем постоянную функцию $y=b$; если $b=0$, то получаем прямую пропорциональность $y=kx$.

Свойства линейной функции $y=kx+b$, $k\neq 0$, $b\neq 0$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел;
2) функция $y=kx+b$ не является ни чётной, ни нечётной;
3) при $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

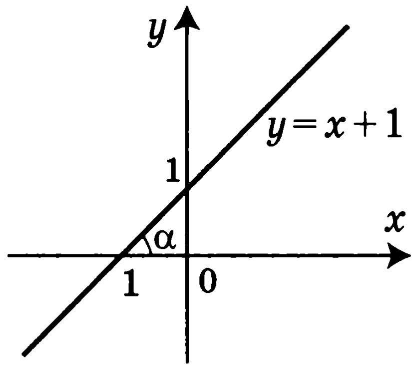


Рис. 1.1

Графиком линейной функции является прямая (рис. 1.1). Число k называется угловым коэффициентом прямой, оно равно тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению луча оси OX, т. е. $k=\operatorname{tg}\alpha$.

Функция $y=\dfrac{k}{x}$

Функция, заданная формулой $y=\dfrac{k}{x}$, где $k\neq 0$, называется **обратной пропорциональностью**. Число k называют коэффициентом обратной пропорциональности.

Свойства функции $y=\dfrac{k}{x}$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел, кроме нуля;
2) функция $y=\dfrac{k}{x}$ является нечётной функцией;
3) при $k>0$ функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и на промежутке $(0;\ +\infty)$; при $k<0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и на промежутке $(0;\ +\infty)$.

Графиком обратной пропорциональности является гипербола (рис. 1.2). Если $k>0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях (рис. 1.2*а*), если $k<0$, то ветви гиперболы расположены во II и IV координатных четвертях (рис. 1.2*б*). Прямые

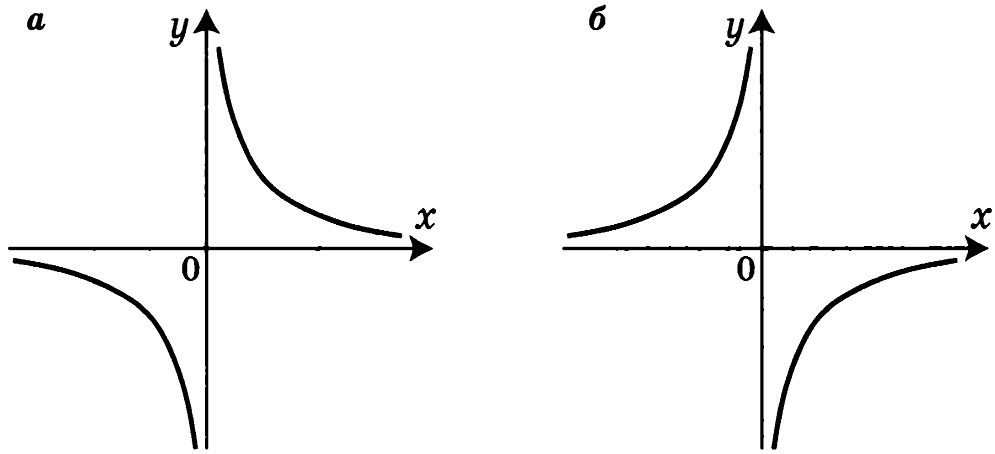


Рис. 1.2

$y=0$, $x=0$ (оси абсцисс и ординат) являются соответственно горизонтальной и вертикальной асимптотами графика функции $y=\frac{k}{x}$.

Дробно-линейная функция

Функция, заданная формулой $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — произвольные действительные числа, $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$, называется **дробно-линейной функцией**. Графиком является гипербола, с асимптотами — горизонтальная: $y=\frac{a}{c}$, вертикальная: $x=-\frac{d}{c}$ (рис. 1.3).

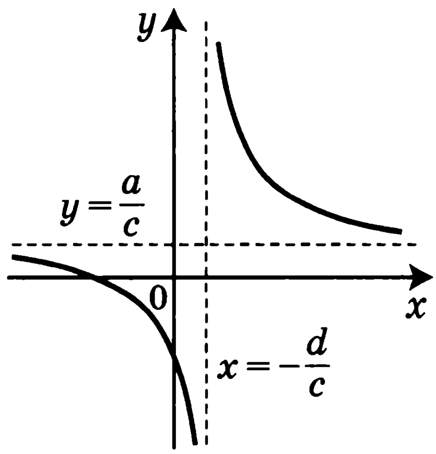


Рис. 1.3

Квадратный трёхчлен. Квадратичная функция

Квадратным трёхчленом называется многочлен вида ax^2+bx+c, где x — переменная, a, b, c — некоторые действительные числа, $a\neq 0$.

Корнем квадратного трёхчлена называется значение переменной, при котором значение этого трёхчлена равно нулю.

Если x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида ax^2+bx+c, где x — независимая переменная, a, b, c — некоторые числа, $a \neq 0$. При $a=1$, $b=c=0$ квадратичная функция принимает частный вид $y=x^2$.

Свойства функции $y=x^2$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел;
2) функция $y=x^2$ является чётной функцией;
3) функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Графиком функции $y=x^2$ является парабола (рис. 1.4).

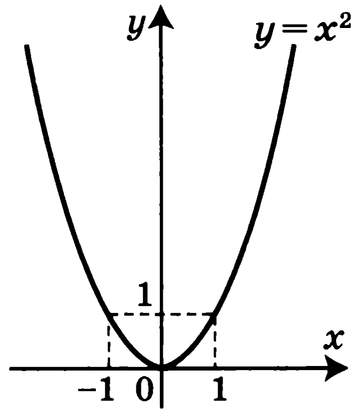


Рис. 1.4

Степенная функция с натуральным показателем

Функция, заданная формулой $y=x^n$, где n — натуральное число, называется **степенной функцией с натуральным показателем.** В частности, при $n=1$ получаем линейную функцию $y=x$, при $n=2$ получаем квадратичную функцию $y=x^2$, при $n=3$ получаем функцию $y=x^3$, графиком которой является кубическая парабола.

Свойства функции $y=x^3$:

1) областью определения является множество всех действительных чисел;
2) функция $y=x^3$ является нечётной функцией;
3) функция возрастает на всей области определения.

Вообще, пусть n — произвольное чётное натуральное число, большее двух: $n=4$, 6, 8, ... В этом случае свойства функции $y=x^n$ аналогичны свойствам функции $y=x^2$. График такой функции похож на график параболы (рис. 1.5).

Пусть n — произвольное нечётное число, большее трёх: $n=5$, 7, 9, ... В этом случае свойства функции $y=x^n$ аналогичны свойствам функции $y=x^3$. График такой функции похож на график кубической параболы (рис. 1.6).

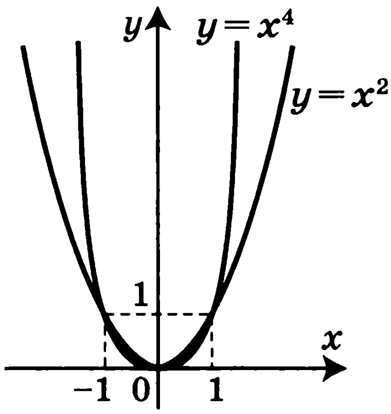


Рис. 1.5

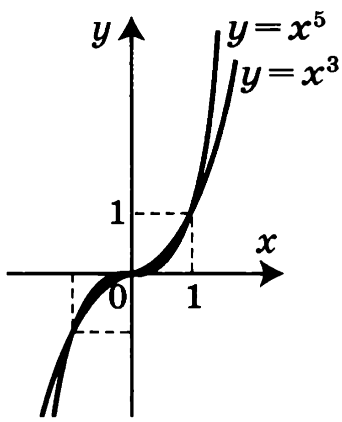


Рис. 1.6

Функция $y=\sqrt[n]{x}$

Свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$ при n — чётное:

1) областью определения является промежуток $[0;\ \infty)$;
2) функция возрастает на всей области определения;
3) функция $y=\sqrt[n]{x}$ при $n>1$ является обратной к функции $y=x^n$ на промежутке $[0;\ \infty)$. Их графики симметричны относительно биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей (рис. 1.7*а*).

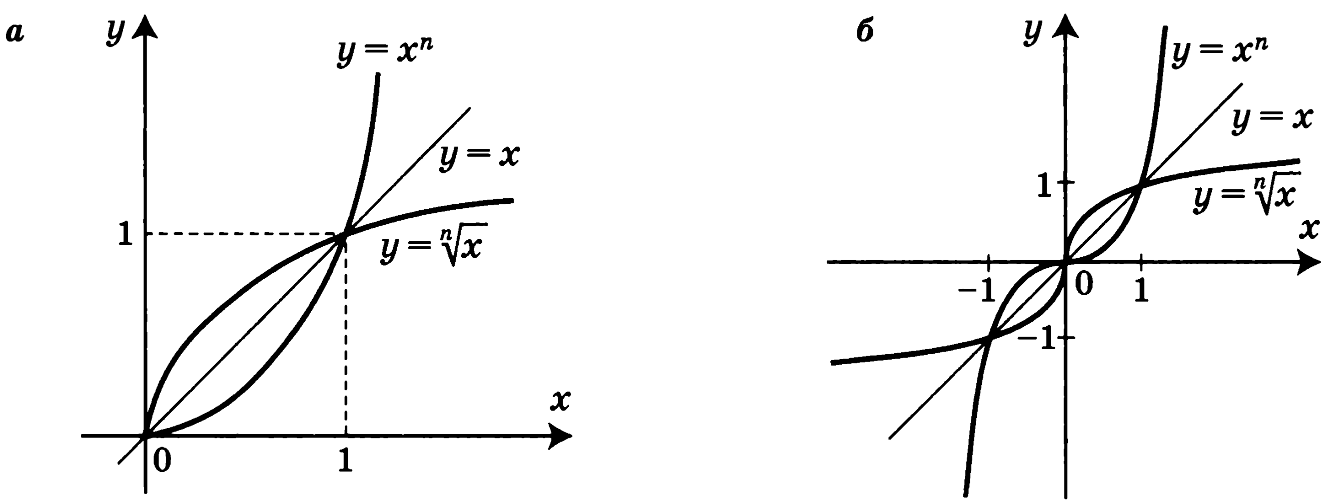


Рис. 1.7

Свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$ при n — нечётное:

1) областью определения является промежуток $(-\infty;\ \infty)$;
2) функция возрастает на всей области определения;
3) функция $y=\sqrt[n]{x}$ при $n>1$ является обратной к функции $y=x^n$. Их графики симметричны относительно биссектрисы 1 и 3 координатных четвертей (рис. 1.7*б*).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1.1 Найдите область определения функции $y=x^3-\sqrt{x-2}$.

Решение. Функция будет определена при тех значениях аргумента x, при которых $x-2\geqslant 0$, т. е. при $x\geqslant 2$. Следовательно, областью определения функции является луч $[2;\ \infty)$.

Ответ: $[2;\ \infty)$.

1.2 Найдите область определения функции $y=x^5+\sqrt[4]{3-x}$. В ответе укажите номер правильного ответа.

1. $(3;\ +\infty)$; **2.** R; **3.** $(-\infty;\ 3]$; **4.** $[-3;\ 3]$.

Решение. Для нахождения области определения аналитически заданной функции учтём свойства функции $y=\sqrt[4]{3-x}$, решим неравенство $3-x\geqslant 0$ и получим промежуток $(-\infty;\ 3]$, который является областью определения функции.

Ответ: 3.

1.3 Найдите области значений следующих функций:

а) $y=-2x^2+11$; б) $y=\left[\begin{array}{l} x^3,\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1,\ 1\leqslant x\leqslant 3, \\ -x+4,\ 3\leqslant x\leqslant 4. \end{array}\right.$

Решение.

а) Графиком функции $y=-2x^2+11$ является парабола, с вершиной в точке $(0;\ 11)$, ветви которой направлены вниз. Следовательно, областью значений функции является промежуток $(-\infty;\ 11]$.

б) Функция задана на различных промежутках различными формулами. Такая функция называется кусочной. Эта функция определена на отрезке $[0;\ 4]$. Областью значений функции является отрезок $[0;\ 1]$.

Ответ: а) $(-\infty;\ 11]$; б) $[0;\ 1]$.

1.4 По графику функции $y=f(x)$ (рис. 1.8) определите, какое из следующих утверждений справедливо:

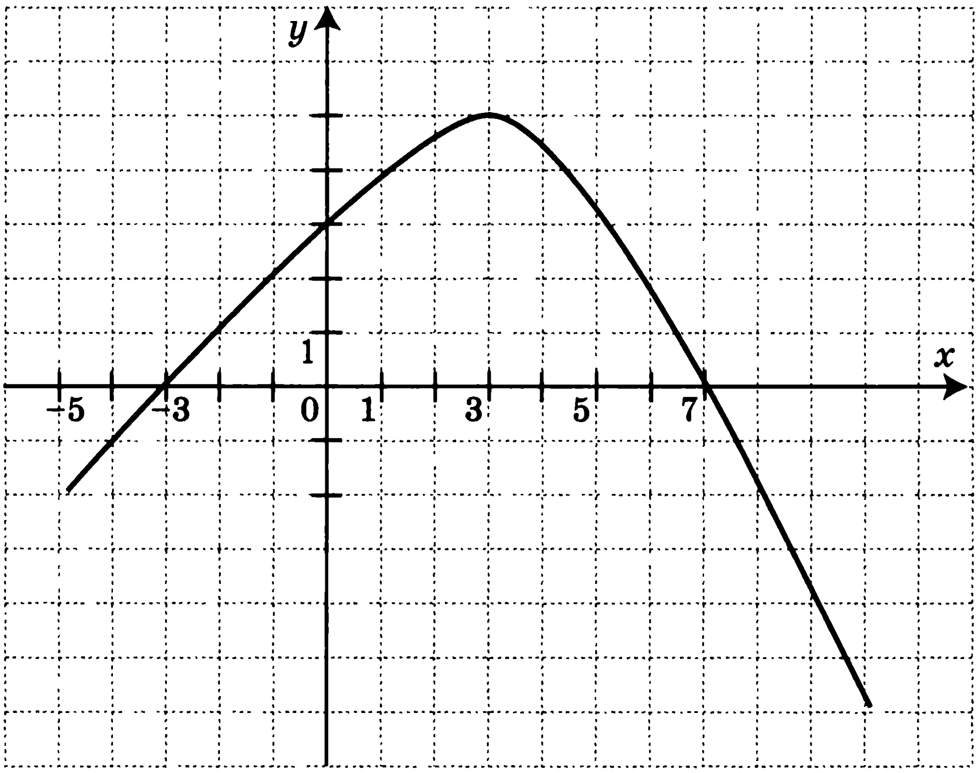


Рис. 1.8

1. Функция принимает отрицательные значения при $x \geqslant 7$.
2. Нулями функции являются числа -3, 0, 7.
3. Функция возрастает на промежутке $[-5;\ 3]$.

Решение. В точке $x=7$ значение функции обращается в нуль. Отрицательные значения функция принимает на промежутках $x \in [-5;\ -3) \cup (7;\ 9]$. Нулями функции являются числа -3, 7. Функция возрастает на промежутке $[-5;\ 3]$. Поэтому справедливым является утверждение 3.

Ответ: 3.

1.5 По графику функции $y=f(x)$, представленному на рис. 1.9, определите:

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) нули функции;

г) промежутки убывания функции;

д) промежутки, на которых значения функции неотрицательны.

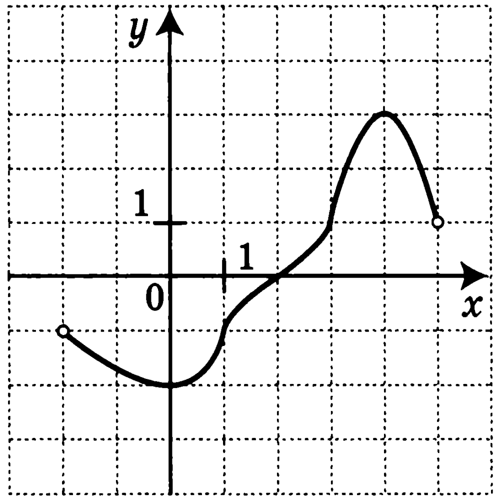


Рис. 1.9

Решение.

а) Для нахождения области определения графически заданной функции спроектируем все точки её графика на ось OX и получим промежуток $(-2;\ 5)$, который является областью определения функции.

б) Для нахождения области значений графически заданной функции спроектируем все точки её графика на ось OY и получим промежуток $[-2;\ 3]$, который является областью значений функции.

в) Нулями функции являются те значения аргумента, в которых значение функции обращается в нуль. В данном случае это значение $x=2$.

г) Для определения промежутков убывания функции воспользуемся определением и получим, что данная функция убывает на промежутках $(-2;\ 0]$ и $[4;\ 5)$.

д) Надо найти те промежутки, на которых точки графика функции расположены выше оси OX или принадлежат оси OX. В данном случае это промежуток — [2; 5).

Ответ: а) (−2; 5); б) [−2; 3]; в) $x = 2$; г) $(-2; 0] \cup [4; 5)$; д) [2; 5).

1.6 По графику функции $y = f(x)$, представленному на рис. 1.9, найдите область определения функции $y = f(x)$. Укажите номер правильного ответа.

1. $(5; +\infty)$; **2.** R; **3.** $(-\infty; 2]$; **4.** [−2; 3]; **5.** (−2; 5).

Решение. Для нахождения области определения графически заданной функции спроектируем все точки её графика на ось OX и получим промежуток (−2; 5), который является областью определения функции.

Ответ: 5.

1.7 По графику функции $y = f(x)$, представленному на рис. 1.9, найдите область значений функции $y = f(x)$. Укажите номер правильного ответа.

1. $(5; +\infty)$; **2.** R; **3.** $(-\infty; 2]$; **4.** [−2; 3]; **5.** (−2; 5).

Решение. Для нахождения области значений графически заданной функции спроектируем все точки её графика на ось OY и получим промежуток [−2; 3], который является областью значений функции.

Ответ: 4.

1.8 Постройте график функции $y = \dfrac{2x+2}{x-2}$.

Решение. Данная функция является дробно-линейной функцией вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Её графиком является гипербола, с асимптотами — горизонтальная: $y=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$, вертикальная: $x=-\frac{d}{c}=-\ \frac{-2}{1}=2$. График представлен на рис. 1.10.

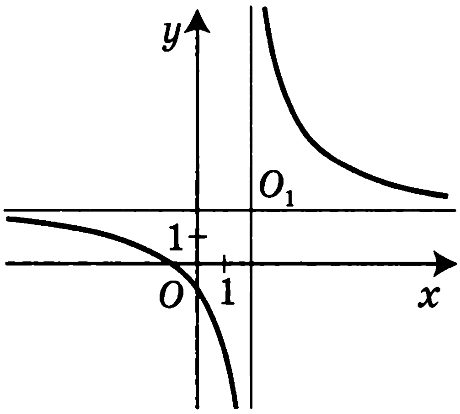


Рис. 1.10

1.9 Постройте график функции $y=\begin{cases} x+3, & -5\leqslant x\leqslant 1, \\ 4, & 1\leqslant x\leqslant 6, \\ -2x+16, & 6\leqslant x\leqslant 10 \end{cases}$ и найдите её область значений.

Решение. Заданная функция является кусочной. График функции представлен на рис. 1.11. Её областью значений является отрезок [−4; 4].

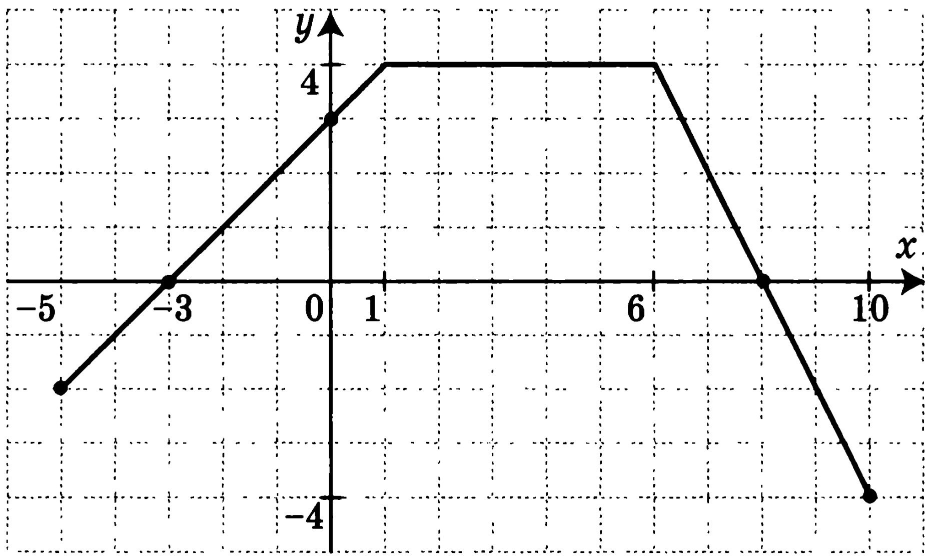


Рис. 1.11

1.10 Определите, задают ли следующие правила функции:

1) $y = \begin{cases} -2x, & -3 < x \leqslant 0, \\ \sqrt{x} + 1, & x \geqslant 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 4, & 2 < x \leqslant 4, \\ x, & x > 4 \end{cases}$

В случае положительного ответа:

а) найдите область определения функции;

б) вычислите значения функции в точках -1; 2; 5;

в) найдите промежутки монотонности функции.

Решение. Правило 1 функцию не задаёт, так как одному и тому же значению $x = 0$ это правило ставит в соответствие различные значения y: в одном случае — $y = 0$, в другом — $y = 1$. Правило 2 функцию задаёт.

а) Областью определения является луч $[0; +\infty)$.

б) В точке $x = -1$ функция не определена; $f(2) = 4$; $f(5) = 5$.

в) Функция возрастает при $x \in [0; 2] \cup [4; +\infty)$; на отрезке $[2; 4]$ функция постоянна.

1.11 Определите, является ли функция $y = |x| + x^4$ чётной, нечётной или общего вида. Укажите номер правильного ответа.

1. чётная; **2.** нечётная; **3.** общего вида.

Решение. Функции $y = |x|$, $y = x^4$ являются чётными. Сумма чётных функций — чётная функция.

Ответ: 1.

1.12 Дан промежуток $(-\infty; 1]$. Укажите номер ответа, содержащего пример функции, для которой данный промежуток является областью значений.

1. $y = x^2 + 1$; **2.** $y = x^2 - 1$;

3. $y = -x^2 + 1$; **4.** $y = -x^2 - 1$.

Решение. Данный промежуток является областью значений квадратичной функции $y=-x^2+1$.

Ответ: 3.

1.13 График какой из заданных ниже функций изображён на рис. 1.12? Укажите номер правильного ответа.

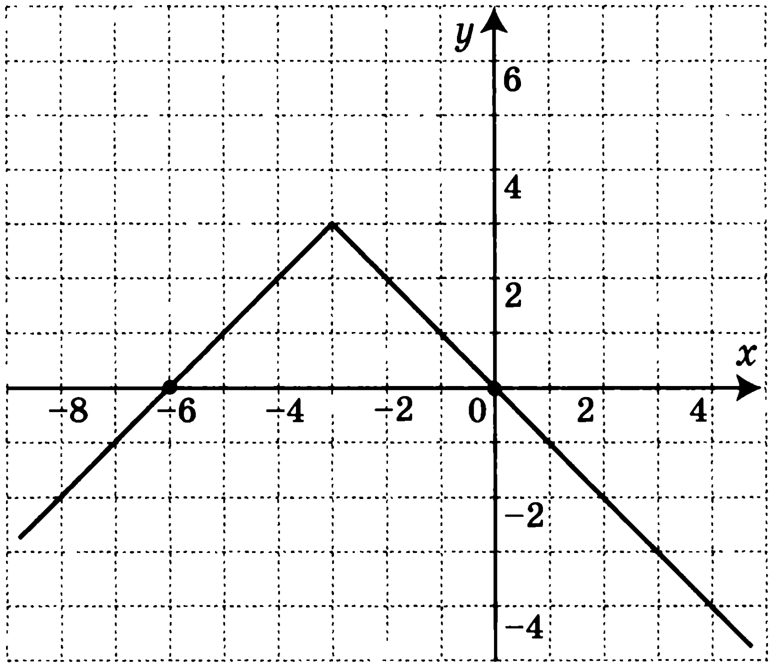


Рис. 1.12

1. $y=|x-3|+3$;
2. $y=-|x-3|-3$;
3. $y=-|x+3|+3$;
4. $y=-3|x-3|+3$.

Решение. Поскольку график функции смещён на 3 масштабные единицы вверх и влево относительно начала координат и ветви графика направлены вниз, то на рис. 1.12 изображён график функции $y=-|x+3|+3$.

Ответ: 3.

1.14 На рис. 1.13 изображён график движения водных туристов, которые начали путешествие по озеру на моторной лодке. Через час движения мотор перестал работать, и туристы один час продолжали путешествие на вёслах, после чего вернулись в исходный пункт тем же путём.

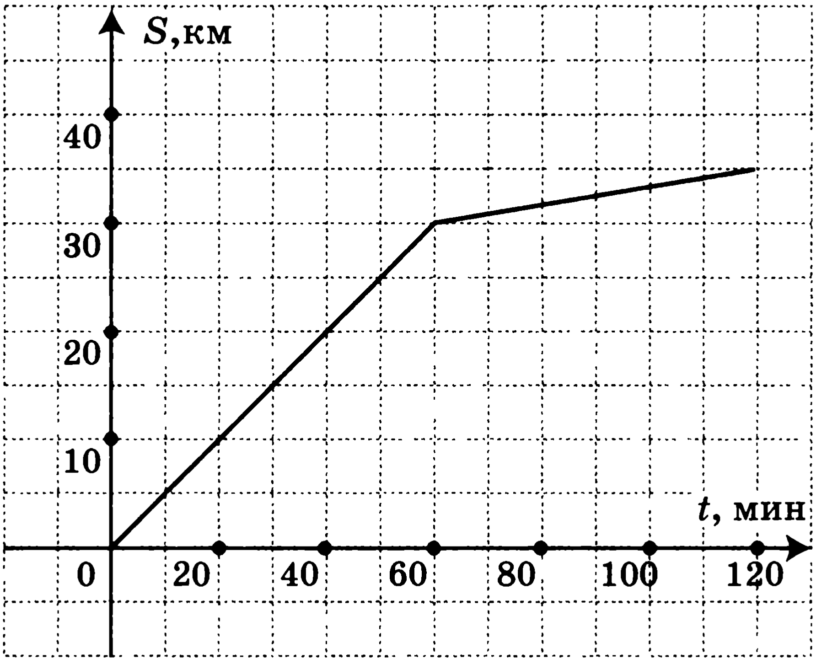


Рис. 1.13

а) Определите скорость движения лодки с мотором и на вёслах.

б) Какое расстояние преодолели туристы через 30, 60, 90, 120 минут после начала движения?

в) Через какой промежуток времени после поломки мотора туристы вернутся в пункт начала путешествия, если не учитывать перерыв на отдых?

Решение.

а) Скорость движения лодки с мотором — $v=\frac{s}{t}=\frac{30}{1}=30$ км/ч.

Скорость движения лодки на вёслах — 5 км/ч.

Ответ: 30 км/ч; 5 км/ч.

б) Туристы преодолели через 30 минут 15 км, через 60 минут — 30 км, через 90 минут — 32,5 км, через 120 минут — 35 км.

Ответ: 15 км, 30 км, 32,5 км, 35 км.

в) После поломки мотора туристы один час продолжали движение вперёд, удалившись от исходной позиции на 35 км. Таким образом, протяжённость обратного пути составила 35 км при скорости движения на вёслах — 5 км/ч. Следовательно, на обратный путь было затрачено $t=\frac{s}{v}=\frac{35}{5}=7$ часов.

Тогда после поломки мотора туристы вернутся в пункт начала путешествия через $1+7=8$ часов.

Ответ: 8 часов.

1.15 В таблице представлены данные зависимости тормозного пути автомобиля от скорости его движения на сухом асфальте:

V, км/ч	0	20	40	60	80	100
S, м	0	10	20	40	60	90

а) С какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы его тормозной путь не превышал 60 м?

б) Каким будет тормозной путь автомобиля при скорости его движения 60 км/ч?

Решение.

а) Как видно из представленной таблицы, автомобиль должен двигаться со скоростью не более 80 км/ч.

б) Как видно из представленной таблицы, тормозной путь равен 40 м.

Ответ: а) не более 80 км/ч; б) 40 м.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

Найдите область определения функции.

1.16 $y=\dfrac{2+x}{3x-1}$. **Ответ:** $x\neq\dfrac{1}{3}$.

1.17 $y=x^3+\dfrac{11x-4}{x^2-1}$. **Ответ:** $x\neq\pm1$.

1.18 $y=x^5+\dfrac{17x+3}{\sqrt{x-2}}$. **Ответ:** $x>2$.

1.19 $y=\sqrt[4]{x^2-5x+6}$. **Ответ:** $x\in(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$.

1.20 $y=\dfrac{13}{|x|+4}$. **Ответ:** $x\in R$.

1.21 $y=\sqrt{x-2}-\sqrt[4]{7-x}$. **Ответ:** $x\in[2;\ 7]$.

Найдите область значений функции.

1.22 $y=x^2$ на отрезке $[-1;\ 3]$. **Ответ:** $[0;\ 9]$.

1.23 $y=\sqrt{x}$.

а) на отрезке $[1;\ 36]$. **Ответ:** $[1;\ 6]$.

б) на интервале $(9;\ 64)$. **Ответ:** $(3;\ 8)$.

1.24 $y=-x^2+4$. **Ответ:** $(-\infty;\ 4]$.

Исследуйте функцию на чётность.

1.25 $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$.

Ответ: функция не является ни чётной, ни нечётной.

1.26 $y = 5|x| - x^2 + 4x^4$.

Ответ: функция является чётной.

1.27 По графику функции $y = f(x)$ (рис. 1.14) определите:

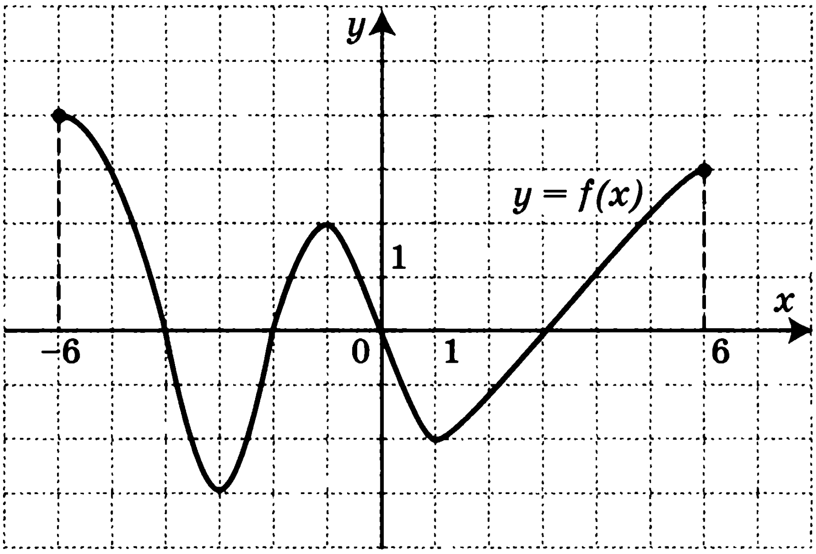


Рис. 1.14

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) нули функции;

г) промежутки возрастания функции;

д) промежутки, на которых функция принимает положительные значения.

Ответ: а) $[-6;\ 6]$;

б) $[-3;\ 4]$;

в) $x = -4$; $x = -2$; $x = 0$; $x = 3$;

г) $[-3;\ -1] \cup [1;\ 6]$;

д) $[-6;\ -4) \cup (-2;\ 0) \cup (3;\ 6]$.

1.28 По графику функции $y = f(x)$ (рис. 1.15) определите:

а) область определения функции;

б) область значений функции;

в) координаты точек пересечения графика функции с координатными осями;

г) промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения;

д) промежутки убывания функции;

е) число нулей функции.

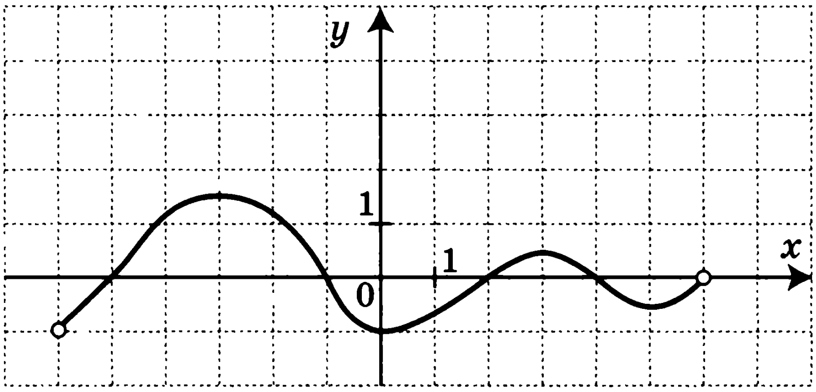


Рис. 1.15

Ответ: а) $(-6;\ 6)$;

б) $[-1;\ 1{,}5]$;

в) $(-5;0)$; $(-1;0)$; $(2;0)$; $(4;0)$; $(0;-1)$;

г) $(-6;\ -5)\cup(-1;\ 2)\cup(4;\ 6)$;

д) $[-3;\ 0]\cup[3;\ 5]$;

е) 4.

1.29 Приведите пример функции:

а) определённой на промежутке $(-\infty;\ 0)$;

б) определённой на промежутке $(-\infty;\ 0]$;

в) определённой при всех $x \geqslant 0$, кроме точки $x=3$;

г) определённой при всех $x \leqslant 0$, кроме точки $x=-4$;

1.30 Приведите пример функции:

а) область значений которой состоит из чисел ± 1;

б) областью значений которой является луч $[1;+\infty)$.

Постройте график функции.

1.31 $y = x^3 + 1.$

1.32 $y = (x+1)^3.$

1.33 $y = |x| - 2.$

1.34 $y = -|x-2|.$

1.35 $y = \sqrt{x+2}.$

1.36 $y = -\sqrt{x} + 3.$

1.37 $y = \sqrt[3]{x} - 1.$

1.38 $y = -\sqrt[3]{x+1}.$

1.39 $y = \left[\begin{array}{l} x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1,\ 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ x-2,\ x \geqslant 3. \end{array}\right.$

1.40 $y = \dfrac{x-2}{2x+1}.$

1.41 $y = -\dfrac{3x+2}{x+1}.$

Постройте график функции и найдите её область значений.

1.42 $y = x^2 - 5x + 6.$ **Ответ:** $\left[-\dfrac{1}{4};\ +\infty\right).$

1.43 $y=\left[\begin{array}{l}2,\ x\geqslant 0,\\ -2,\ x<0.\end{array}\right.$ **Ответ:** ± 2.

1.44 $y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{5(x-2)^2}$. **Ответ:** $[4;\ +\infty)$.

Определите, задают ли следующие правила функции:

1.45 1) $y=\left[\begin{array}{l}-x,\ -1<x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}+1,\ x\geqslant 0,\end{array}\right.$ 2) $y=\left[\begin{array}{l}x-3,\ x\leqslant 1,\\ -x^2,\ 1\leqslant x<3.\end{array}\right.$

Ответ: ни одно из правил функцию не задаёт.

1.46 1) $y=\left[\begin{array}{l}x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x},\ x\geqslant 1,\end{array}\right.$ 2) $y=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x},\ x\leqslant -1,\\ -x^2,\ -1\leqslant x\leqslant 2.\end{array}\right.$

Ответ: оба правила задают функцию.

1.47 В таблице представлены данные зависимости тормозного пути автомобиля от скорости его движения при гололёде:

V, км/ч	0	20	30	40	50
S, м	0	40	70	110	160

а) С какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы его тормозной путь не превышал 40 м?

б) Определите тормозной путь автомобиля при его скорости 30 км/ч.

Ответ: а) не более 20 км/ч; б) 70 м.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определите, какое из правил задаёт функцию. В ответе укажите его номер.

1.48 1) $y=\left[\begin{array}{l}-x,\ x<0,\\ -x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 2,\end{array}\right.$ 2) $y=\left[\begin{array}{l}x-1,\ x\leqslant 1,\\ x+1,\ 1\leqslant x<4.\end{array}\right.$

1.49 1) $y=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x},\ 0\leqslant x<1,\\ 1+(x-1)^2,\ 1\leqslant x\leqslant 2,\end{array}\right.$ 2) $y=\left[\begin{array}{l}-x^2,\ -2\leqslant x\leqslant -1,\\ x+2,\ x\geqslant -1.\end{array}\right.$

1.50 1) $y=\left[\begin{array}{l}x-3,\ x\leqslant 1,\\ -x^2,\ 1\leqslant x<3,\end{array}\right.$ 2) $y=\left[\begin{array}{l}-x-1,\ x\leqslant -1,\\ \sqrt{x+1},\ -1<x\leqslant 0.\end{array}\right.$

Найдите область определения следующих функций. Укажите номер правильного ответа.

1.51 $y=x^2-x+\sqrt[4]{7-x}.$

1. $(7;\ +\infty)$; **2.** $\mathbb{R}$; **3.** $(-\infty;\ 7]$; **4.** $[-7;\ 7]$.

1.52 $y=\dfrac{x^3+x}{\sqrt[4]{11-x}}.$

1. $(0;\ +\infty)$; **2.** $(-\infty;\ 11)$; **3.** R; 4. $[-11;\ 11]$.

1.53 $y=\dfrac{2x-3}{|x|}.$

1. $\mathbb{R}$; **2.** $(-\infty;\ 0)$; **3.** $(0;\ +\infty)$; **4.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

1.54 $y=x^2-x+|x-6|.$

1. $(6;\ +\infty)$; **2.** $\mathbb{R}$; **3.** $(-\infty;\ 0]$; **4.** $(-6;\ 6)$.

1.55 $y=\dfrac{|x+2|}{\sqrt[3]{x-1}}.$

1. $(1;\ +\infty)$; **2.** $(-\infty;\ 7]$; **3.** $[0;\ 1]$; **4.** R; 5. $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

1.56 По графику функции $y = f(x)$ на рис. 1.16 найдите область определения функции $y = f(x)$. Укажите номер правильного ответа.

1. $(-6;\ 6)$; **2.** $[-3;\ 4]$; **3.** $[-6;\ 6]$; **4.** R.

1.57 По графику функции $y = f(x)$, представленному на рис. 1.16, найдите область значений функции $y = f(x)$. Укажите номер правильного ответа.

1. $(-3;\ +\infty)$; **2.** R; **3.** $(-\infty;\ 4]$; **4.** $[-3;\ 4)$; **5.** $[-6;\ 6]$.

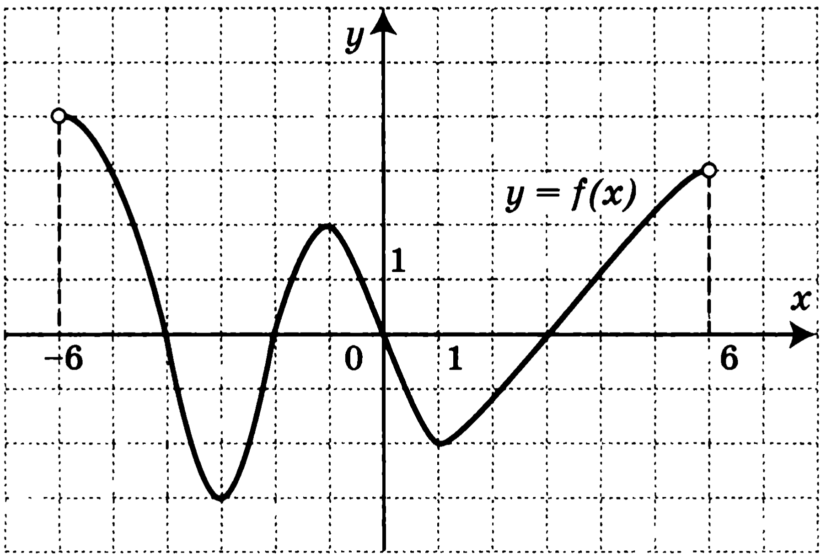


Рис. 1.16

1.58 По графику функции $y = f(x)$ на рис. 1.16 найдите нули функции $y = f(x)$. Укажите номер правильного ответа.

1. $-6;\ 6$; **2.** $-4;\ 0$; **3.** $-4;\ -2;\ 0;\ 3$; **4.** $-3;\ -1;\ 1$.

1.59 По графику функции $y = f(x)$ на рис. 1.17 найдите количество нулей функции $y = f(x)$. Укажите номер правильного ответа.

1. 5; **2.** 4; **3.** 1; **4.** 0.

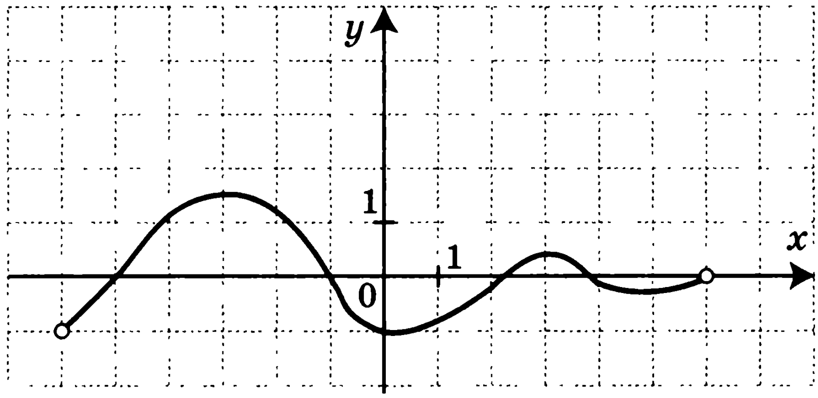


Рис. 1.17

1.60 По графику функции $y=f(x)$, представленному на рис. 1.17, найдите область значений функции $y=f(x)$. Укажите номер правильного ответа.

1. $(-1;\ +\infty)$; **2.** $(-6;\ 6)$; **3.** $(-\infty;\ 1{,}5]$; **4.** $[-6;\ 6]$; **5.** $[-1;\ 1{,}5]$.

Определите, являются ли данные функции чётными, нечётными или общего вида. Укажите номер правильного ответа.

1.61 $y=x^4-|x|$.

1. чётная; **2.** нечётная; **3.** общего вида.

1.62 $y=x^3+|x|$.

1. чётная; **2.** нечётная; **3.** общего вида.

1.63 $y=\dfrac{1}{x}$.

1. чётная; **2.** нечётная; **3.** общего вида.

1.64 Определите, является ли функция, графически заданная на рис. 1.18, чётной, нечётной или общего вида. Укажите номер правильного ответа.

1. чётная; **2.** нечётная; **3.** общего вида.

1.65 Дан промежуток $(-\infty; -2]$. Укажите номер ответа, содержащего пример функции, для которой данный промежуток является областью значений.

1. $y=x^2+2$; **2.** $y=x^2-2$;
3. $y=-x^2+2$; **4.** $y=-x^2-2$.

1.66 Дан промежуток $[3; +\infty)$. Укажите номер ответа, содержащего пример функции, для которой данный промежуток является областью значений.

1. $y=|x|-3$; **2.** $y=|x|+3$;
3. $y=-|x|-3$; **4.** $y=-|x|+3$.

1.67 График какой из заданных ниже функций изображён на рис. 1.19? Укажите номер правильного ответа.

1. $y=x^2$; **2.** $y=x^2-4$; **3.** $y=-x^2+4$;
4. $y=(x-3)^2-4$; **5.** $y=-(x-3)^2+4$.

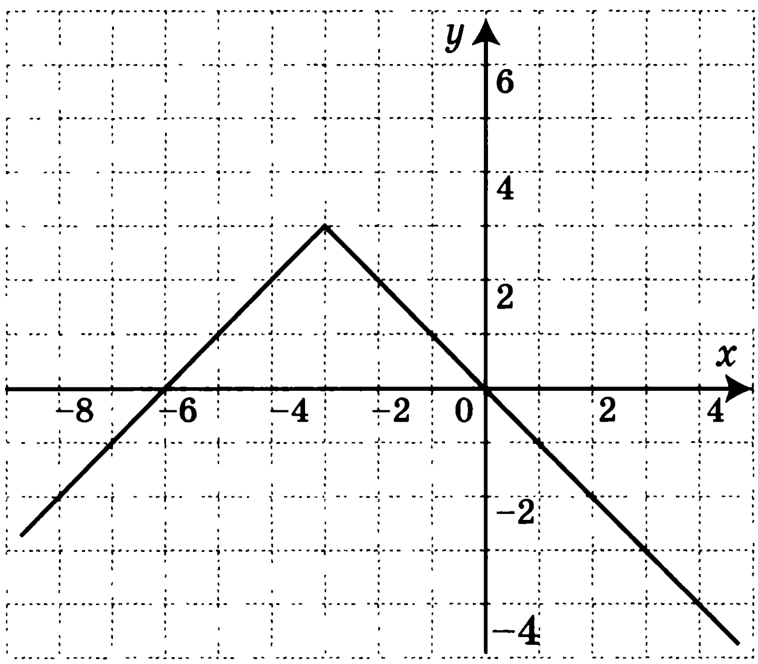


Рис. 1.18

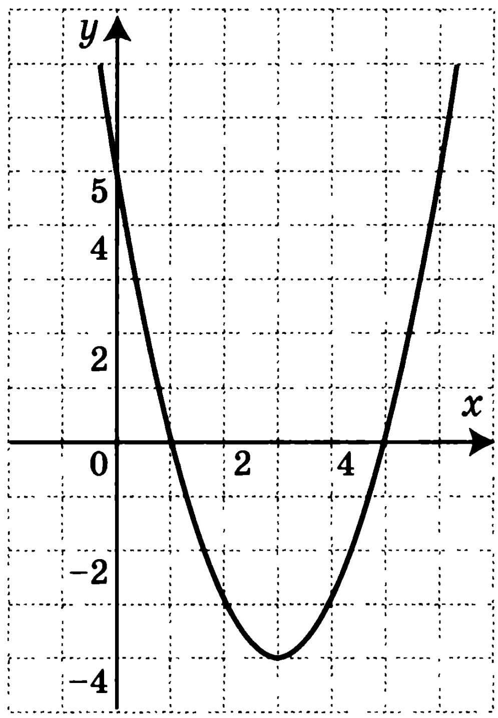


Рис. 1.19

1.68 Миша поехал на лошади из села в райцентр. На рис. 1.20 представлен график зависимости расстояния s, км, которое проехал Миша, от времени t, час, затраченного на поездку. Определите по графику:

а) расстояние от села до райцентра;

б) время, затраченное Мишей, от выезда из села до приезда в райцентр;

в) сколько раз отдыхал Миша в пути;

г) какова продолжительность каждого из привалов;

д) какова средняя скорость движения лошади.

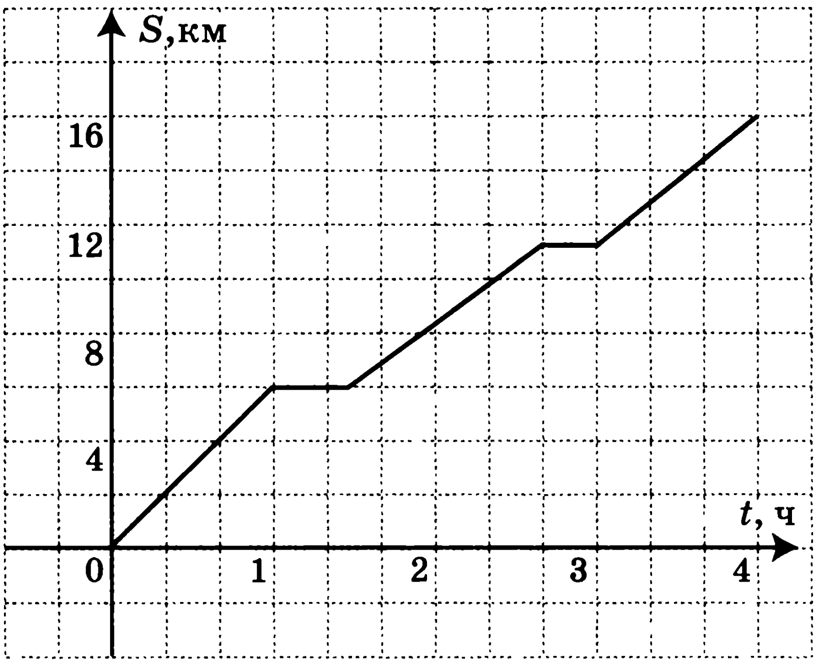


Рис. 1.20

1.69 Выразите переменную v из формулы, определяющей функцию пути: $s = v \cdot t$.

1.70 Выразите переменную S из формулы, определяющей функцию давления: $p = \frac{F}{S}$.

ГЛАВА 2

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение и его корни

Уравнения с одной переменной

Уравнением с одной переменной x называется равенство $f(x)=g(x)$, если сформулирована задача о нахождении всех тех значений x, при которых равенство с переменной обращается в верное числовое равенство.

Множество всех значений переменной x, при которых выражения $f(x)$ и $g(x)$ одновременно имеют смысл, называется **областью определения** (или областью допустимых значений переменной) уравнения $f(x)=g(x)$.

Всякое значение переменной, принадлежащее области определения уравнения, при котором равенство $f(x)=g(x)$ обращается в верное числовое равенство, называется **корнем уравнения.**

Уравнения, имеющие одни и те же корни (или одновременно не имеющие корней), называют **равносильными**.

Линейные уравнения

Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $ax=b$, где a и b — действительные числа; a — коэффициент при переменной, b — свободный член.

При решении линейного уравнения возможны следующие случаи:

1) $a\neq 0$; $x=\frac{b}{a}$;
2) $a=0$, $b=0$; уравнение имеет вид $0\cdot x=0$, верно при любом x, следовательно, корнем является любое действительное число;
3) $a=0$, $b\neq 0$ уравнение имеет вид $0\cdot x=b$, не имеет корней.

Квадратные уравнения

Квадратным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x — независимая переменная, a, b, c — некоторые действительные числа, $a\neq 0$.

Формула нахождения корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеет вид: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Выражение $D=b^2-4ac$ называется **дискриминантом** квадратного уравнения. Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней; если $D=0$, то уравнение имеет один действительный корень (в этом случае также говорят, что уравнение имеет два совпавших корня); если $D>0$, то уравнение имеет два действительных корня.

Теорема Виета (обобщённая)

Пусть имеется квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. В этом случае x_1, x_2 — корни этого уравнения тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\begin{cases} x_1x_2=\frac{c}{a}, \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}. \end{cases}$$

Понятие следствия уравнения

Пусть даны два уравнения. Тогда, если каждый корень первого уравнения является также и корнем второго уравнения, то второе уравнение называют **следствием** первого уравнения. В случае равносильных уравнений каждое из уравнений является следствием другого.

Уравнение-следствие может иметь и такие корни, которые не являются корнями исходного уравнения, — посторонние корни. Посторонние корни могут появиться при расширении области определения исходного уравнения.

С целью устранения посторонних корней все найденные корни уравнения-следствия проверяют непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

Уравнения с параметром

Уравнение $f(x;\ a)=0$ называют уравнением с переменной x и параметром a, если ставится задача решить это уравнение относительно x для каждого действительного значения a. К основным методам решения уравнений с параметрами относят следующие: аналитический метод, графический метод и метод, основанный на свойствах функций (монотонность, периодичность, чётность и др.).

Понятие об уравнениях высших степеней. Основные методы решения

Уравнение, степень которого выше второй, принято называть **уравнением высшей степени**. Основными методами решения уравнений высших степеней являются:

— метод замены переменной;
— метод разложения на множители;
— графический метод.

Линейное и квадратное неравенство. Понятие о методе интервалов

Решение неравенств с одной переменной

Решением неравенства называется всякое значение переменной x, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Два неравенства с одной переменной называются **равносильными**, если решения этих неравенств совпадают (в частности, если оба не имеют решений).

Линейные неравенства с одной переменной

Неравенство вида $ax>b$ ($ax<b$, $ax\geqslant b$, $ax\leqslant b$) называется **линейным неравенством.**

Квадратные неравенства

Неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ ($ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$), где $a\neq 0$, называется **квадратным неравенством.**

Например, если дискриминант квадратного трёхчлена ax^2+bx+c $D<0$ и старший коэффициент $a>0$, решением неравенства $ax^2+bx+c>0$ являются все значения x.

В общем случае для решения неравенства $ax^2+bx+c>0$ ($ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$) необходимо разложить квадратный трёхчлен на множители по формуле: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Далее можно применить метод интервалов в простейшей его форме: нанести на числовую ось в порядке возрастания нули функции x_1, x_2 и расставить знаки, начиная справа с плюса, в случае, если старший коэффициент $a>0$; с минуса, если старший коэффициент $a<0$ (см. рис. 2.1*а*).

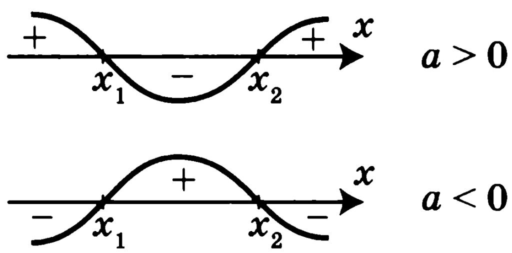


Рис. 2.1а

Рациональное неравенство. Обобщённый метод интервалов

Неравенство вида $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$, ($\frac{P(x)}{Q(x)}<0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}\leqslant 0$), где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, называется **рациональным неравенством.**

Для решения таких неравенств применяется **обобщённый метод интервалов.** С целью решения рационального неравенства обобщённым методом интервалов числитель и знаменатель (если таковой имеется) раскладываются на множители; после чего нули полученных сомножителей наносятся на числовую ось в порядке возрастания. Так, например, пусть имеется выражение вида $f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$. Изменение знака данного выражения определяется следующим образом. На числовой оси отмечаются в порядке возрастания нули функций числителя и знаменателя рассматриваемого выражения. Далее справа налево чертится кривая знаков. При этом, если число минусов, стоящих непосредственно перед аргументом x, — чётное, то кривая знаков чертится справа сверху, а расстановка знаков начинается справа со знака — «+» (см. рис. 2.1*б*); если же число минусов, стоящих непосредственно перед аргументом x, — нечётное, то кривая знаков чертится справа снизу, а расстановка знаков начинается справа со знака — «−». Количество множителей в числителе и знаменателе не существенно.

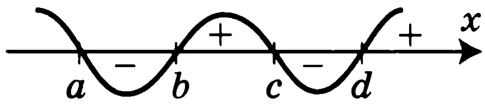


Рис. 2.1б

Уравнение с двумя переменными

Выражение вида $f(x, y)=0$ называется **уравнением с двумя переменными**. Решением уравнения с двумя переменными называется пара значения переменных, обращающая уравнение в верное равенство.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения (или одновременно не имеющие решений), называются **равносильными**.

График уравнения. Графическое решение неравенства

Графиком уравнения $f(x, y)=0$ называется множество точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x, y)=0$, т. е. при их непосредственной подстановке в уравнение оно обращается в верное равенство.

Уравнение вида $ax+by=c$, где x, y — переменные, а a, b, c — действительные числа, называется **линейным уравнением с двумя переменными**; числа a, b называются соответственно коэффициентами при переменных x и y, число c — свободным членом.

В случае, если в уравнении $ax+by=c$ хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, графиком уравнения является прямая; причём, если $a=0$, то эта прямая параллельна оси абсцисс, если $b=0$, то эта прямая параллельна оси ординат.

В случае, если в уравнении $ax+by=c$ оба коэффициента при переменных равны нулю одновременно: $a=b=0$, уравнение принимает вид: $0x+0y=c$ и, следовательно, возможны следующие ситуации:

1) свободный член также равен нулю: $c=0$; в этом случае мы имеем дело с выражением $0x+0y=0$, которое тождественно выполняется для всей координатной плоскости и, значит, уравнению удовлетворяет любая пара $(x;\ y)$, и, следовательно, графиком уравнения является вся координатная плоскость;
2) свободный член отличен от нуля: $c\neq 0$; в этом случае уравнение не имеет решения; значит, координаты ни одной из точек координатной плоскости не удовлетворяют уравнение, и, следовательно, его график не содержит ни одной точки.

Уравнение вида $ax^2+bxy+cy^2=d$ (или $ux^2+vy=d$), где x, y — переменные, а a, b, c, d, u, v — действительные числа, называется **уравнением второй степени с двумя переменными**; числа a, b, c называются соответственно коэффициентами при переменных и одновременно не равны нулю (числа $u\neq 0$, v называются соответственно коэффициентами при переменных x, y), число d — свободным членом.

Частными случаями таких уравнений являются, например:

1) уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ с центром в точке с координатами радиуса $(x_0,\ y_0)$;
2) уравнение вида $xy=k$, графиком которого является гипербола;
3) уравнение вида $x^2-y=0$, графиком которого является парабола.

Графическое решение неравенств с одной переменной

Для решения неравенства $f(x)>g(x)$ ($f(x)<g(x)$) графическим способом надо построить графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и выбрать те участки оси абсцисс, на которых график функции $y=f(x)$ расположен выше (ниже) графика функции $y=g(x)$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

2.1 Решите уравнение $5x-8=2x+1$.

Решение. $3x=9$, $x=3$.

Ответ: $x=3$.

2.2 Решите уравнение $7x-2(x+3)=5x-6$.

Решение. $7x-2x-6=5x-6$, $5x-6=5x-6$, $0=0$ — истинное равенство вне зависимости от значений переменной x. Следовательно, уравнение представляет собой верное равенство при всех значениях x.

Ответ: R.

2.3 Решите уравнение $11x-4=2x+3(3x+1)$.

Решение. $11x-4=2x+9x+3$, $11x-4=11x+3$, $-4=3$ — ложное равенство вне зависимости от значений переменной x, поэтому исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

2.4 Решите уравнение $x^2+3x-10=0$.

Решение. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1x_2=-10, \\ x_1+x_2=-3; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1=-5, \\ x_2=2. \end{array}\right.$$

Ответ: -5; 2.

2.5 Найдите наименьший корень уравнения $x^2-5x+6=0$.

Решение. Воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1x_2=6, \\ x_1+x_2=5; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=2. \end{array}\right.$$

Ответ: 2.

2.6 Решите уравнение $x^2-13=\dfrac{3x-12}{x-4}$.

Решение.

$\begin{cases} x^2-13=3, \\ x\neq 4; \end{cases}$ $x^2=16$, $x=-4$, $x=4$ — посторонний корень.

Ответ: -4.

2.7 Решите уравнение $x^3-7x-6=0$.

Решение. Решим уравнение методом разложения на множители.

$x^3-x-6x-6=0$, $x(x^2-1)-6(x+1)=0$,

$x(x-1)(x+1)-6(x+1)=0$, $(x+1)\big(x(x-1)-6\big)=0$,

$(x+1)(x^2-x-6)=0$,

$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ x^2-x-6=0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-2, \\ x=3. \end{array}\right.$

Ответ: -2; -1; 3.

2.8 Решите уравнение $x^8+15x^4-16=0$. В ответе укажите сумму корней уравнения.

Решение. Решим уравнение методом введения новой переменной.

Пусть $x^4=y$, $y>0$. Тогда исходное уравнение примет вид: $y^2+15y-16=0$.

По теореме Виета, получим: $\left[\begin{array}{l} y_1=-16, \\ y_2=1. \end{array}\right.$

$y_1=-16$ не удовлетворяет условию $y>0$.

Таким образом, имеем: $x^4=1$, $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Искомая сумма корней уравнения равна $1+(-1)=0$.

Ответ: 0.

2.9 Найдите количество решений уравнения $\left|x^2-6|x|\right|-a=0$ при $a \in (0;\ 9)$.

Решение. Решим задачу графическим методом. Перепишем уравнение в виде: $\left|x^2-6|x|\right|=a$. Построим в одной координатной плоскости графики функций $y=\left|x^2-6|x|\right|$, $y=a$. На рис. 2.2 представлены графики обеих функций. По рис. 2.2 видно, что прямая $y=a$ и график функции $y=\left|x^2-6|x|\right|$ имеют при $a \in (0;\ 9)$ шесть точек пересечения. Следовательно, исходное уравнение имеет 6 решений.

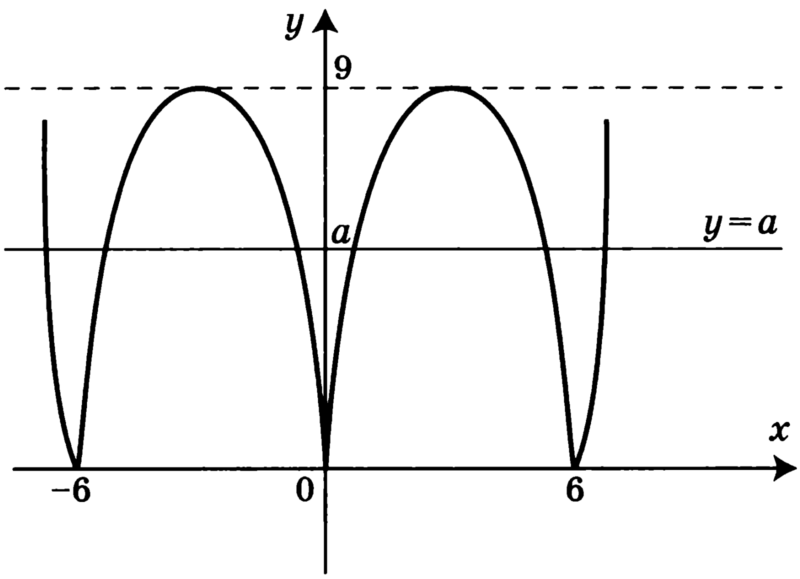


Рис. 2.2

Ответ: 6.

2.10 Решите неравенство $17x-3(2x+6) \geqslant -7$.

Решение. $17x-6x-18 \geqslant -7$, $11x \geqslant 11$, $x \geqslant 1$.

Ответ: $[1;\ +\infty)$.

2.11 Решите неравенство $5x-x^2>4$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов. Для этого перенесём все слагаемые в одну сторону, оставив справа нуль, и разложим левую часть неравенства на множители:

$x^2-5x+4<0$, $(x-1)(x-4)<0$.

На числовую ось нанесём в порядке возрастания. Расстановка знаков начинается справа со знака «+». Кривая знаков изображена на рис. 2.3.

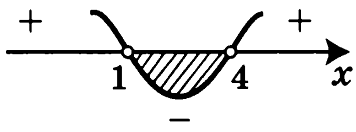


Рис. 2.3

Ответ: (1; 4).

2.12 Решите неравенство $\frac{-8x^2+30}{4x^2-16}<-2$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов. Перенесём все слагаемые в одну сторону, оставив справа нуль, и разложим числитель и знаменатель левой части неравенства на множители:

$\frac{-8x^2+30+8x^2-32}{(2x-4)(2x+4)}<0$, $\frac{-2}{(2x-4)(2x+4)}<0$,

$(2x-4)(2x+4)>0$, $(x-2)(x+2)>0$.

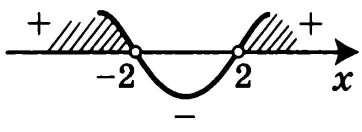


Рис. 2.4

На числовую ось нанесём в порядке возрастания $x_1=-2$; $x_2=2$. Расстановка знаков начинается справа со знака «+». Кривая знаков изображена на рис. 2.4.

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

2.13 Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=4$.

Решение. Данное уравнение является уравнением окружности с центром в начале координат радиуса 2. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, представлено на рис. 2.5.

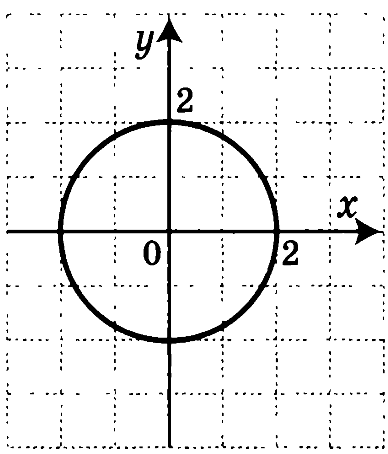


Рис. 2.5

Ответ: см. рис. 2.5.

2.14 Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $x+y-2=0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением прямой, пересекающей координатные оси в точках (0; 2); (2; 0). Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, представлено на рис. 2.6.

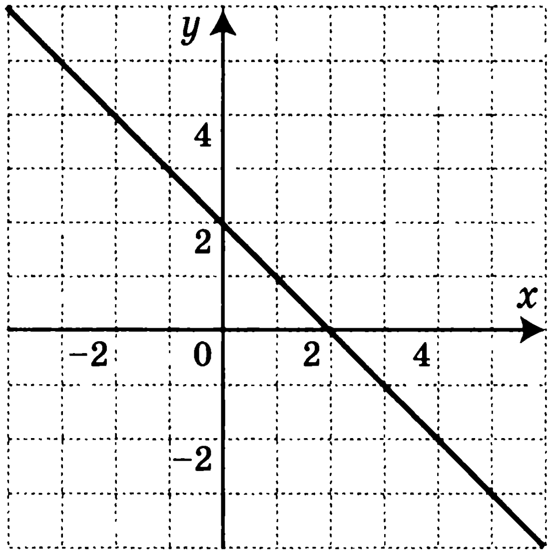


Рис. 2.6

Ответ: см. рис. 2.6.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

2.15 Упростите выражение: $\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$. **Ответ:** $\dfrac{x}{a+3x}$.

2.16 Сократите дробь: $\dfrac{10^{2m}}{2^{2m-3}5^{2m-1}}$. **Ответ:** 40.

Решите уравнение.

2.17 $11x-3=2(5x+57)+x$. **Ответ:** нет решений.

2.18 $x^2-7x+6=0$. **Ответ:** 1; 6.

2.19 $2x^2 - 3x + 1 = 0.$ **Ответ:** 0,5; 1.

2.20 $x^3 - 19x - 30 = 0.$ **Ответ:** −3; −2; 5.

2.21 Определите количество решений уравнения $x|x-4| = -a$ при $a \in (-4;\ 0)$.

Ответ: 3.

2.22 На координатной прямой отмечены три числа x, y, z (рис. 2.7).

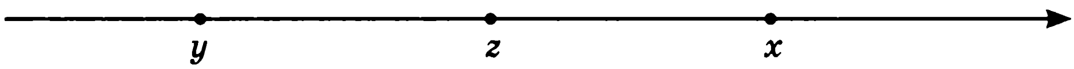


Рис. 2.7

Выберите верное утверждение и в ответе укажите его номер. **1.** $x - y > 0$; **2.** $x - y < 0$; **3.** $z - y < 0$; **4.** $x - z < 0$.

Ответ: 1.

2.23 Укажите два соседних натуральных числа, между которыми заключено число $7\sqrt{2}$.

Ответ: 9; 10.

2.24 Решите неравенство $13x + 4(3x + 6) \leqslant -1$.

Ответ: $(-\infty;\ -1]$.

2.25 Решите неравенство $\dfrac{3x^2 + 3}{x^2 - 4} > 3$.

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Постройте графики уравнений.

2.26 $y - x = 0.$

2.27 $y + x = 0.$

2.28 $2x+y=2.$

2.29 $x-\frac{y}{2}=4.$

2.30 $xy-1=0.$

2.31 $xy+1=0.$

2.32 $x^2+y-1=0.$

2.33 $(x+5)^2+(y-1)^2-1=0.$

2.34 $x^2+(y-2)^2-4=0.$

2.35 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-4=0.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.36 Упростите выражение: $\frac{a^2b^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ab}.$

2.37 Сократите дробь: $\frac{21^{3m+2}}{3^{3m-2}\,7^{3m+1}}.$

Решите уравнения.

2.38 $17x-2(x-3)=5x-24.$

2.39 $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}.$

2.40 $|x-1|=5-2x.$

Найдите наименьший корень уравнения.

2.41 $x^2 = 9$.

2.42 $x^2 - 4x = 0$.

2.43 $x^2 + 2x = 3|x+1| - 3$.

2.44 Найдите наибольший корень уравнения $x^3 - 3x + 2 = 0$.

2.45 Определите количество решений уравнения $\left|x^2 - 3|x| + 1\right| = 1$.

2.46 Определите количество решений уравнения $x|x-4| = -a$ при $a > 0$.

2.47 На координатной прямой отмечены три числа x, y, z (рис. 2.8).

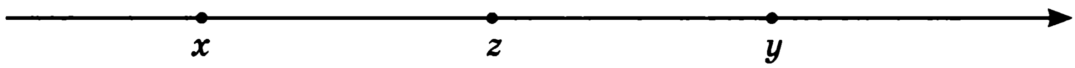


Рис. 2.8

Выберите верное утверждение и в ответе укажите его номер.
1. $x - y > 0$; **2.** $x - y < 0$; **3.** $z - y > 0$; **4.** $x - z > 0$.

2.48 Укажите два соседних целых числа, между которыми заключено число $2\sqrt{3}$.

2.49 Укажите два соседних целых числа, между которыми заключено число $-\sqrt{10}$.

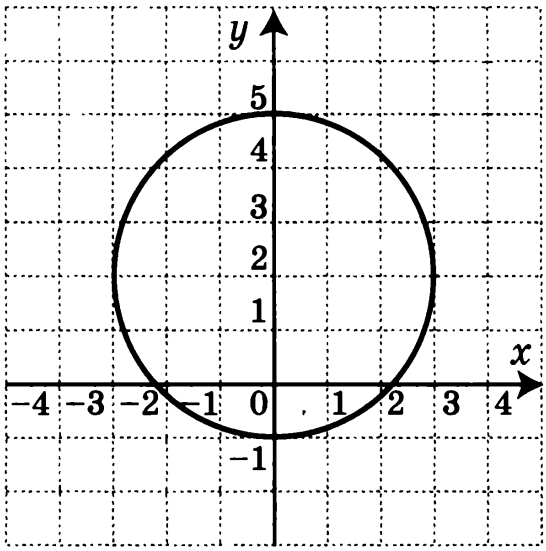
2.50 Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее условию $19x + 4(3x + 6) \leqslant x - 6$.

2.51 Найдите наименьшее целое значение x, удовлетворяющее условию $3x+\frac{6}{x}<\frac{81}{x}$.

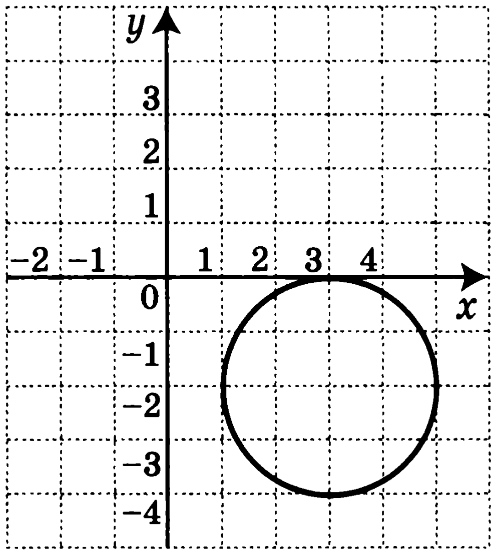
2.52 При каких значениях x верно неравенство $x^2-4x+4\leqslant 0$?

2.53 Определите, на каком из рисунков (рис. 2.9) представлена окружность, уравнение которой имеет вид $x^2+(y-2)^2=9$. Укажите номер правильного ответа.

1.



2.



3.

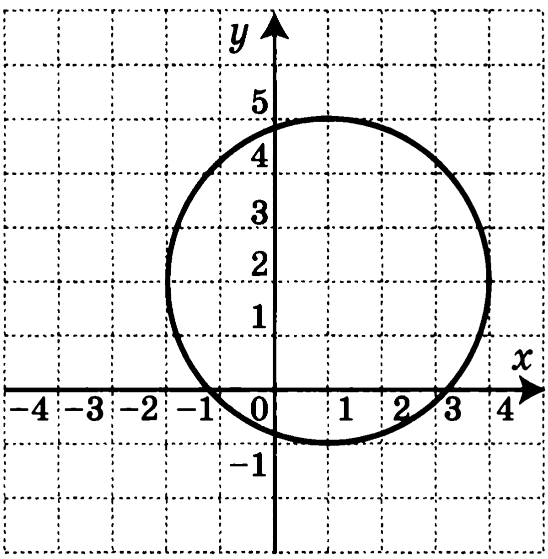


Рис. 2.9

2.54 На рис. 2.10 представлен график уравнения.
Определите, график какого уравнения представлен на рисунке. В ответе укажите номер правильного ответа.

1. $xy-1=0$;
2. $x^2+(y+2)^2=9$;
3. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$;
4. $(x-1)^2+(y+2)^2=3$.

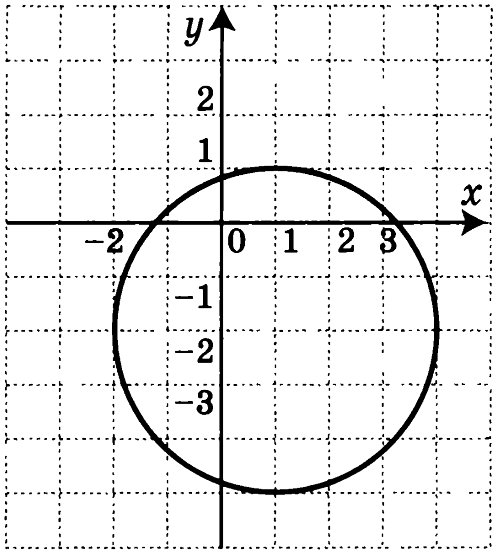


Рис. 2.10

2.55 На рис. 2.11 представлен график уравнения.
Определите, график какого уравнения представлен на рисунке. Укажите номер правильного ответа.

1. $xy-1=0$;
2. $x^2+(y-2)^2=9$;
3. $(x+1)^2+(y-2)^2=3$;
4. $y-\dfrac{2(x+1)}{x-2}=0$.

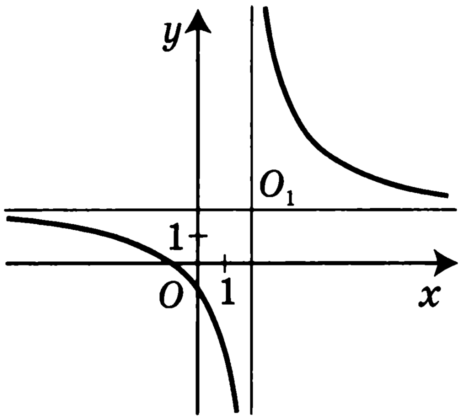


Рис. 2.11

2.56 На рис. 2.12 представлен график уравнения. Определите, график какого уравнения представлен на рисунке. Укажите номер правильного ответа.

1. $xy+1=0$;
2. $|x|+|y|=1$;
3. $x^2+y^2-1=0$;
4. $x+y+1=0$.

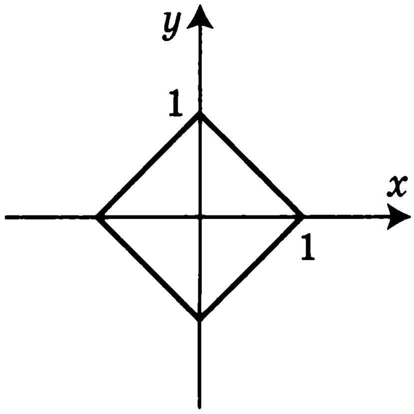


Рис. 2.12

2.57 На рис. 2.13 представлен график уравнения. Определите, график какого уравнения представлен на рисунке. Укажите номер правильного ответа.

1. $x-y+1=0$;
2. $|x|-|y|=1$;
3. $x^2-y^2=0$;
4. $xy=-1$.

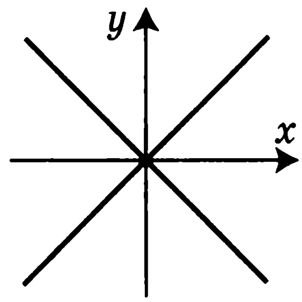


Рис. 2.13

2.58 Определите координаты центра окружности, заданной уравнением $(x-1)^2+(y+3)^2=16$. Укажите номер правильного ответа.
1. (−1; 0); **2.** (0; 3); **3.** (1; −3); **4.** (0; 0); **5.** (−3; 1).

2.59 Определите радиус окружности, заданной уравнением $(x+41)^2+(y-13)^2=25$. Укажите номер правильного ответа.
1. 1; **2.** 5; **3.** 0; **4.** 41; **5.** 13.

2.60 Определите радиус окружности, заданной уравнением $(x-1)^2+(y+13)^2=121$.

ГЛАВА 3

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Системы уравнений

Система двух уравнений с одной переменной

В том случае, когда надо найти значения переменной, одновременно удовлетворяющие обоим заданным уравнениям, говорят, что задана система уравнений.

Системы двух уравнений с двумя переменными

Пусть даны два уравнения с двумя переменными: $f(x;\ y)=0$ и $g(x;\ y)=0$. В том случае, если надо найти все общие решения двух уравнений с двумя переменными, говорят, что надо решить систему уравнений. Решением системы уравнений называется пара значений переменных, обращающая в верное равенство каждое уравнение системы. Для обозначения системы принято использовать фигурную скобку.

Методы решения систем из двух уравнений с двумя переменными:

1) метод подстановки;
2) метод сложения;
3) метод введения новых переменных (может применяться одним из следующих способов: а) вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы; б) вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений);
4) метод умножения;
5) метод деления (может применяться одним из следующих способов: а) доказывается, что выражение, на которое производится деление, отлично от нуля; б) в отдельном случае рассматривается возможность выражения, на которое производится деление быть равным нулю, в другом случае такая возможность исключается);
6) метод решения специального вида систем: а) однородных, б) симметрических;
7) графический метод.

Системы неравенств

Системы неравенств с одной переменной

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств (обозначение — фигурная скобка), если ставится задача найти все решения, удовлетворяющие каждое из заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называют решением системы неравенств.

Неравенства и системы неравенств с двумя переменными

Пусть дано неравенство $f(x;\ y)>g(x;\ y)$. Пара значений переменных, обращающая неравенство с переменными в верное числовое неравенство, называется решением неравенства с двумя переменными.

Несколько неравенств с двумя переменными образуют систему неравенств, если ставится задача найти все пары значений переменных, удовлетворяющие каждое из заданных неравенств. Пара значений переменных, обращающая каждое из неравенств системы в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств с двумя переменными.

Графическая интерпретация решения системы уравнений и системы неравенств с двумя переменными

Для решения системы уравнений с двумя переменными графическим методом надо в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

Поскольку пара действительных чисел однозначно определяет точку на координатной плоскости, решение неравенства или системы неравенств с двумя переменными может быть интерпретировано в виде множества точек координатной плоскости.

Решение текстовых задач алгебраическим способом

Проблемы физики, экономики, химии и других отраслей приводят к необходимости решения уравнений и их систем (иногда условия решаемой задачи требуют также включения в состав рассматриваемых систем и неравенств). Способ, при котором решение текстовых задач осуществляется при помощи уравнений и их систем, называется **алгебраическим.** При решении задач алгебраическим способом полезно использовать следующий алгоритм:

1) неизвестные величины, которые либо требуется найти в задаче, либо они необходимы для отыскания искомых величин, обозначают в качестве переменных;
2) составляют уравнение или систему уравнений;
3) находят решения уравнения или системы, удовлетворяющие условию задачи;
4) при помощи найденных решений получают ответ на поставленный в условии задачи вопрос.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

3.1 Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x-y-1=0, \\ x+y-2=0. \end{cases}$

Решение. Применим метод сложения. Сложив первое и второе уравнения, получим: $6x-3=0$, $x=\frac{1}{2}$. Далее применим метод подстановки, получим: $\frac{1}{2}+y=2$, $y=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

3.2 Решите систему уравнений $\begin{cases} xy=12, \\ x-2y-2=0. \end{cases}$

Решение. Применим метод подстановки, получим:

$$\begin{cases}(2y+2)y=12,\\ x=2y+2;\end{cases} \qquad \begin{cases}y^2+y-6=0,\\ x=2y+2;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-3,\\ x=2y+2=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}y=2,\\ x=2y+2=6;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-3,\\ x=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}y=2,\\ x=6\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-4;\ -3)$; $(6;\ 2)$.

3.3 Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2y+xy^2-6=0,\\ xy+x+y-5=0.\end{cases}$

Решение. Применим метод замены переменных:

$$\begin{cases}xy=a,\\ x+y=b.\end{cases} \quad \text{Получим: } \begin{cases}ab=6,\\ a+b=5;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3,\\ b=2;\end{cases}\\ \begin{cases}a=2,\\ b=3;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=3,\\ x+y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}xy=2,\\ x+y=3;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\text{нет решений;}\\ \begin{cases}x=1,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$.

3.4 Определите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases}y=0{,}6x^2\\ (x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25.\end{cases}$$

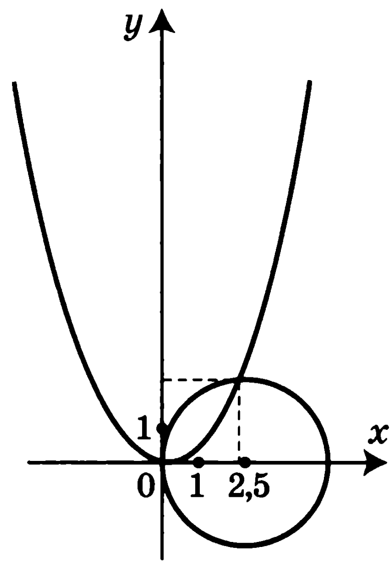


Рис. 3.1

Решение. Решим задачу графическим способом. Для нахождения количества решений системы построим в одной координатной плоскости графики уравнений $y=0{,}6x^2$ и $(x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25$ (рис. 3.1). Графиком уравнения $y=0{,}6x^2$ является

парабола. Графиком уравнения $(x-2{,}5)^2+y^2=6{,}25$ является окружность с центром в точке $(2{,}5;\ 0)$ радиуса $2{,}5$.
Из рис. 3.1 видно, что графики уравнений пересекаются в двух точках. Поэтому система имеет два решения.
Ответ: 2.

3.5 Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x+4>2x+5, \\ \dfrac{5x-8}{4-x^2}\leqslant 0. \end{cases}$

Решение. Для того чтобы решить систему неравенств, надо решить отдельно каждое из неравенств системы, нанести штриховкой на числовую ось промежутки, являющиеся решениями каждого из неравенств. В ответ записать пересечение полученных промежутков.
Рассмотрим первое неравенство: $3x+4>2x+5$. Это неравенство линейное, решая его, получим: $x>1$.
Рассмотрим второе неравенство: $\dfrac{5x-8}{4-x^2}\leqslant 0$. Это неравенство рациональное; решим его обобщённым методом интервалов. Для этого разложим знаменатель на множители:
$\dfrac{5x-8}{(2-x)(2+x)}\leqslant 0$, $\dfrac{5x-8}{(x-2)(x+2)}\geqslant 0$.
Нанесём на числовую ось в порядке возрастания нули функций числителя и знаменателя, изобразим кривую знаков и отметим штриховкой промежутки $x\in(-2;\ 1{,}6]\cup(2;\ +\infty)$, являющиеся решением этого неравенства (рис. 3.2).

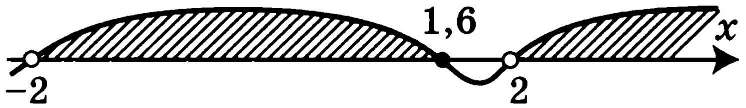


Рис. 3.2

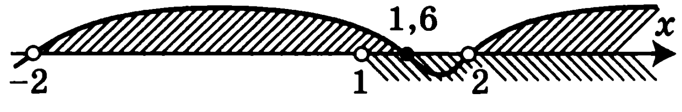


Рис. 3.3

В результате пересечения решений первого и второго неравенств (рис. 3.3) получим промежуток $x \in (1;\ 1{,}6] \cup (2;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (1;\ 1{,}6] \cup (2;\ +\infty)$.

3.6 Найдите область определения функции $y = \sqrt{\dfrac{3x-1}{5-x}} + \dfrac{1}{x-1}$.

Решение. Область определения данной функции определяется как совместное выполнение условий: $\dfrac{3x-1}{5-x} \geqslant 0$ и $x \neq 1$.

Таким образом, надо решить следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5-x} \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Первое неравенство $\dfrac{3x-1}{5-x} \geqslant 0$ решим методом интервалов. Расстановка знаков в данном случае начинается справа со знака «$-$». Изображение кривой знаков и штриховка решения этого неравенства изображена на рис. 3.4.

Учитывая второе условие системы $x \neq 1$, окончательно получаем: $\left[\dfrac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 5)$.

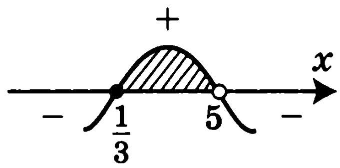


Рис. 3.4

Ответ: $\left[\dfrac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 5)$.

3.7 Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 < 25, \\ y \geqslant 2x + 1. \end{cases}$$

Решение. Построим на координатной плоскости график уравнения $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$. Графиком этого уравнения является окружность с центром $(1;\ -2)$ радиуса 5. Построим на координатной плоскости график уравнения $y = 2x + 1$.

Графиком этого уравнения является прямая. Область, соответствующая неравенству $(x-1)^2+(y+2)^2<25$, представляет собой круг без границы. Область, соответствующая неравенству $y \geqslant 2x+1$, расположена выше прямой $y=2x+1$ и включает в себя саму эту прямую. Изобразим эти области штриховкой на координатной плоскости. Пересечение этих областей и является искомой областью, которая изображена на рис. 3.5.

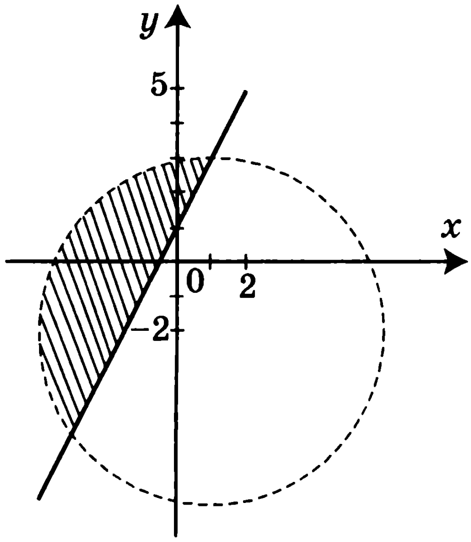


Рис. 3.5

Ответ: искомая область координатной плоскости представлена штриховкой на рис. 3.5.

3.8 При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y \geqslant \left|x^2-6|x|\right|, \\ y<a \end{cases}$ не имеет решений?

Решение. На рис. 3.6 представлены графики уравнений $y=\left|x^2-6|x|\right|$, $y=a$. Множество точек координатной плоскости, удовлетворяющее неравенству $y \geqslant \left|x^2-6|x|\right|$, расположено выше кривой, определяемой уравнением $y=\left|x^2-6|x|\right|$, включая саму кривую. Множество точек координатной плоскости, удовлетворяющее неравенству $y < a$, расположено ниже прямой, определяемой уравнением $y = a$, не включая саму прямую. Поэтому система не имеет общих точек при значении параметра $a \leqslant 0$.

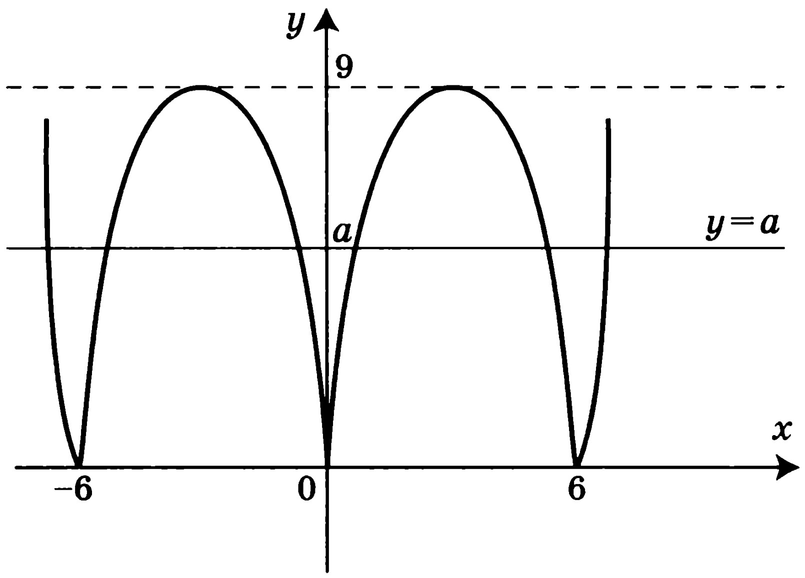


Рис. 3.6

Ответ: $a \leqslant 0$.

3.9 Путешественник проехал на автомобиле $\frac{5}{8}$ пути, после чего автомобиль поломался, и путешественник был вынужден пересесть на другой автомобиль, скорость которого меньше первого автомобиля на 20 км/ч. Поездка на первом автомобиле потребовала у путешественника на 15 мин больше времени, чем на втором. Определите скорости каждого автомобиля, если весь путь составляет 160 км.

Решение. Обозначим через x — скорость первого автомобиля, через y — скорость второго автомобиля. Так как по условию задачи скорость второго автомобиля меньше скорости первого автомобиля на 20 км/ч, то имеет место следующее уравнение: $y = x - 20$. Время поездки на первом автомобиле составило

$\dfrac{\frac{5}{8}\cdot 160}{x}$ ч, а время поездки на втором автомобиле составило $\dfrac{\frac{3}{8}\cdot 160}{y}$ ч. Так как по условию задачи на первом автомобиле путешественник ехал на 0,25 часа дольше, чем на втором, то имеет место следующее уравнение: $\dfrac{\frac{5}{8}\cdot 160}{x}-\dfrac{\frac{3}{8}\cdot 160}{y}=0{,}25.$

Таким образом, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x-20, \\ \dfrac{\frac{5}{8}\cdot 160}{x}-\dfrac{\frac{3}{8}\cdot 160}{y}=0{,}25. \end{cases}$$

Решая эту систему методом подстановки, получим:

$$\begin{cases} y=x-20, \\ \dfrac{100}{x}-\dfrac{60}{x-20}=0{,}25; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x-20, \\ \dfrac{100(x-20)-60x}{x(x-20)}=\dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x-20, \\ \dfrac{40x-2000}{x(x-20)}=\dfrac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x-20, \\ 4(40x-2000)=x(x-20); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x-20, \\ x^2-180x+8000=0; \end{cases} \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} y=x-20=60, \\ x=80; \end{cases} \\ &\begin{cases} y=x-20=80, \\ x=100. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Итак, мы имеем два ответа: скорость первого автомобиля 80 км/ч, второго автомобиля 60 км/ч; скорость первого автомобиля 100 км/ч, второго автомобиля 80 км/ч.

Ответ: скорость первого автомобиля 80 км/ч, второго автомобиля 60 км/ч; скорость первого автомобиля 100 км/ч, второго автомобиля 80 км/ч.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

Решите систему уравнений.

3.10 $\begin{cases} x+2y-3=0, \\ 5x-y-4=0. \end{cases}$

Ответ: (1; 1).

3.11 $\begin{cases} x^2-13x-4y=0, \\ y^2-4x-13y=0. \end{cases}$

Ответ: (0; 0); (17; 17); (–3; 12); (12; –3).

3.12 $\begin{cases} 3y^2-2xy=160, \\ y^2-3xy-2x^2=8. \end{cases}$

Ответ: (2; 8); (–2; –8); (–8,5; 5); (8,5; –5).

3.13 $\begin{cases} x+y=1, \\ x^4+y^4=7. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.14 $\begin{cases} 2x+y+z-7=0, \\ x+2y+z-8=0, \\ x+y+2z-9=0. \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

Определите количество решений системы уравнений.

3.15 $\begin{cases} 3x-y-1=0, \\ 3x-y-4=0. \end{cases}$

Ответ: нет решений.

3.16 $\begin{cases} 7x-y=5, \\ 7x-y-5=0. \end{cases}$

Ответ: бесконечно много решений (прямая решений с уравнением $7x-y-5=0$).

3.17 $\begin{cases} 2x+y-5=0, \\ y-|x-1|=0. \end{cases}$ **Ответ:** 1.

3.18 $\begin{cases} x+y=2, \\ x^3-y=0. \end{cases}$ **Ответ:** 1.

Решите систему неравенств.

3.19 $\begin{cases} \dfrac{x^2+x-4}{x}>1, \\ x^2<64. \end{cases}$ **Ответ:** $(-2;\ 0)\cup(2;\ 8)$.

3.20 $\begin{cases} x^2-5x+20\geqslant 0, \\ x^2-8x\leqslant 0. \end{cases}$ **Ответ:** $[0;\ 8]$.

3.21 $\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}>1, \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}-2<0. \end{cases}$ **Ответ:** $(1;\ 6)$.

3.22 $\begin{cases} 2x+5\leqslant 9, \\ 2x+5>1, \\ 4-x\geqslant 1, \\ 4-x<5. \end{cases}$ **Ответ:** $(-1;\ 2]$.

3.23 Найдите область определения функции
$y=\sqrt[4]{x^2-x-2}-\sqrt{2x-x^2+3}$.

Ответ: $\{-1\}\cup[2;\ 3]$.

3.24 Найдите область определения функции

$$y=\sqrt[4]{x^2-x}-\sqrt{3x-x^2}-\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

Ответ: $\{0\}\cup(2;\ 3]$.

Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств.

3.25 $\begin{cases}2x-4\leqslant y,\\4-x\geqslant y.\end{cases}$

3.26 $\begin{cases}x-2\leqslant y,\\x^2+y^2-16\leqslant 0.\end{cases}$

3.27 $\begin{cases}x-1\leqslant y,\\x^2+y^2-9<0.\end{cases}$

3.28 $\begin{cases}-x^2+1>y,\\x^2+(y-1)^2-1\leqslant 0.\end{cases}$

3.29 $\begin{cases}x^2-3\leqslant y,\\y<2x+1.\end{cases}$

3.30 При каких значениях параметра a уравнение

$$|x-5|(7-x)+a=0$$

имеет три различных корня?

Ответ: $a\in(-1;\ 0)$.

3.31 При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2+2(a-5)x+17=5a$$

имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $(1;\ 7)$?

Ответ: $a\in(-5;\ -3)$.

3.32 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x^2+(y-a)^2-4=0, \\ |x|+y-3=0 \end{cases}$ имеет два различных решения?

Ответ: $a \in \{3-2\sqrt{2}\} \cup (1;\ 5)$.

3.33 Имеется резервуар для воды, который две трубы, работая одновременно, наполнили за 7,5 часа. Какое время потребуется каждой из труб в отдельности для наполнения этого же резервуара, если одна из труб наполняет весь резервуар на 8 часов быстрей другой?

Ответ: 12; 20.

3.34 Имеется две модели, катящиеся по экспериментальной дорожке длиной 120 м. Обе модели имеют передние колёса одинаковых диаметров и задние колёса одинаковых диаметров. При этом у каждой из моделей длина окружности переднего колеса на 1 м меньше длины окружности заднего колеса. Для изменения хода эксперимента у второй модели длину окружности переднего колеса увеличили на 0,25 её длины, а длину окружности заднего колеса увеличили на 0,2 её длины. После этого переднее колесо второй модели сделало на той же дистанции на 4 оборота больше, чем заднее. Найдите длины окружностей обоих колёс первой модели, не подвергшейся реконструкции.

Ответ: 4; 5.

3.35 В лаборатории имеется два сплава олова: один сплав двадцатипроцентный, другой — тридцатипроцентный. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы получить 10 кг нового сплава, содержащего 27 % олова?

Ответ: 3 кг, 7 кг.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определите количество решений системы уравнений.

3.36 $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-y=2. \end{cases}$

3.37 $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x^2+(y+1)^2=2. \end{cases}$

3.38 $\begin{cases} x-3=0, \\ (x-1)^2+(y+3)^2=4. \end{cases}$

3.39 $\begin{cases} x^2-2x+y^2+4y+1=0, \\ xy-y-x+3=0. \end{cases}$

3.40 Найдите сумму абсцисс решения системы уравнений
$\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

3.41 Найдите среднее арифметическое абсцисс решения системы уравнений
$\begin{cases} x-y=2, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

3.42 Найдите сумму ординат решения системы уравнений
$\begin{cases} x+y=5, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{13}{6}. \end{cases}$

3.43 Найдите среднее арифметическое ординат решения системы уравнений
$\begin{cases} x+y=8, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

3.44 Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x+1 \leqslant 3, \\ x+1 \geqslant 0, \\ \dfrac{3}{1-x} < 0. \end{cases}$$

3.45 Найдите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x^2+2>1. \end{cases}$$

3.46 Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} |x-3|>-2, \\ |x-3|<5. \end{cases}$$

3.47 Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} |x+2|>1, \\ |x+2|<3. \end{cases}$$

3.48 Найдите середину отрезка, являющегося областью определения функции

$$y=\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+6}{-x^2-2x-4}}.$$

3.49 Определите, сколько целых чисел принадлежит области определения функции

$$y=\sqrt[4]{\frac{2+x}{2-x}}-\sqrt{1-\frac{2x}{2+x}}.$$

3.50 Определите, на каком рисунке (рис. 3.7) представлено графическое решение системы уравнений $\begin{cases} x-y=-1, \\ x-y+2=0. \end{cases}$

Укажите номер правильного ответа.

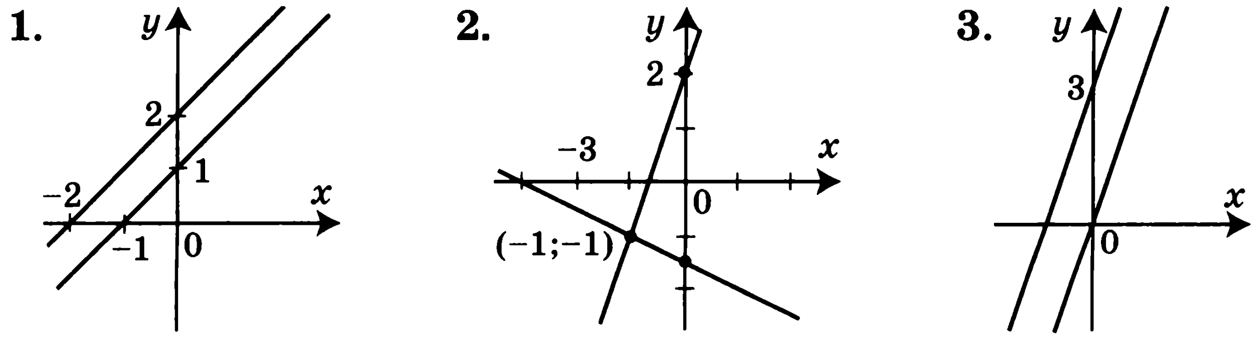


Рис. 3.7

3.51 Определите, на каком рисунке (рис. 3.8) представлено графическое решение системы уравнений $\begin{cases} xy=1, \\ x+y=2. \end{cases}$ Укажите номер правильного ответа.

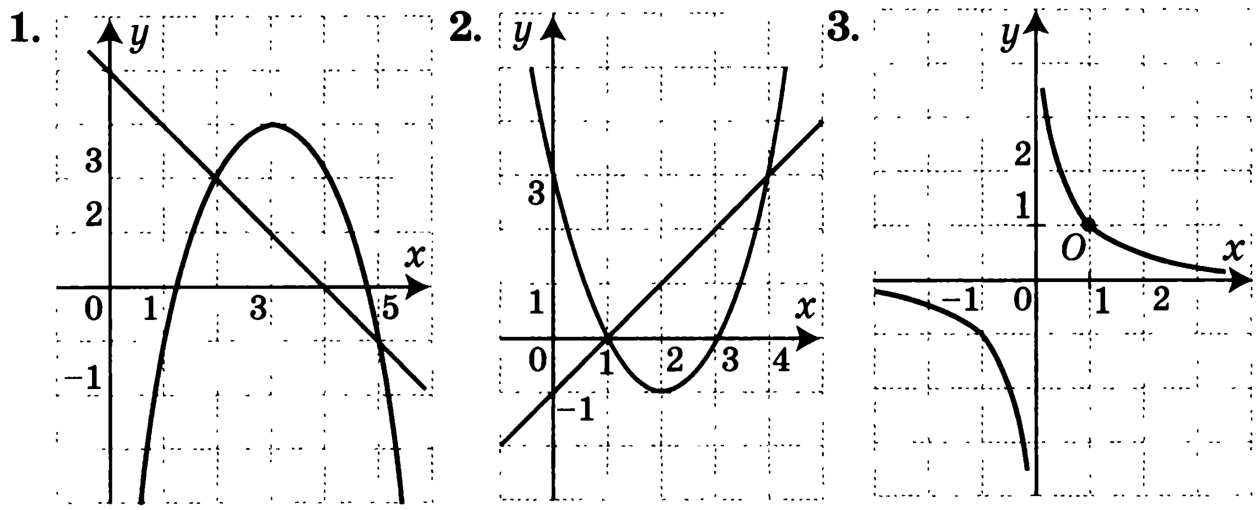


Рис. 3.8

3.52 На рис. 3.9 представлено графическое решение системы уравнений. Определите, решение какой из следующих систем представлено на рисунке? Укажите номер правильного ответа.

1. $\begin{cases} x-y+4=0, \\ -2x+y=2{,}5; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+2y-5=0, \\ -2x+y+8=0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y=0, \\ y-8=0; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+y=0, \\ -2x+y=0. \end{cases}$

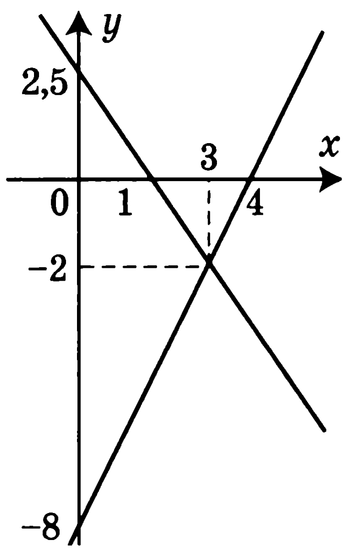


Рис. 3.9

3.53 На рис. 3.10 представлено графическое решение системы уравнений. Определите, решение какой из следующих систем представлено на рисунке? Укажите номер правильного ответа.

1. $\begin{cases} x^2 - y + 4 = 0, \\ -2x^2 + y = 5; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ -x + y + 4 = 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y - 6x = -6, \\ y + x = 4; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 1. \end{cases}$

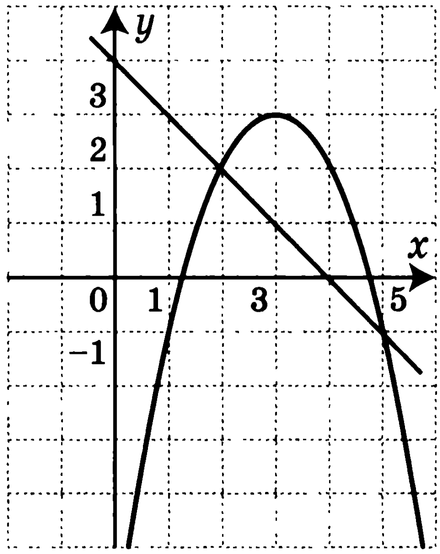


Рис. 3.10

3.54 Определите, на каком рисунке (рис. 3.11) представлено графическое изображение множества точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \leqslant -x - 2, \\ y \geqslant x - 2. \end{cases}$

Укажите номер правильного ответа.

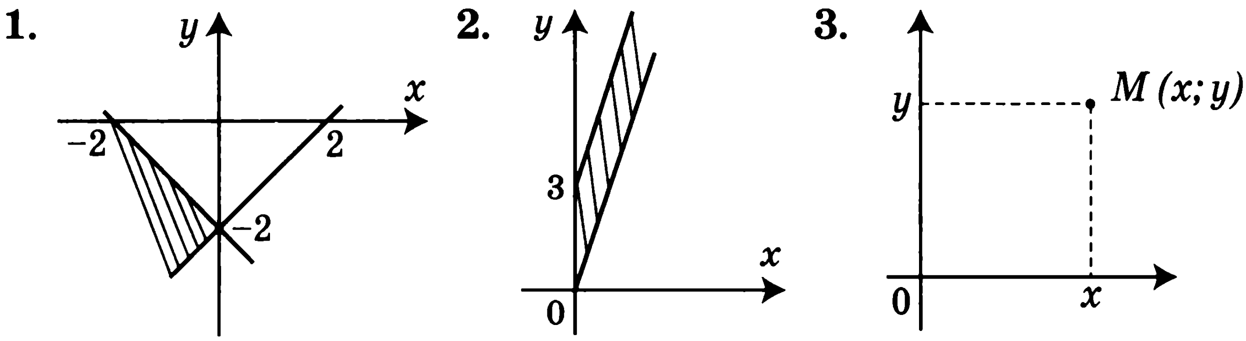


Рис. 3.11

3.55 Определите, на каком рисунке (рис. 3.12) представлено графическое изображение множества точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant |x| - 1, \\ y \leqslant -|x| + 1. \end{cases}$

Укажите номер правильного ответа.

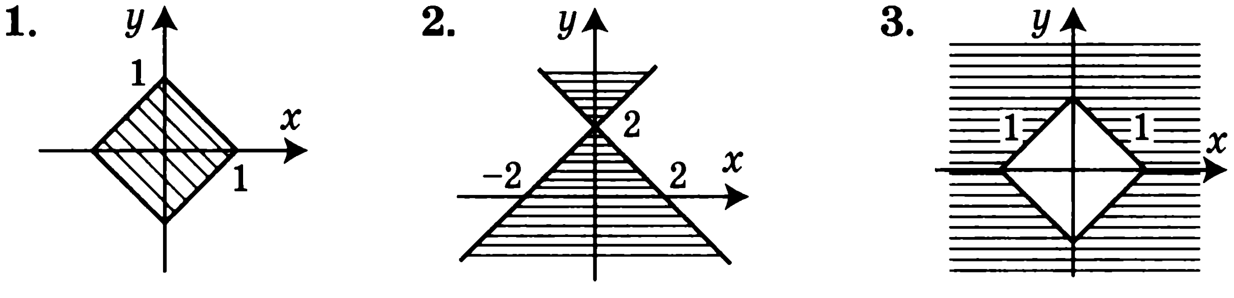


Рис. 3.12

3.56 На рис. 3.13 представлено графическое изображение множества точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств. Определите, решение какой из следующих систем представлено на рисунке?

Укажите номер правильного ответа.

1. $\begin{cases} y \geqslant -x-2, \\ y \leqslant x+2; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y > x-2, \\ y < x+2; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y > x-2, \\ y \leqslant x+2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} y \geqslant -x+2, \\ y < x+2; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} y > x-2, \\ y < -x+2. \end{cases}$

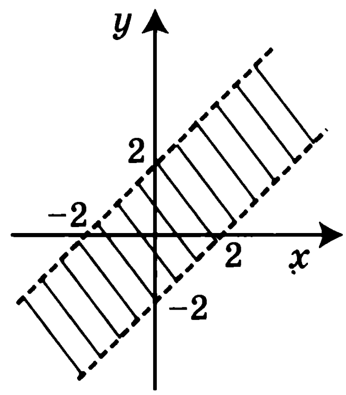


Рис. 3.13

3.57 На рис. 3.14 представлено графическое изображение множества точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств. Определите, решение какой из следующих систем представлено на рисунке?

Укажите номер правильного ответа.

1. $\begin{cases} y \geqslant -x-2, \\ y \geqslant x+2; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y > x-2, \\ y < x+2; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y > x-2, \\ y \leqslant x+2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} y \geqslant -x+2, \\ y < x+2; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} y > x+2, \\ y < x-2. \end{cases}$

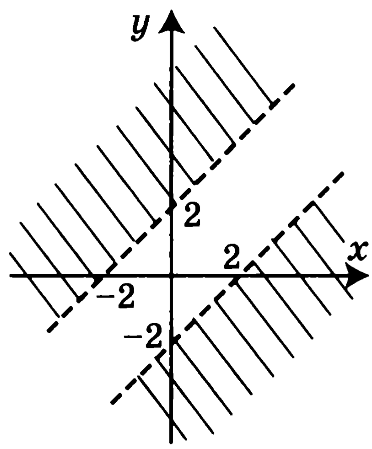


Рис. 3.14

3.58 На рис. 3.15 представлено графическое изображение множества точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств. Определите, решение какой из следующих систем представлено на рисунке?

Укажите номер правильного ответа.

1. $\begin{cases} y < \left| x^2 - 6|x| \right|, \\ y \leqslant 6; \end{cases}$

2. $\begin{cases} y \geqslant \left| x^2 - 6|x| \right|, \\ y - 6 \leqslant 0; \end{cases}$

3. $\begin{cases} y \leqslant \left| x^2 - 6|x| \right|, \\ y > 6; \end{cases}$

4. $\begin{cases} y > |x^2 - 6x|, \\ y - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

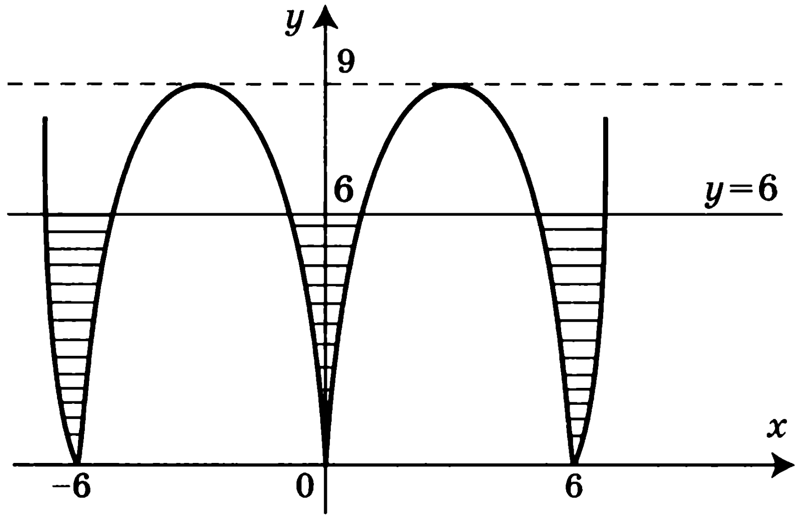


Рис. 3.15

3.59 Используя рис. 3.16, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями о количестве решений систем. Результаты запишите в таблицу, где в первой строке содержится буквенное обозначение системы, а во второй строке — номер утверждения.

а) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9, \\ y - x = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9, \\ y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9, \\ x = 4. \end{cases}$

1. нет решений;
2. два решения;
3. одно решение.

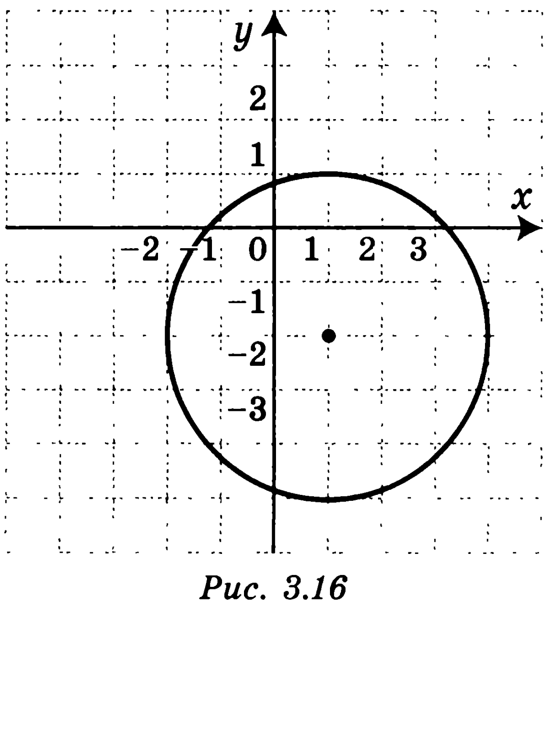


Рис. 3.16

3.60 Используя рис. 3.17, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями о количестве решений систем. Результаты запишите в таблицу, где в первой строке содержится буквенное обозначение системы, а во второй строке — номер утверждения.

а) $\begin{cases} y-\dfrac{2(x+1)}{x-2}=0, \\ y-x=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-\dfrac{2(x+1)}{x-2}=0, \\ y=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y-\dfrac{2(x+1)}{x-2}=0, \\ x=2. \end{cases}$

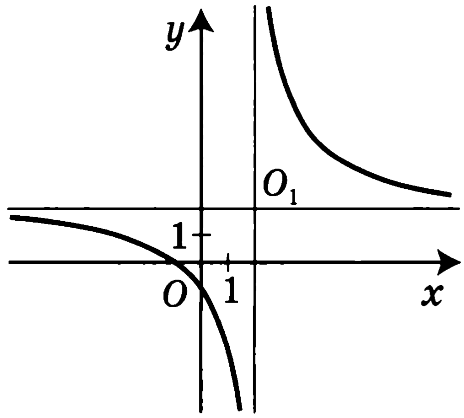


Рис. 3.17

1. нет решений; **2.** два решения; **3.** одно решение.

3.61 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (x+1)^2+y^2=1, \\ y=|x+1|+a \end{cases}$ имеет ровно 1 решение?

3.62 При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-1=0, \\ y=-|x-1|+a \end{cases}$ имеет 3 решения?

3.63 При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} a+x>0, \\ a+x\leqslant 2, \\ |a-x|\leqslant 1 \end{cases}$ имеет ровно 1 решение?

3.64 При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} (x-1)^2+y^2\leqslant 1, \\ y\geqslant (x-1)^2+a \end{cases}$ имеет ровно 1 решение?

3.65 При каких значениях параметра a уравнение $x^2-2ax+2x-a+1=0$ имеет корни различных знаков?

3.66 Двое маляров покрасили забор за 8 часов. Работая отдельно, один из них может покрасить половину этого забора на 6 часов быстрее другого. За сколько часов каждый маляр может самостоятельно покрасить забор?

3.67 Две команды водных туристов отплыли из лагеря по течению реки в пункт назначения. При этом одна команда передвигалась на катере, а другая — на моторной лодке. Команда, плывшая на катере, преодолела расстояние в полтора раза быстрее команды, плывшей на моторной лодке, при этом моторная лодка каждый час отставала от катера на 8 км. Возвращаясь назад в лагерь, команда, плывшая на катере, приплыла в 2 раза быстрее, чем команда, перемещавшаяся на моторной лодке. Найдите собственные (в стоячей воде) скорости катера и моторной лодки.

ГЛАВА 4

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие числовой последовательности

Числовой последовательностью называется числовая функция, заданная на множестве натуральных чисел. Последовательность считается заданной, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число y_n, которое называется **n-ным членом последовательности.** Последовательность принято обозначать (y_n).

Последовательности, содержащие бесконечно много членов, называются **бесконечными.** Последовательности, содержащие конечное число членов, называются **конечными.**

Основные способы задания последовательности:

1) Рекуррентный — указывается правило, по которому можно вычислить n-ный член последовательности, если известны её предыдущие члены.
2) Аналитический — последовательность задаётся формулой для n-ного члена.
3) Словесный — последовательность задаётся посредством словесного описания.

Арифметическая прогрессия

Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называется **арифметической прогрессией.** Число d называется **разностью** прогрессии: $d = a_{n+1} - a_n$. Таким образом, арифметическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $a_{n+1} = a_n + d$.

Арифметическую последовательность принято обозначать (a_n).

Возможны следующие случаи:

$d > 0$, (a_n) — возрастающая;

$d < 0$, (a_n) — убывающая;

$d = 0$, (a_n) — постоянная.

Характеристическое свойство

Последовательность (a_n) является **арифметической прогрессией** тогда и только тогда, когда любой её член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $\qquad$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Геометрическая прогрессия

Последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q, называется **геометрической прогрессией**. Число q называется **знаменателем** прогрессии: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Отношение любого члена геометрической прогрессии и ему предшествующего члена равно одному и тому же числу q. Геометрическую последовательность принято обозначать (b_n).

Таким образом, геометрическая прогрессия есть последовательность, заданная рекуррентно равенством $b_{n+1} = b_n q$, где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Возможны следующие случаи:

$q > 0$, $q \neq 1$, (b_n) — монотонная;

$q = 1$, (b_n) — постоянная;

$q < 0$, (b_n) — знакопеременная;

$|q| < 1$, (b_n) — бесконечная (бесконечно убывающая).

Характеристическое свойство

Последовательность (b_n) является **геометрической прогрессией** тогда и только тогда, когда каждый её член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов, то есть $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, $n \in N$.

Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формулы суммы n членов геометрической прогрессии:

$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$ $\qquad$ $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, $q \neq 1$.

Сумма **бесконечной геометрической прогрессии** при $|q| < 1$ равна $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.1 Напишите первый, тридцатый и сотый члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = \dfrac{2n+5}{3}$.

Решение. Вычислим значения первого, тридцатого и сотого членов последовательности, задав соответственно значения n равными 1, 30 и 100.

$$x_1 = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3},\ x_{30} = \frac{2 \cdot 30 + 5}{3} = \frac{65}{3},\ x_{100} = \frac{2 \cdot 100 + 5}{3} = \frac{205}{3}.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{7}{3}$, $x_{30} = \dfrac{65}{3}$, $x_{100} = \dfrac{205}{3}$.

4.2 Установите, какая из последовательностей не является монотонной. Укажите номер правильного ответа.

1. n; **2.** $\dfrac{1}{n}$; **3.** $(-1)^n n$.

Решение. Последовательность под номером 3 не является монотонной, так как она знакопеременная и, следовательно, не является ни возрастающей, ни убывающей, а значит, не является монотонной.

Ответ: 3.

4.3 Установите, какая из последовательностей, заданных формулами n-го члена, является монотонной. Укажите номер правильного ответа.

1. $2n$; **2.** $(-1)^n \frac{1}{n}$; **3.** $(-1)^{n-1}n$.

Решение. Последовательность под номером 1 является возрастающей и, следовательно, монотонной. Последовательности под номерами 2 и 3 не являются монотонными, так как они знакопеременные и, следовательно, не являются ни возрастающими, ни убывающими, а значит, не являются монотонными.

Ответ: 1.

4.4 Из последовательностей, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_3 \geqslant 45$. Укажите номер правильного ответа.

1. $2n$; *2.* $-n$; **3.** $5n^2$.

Решение. Вычисляя третий член соответственно каждой из последовательностей, заданных под номерами 1, 2, 3, получаем, что условие $a_3 \geqslant 45$ выполняется только для последовательности под номером 3.

Ответ: 3.

4.5 Какое число не является членом геометрической прогрессии: 1; 2; 4; 8; ...? Укажите номер правильного ответа.

1. 64; **2.** 72; **3.** 128; **4.** 512.

Решение. В условии предложена геометрическая прогрессия со знаменателем 2. Число 72 не является членом такой прогрессии.

Ответ: 2.

4.6 Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на её четвёртый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найдите первый член и разность данной прогрессии.

Решение. По формуле n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, следовательно, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_6 = a_1 + 5d$, $a_9 = a_1 + 8d$. По условию задачи имеем: $a_3 \cdot a_6 = 406$, $a_9 = 2a_4 + 6$, откуда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 5d) = 406, \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 3d) + 6, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = -\dfrac{5}{7}, \\ d = \dfrac{37}{14}; \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $a_1 = -\frac{5}{7}$, $d = \frac{37}{14}$; $a_1 = 4$, $d = 5$.

4.7 Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член в 6 раз больше суммы всех её последующих членов.

Решение. Так как по условию задачи каждый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 6 раз больше суммы всех её последующих членов, то этим же свойством обладает и первый её член b_1. Если из суммы всех членов S вычесть b_1, то разность $S - b_1$ будет в 6 раз меньше, чем b_1, следовательно, выполняется уравнение: $b_1 = 6(S - b_1)$. Воспользуемся формулой суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ и учтём её в уравнении $b_1 = 6(S - b_1)$.

Имеем: $b_1 = 6\left(\dfrac{b_1}{1-q} - b_1\right)$, $1 = 6\left(\dfrac{1}{1-q} - 1\right)$, $1 = \dfrac{6b}{1-q}$, $q = \dfrac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

4.8 Процесс выделения смолы из некоторого дерева под действием солнечных лучей происходит следующим образом: в течение первого часа выделяется 1 чайная ложка, а каждый последующий час — на пол-ложки больше, чем в предшествующий. Какова длительность процесса, если с рассвета до заката выделилось 13,5 ложек смолы.

Решение. Рассмотрим количество ложек смолы, выделяющейся каждый час в качестве членов арифметической прогрессии. Тогда первый член прогрессии $a_1=1$, разность прогрессии $d=\frac{1}{2}$, сумма первых n членов $S_n=13{,}5$. Искомой величиной в этом случае будет количество часов, т. е. n. Воспользуемся формулой суммы первых n членов прогрессии: $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, откуда получим: $27=2n+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$, $n^2+3n-54=0$, $n=6$, $n=-9$. По смыслу задачи отрицательное значение n не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6 часов.

4.9 При каких значениях параметра a найдутся такие значения параметра b, что следующие три числа $4+25^b$; a; 5^{-b} образуют геометрическую прогрессию?

Решение. Воспользуемся характеристическим свойством геометрической прогрессии: $a^2=(4+25^b)\cdot 5^{-b}$.

Получим: $a^2=4\cdot 5^{-b}+25^b\cdot 5^{-b}$.

Обозначим через $x=5^b$, тогда, решая квадратное уравнение $x^2-a^2x+4=0$, получим следующее условие на дискриминант $D=a^4-16\geqslant 0$, $(a-2)(a+2)(a^2+4)\geqslant 0$.

Решая последнее неравенство, получим, что значения параметра b такие, что следующие три числа $4+25^b$; a; 5^{-b} образуют геометрическую прогрессию, найдутся при $a\in(-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty)$.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

4.10 Напишите первый, тридцатый и сотый члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = \frac{3n-6}{10}$.

Ответ: $x_1 = -0{,}3$; $x_{30} = 8{,}4$; $x_{100} = 29{,}4$.

4.11 Напишите первый, тридцатый и сотый члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_{30} = 1$; $x_{100} = 1$.

4.12 Напишите первый, тридцатый и сотый члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = 5 + 5(-1)^n$.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_{30} = 10$; $x_{100} = 10$.

4.13 Вычислите первый, третий и шестой члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (-1)^{n+1}$.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_3 = \frac{1}{27}$; $x_6 = -\frac{1}{729}$.

4.14 Установите, какая из последовательностей, заданных формулами n-го члена, не является монотонной. Укажите номер правильного ответа.

1. $-2n$; **2.** $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; **3.** $\frac{1}{n}$.

Ответ: 2.

4.15 Установите, какая из последовательностей, заданных формулами n-го члена, является монотонной. Укажите номер правильного ответа.

1. $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; **2.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$; **3.** $(-1)^{n-1}n$.

Ответ: 2.

4.16 Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите прогрессию, для которой выполняется условие $a_3 < 0$. Укажите номер правильного ответа.

1. $2n+1$; **2.** $-2n+5$; **3.** $2n$.

Ответ: 2.

4.17 Какое число не является членом геометрической прогрессии: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$? Укажите номер правильного ответа.

1. $\frac{1}{16}$; **2.** $\frac{1}{512}$; **3.** $\frac{1}{34}$; **4.** $\frac{1}{128}$.

Ответ: 3.

4.18 По графикам функций, представленным на рис. 4.1, задайте арифметическую прогрессию a_n формулой n-го члена для всех натуральных значений аргумента $x=n$ и выберите ту прогрессию, для которой выполняется условие $a_n < 0$ при всех значениях n. Укажите номер правильного ответа.

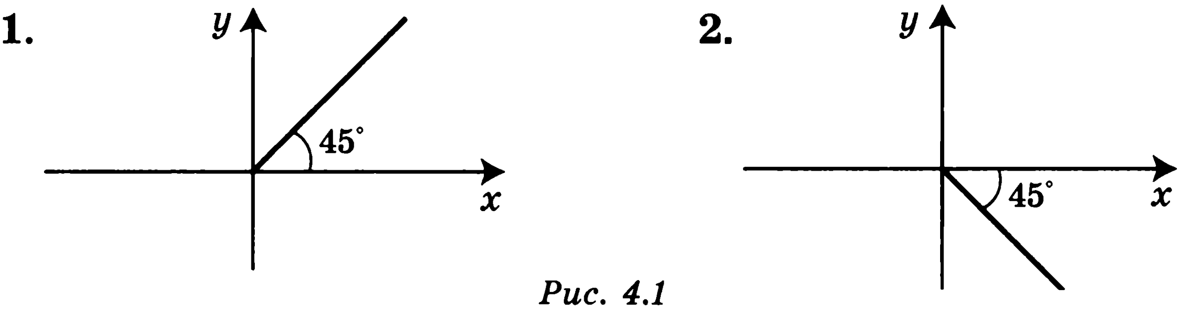


Рис. 4.1

Ответ: 2; $a_n = -n$.

4.19 По графику функции, представленному на рис. 4.2, составьте формулу n-го члена арифметической прогрессии a_n для всех натуральных значений аргумента $x=n$ и выберите, какое из следующих чисел

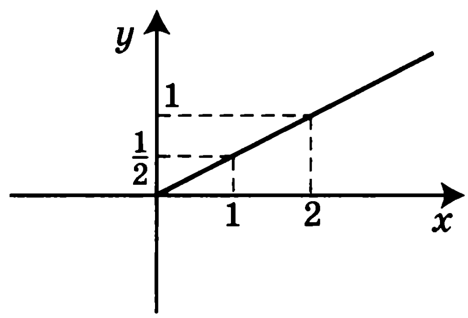


Рис. 4.2

не является членом прогрессии. Укажите номер правильного ответа.

1. 4; **2.** 5,5; **3.** 6,7; **4.** 7.

Ответ: 3; $a_n = \frac{1}{2}n$.

4.20 Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма квадратов её членов равна 48. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Ответ: $b_1 = 6$, $q = -\frac{1}{2}$.

4.21 Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 2, а сумма кубов её членов равна 24. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Ответ: $b_1 = 3$, $q = -\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.22 Вычислите первый, пятый и сотый члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = (-1)^n \frac{2n-1}{3+n}$.

4.23 Вычислите первый, седьмой и двухсотый члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = (-1)^{n+1}(2+3n)$.

4.24 Вычислите первый, пятый и восьмой члены последовательности, если её n-й член задаётся формулой $x_n = 2^{-n}(-1)^n$.

4.25 Установите, какая из последовательностей, заданных формулами n-го члена, не является монотонной.

Укажите номер правильного ответа.

1. $(-1)^{n+1}n$; **2.** $\frac{1}{n}$; **3.** $2n$.

4.26 Установите, какая из последовательностей, заданных формулами n-го члена, является монотонной. Укажите номер правильного ответа.

1. $(-1)^n n$; **2.** $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$; **3.** $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4.27 Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите прогрессию, для которой выполняется условие $a_n < 0$ при всех значениях n. Укажите номер правильного ответа.

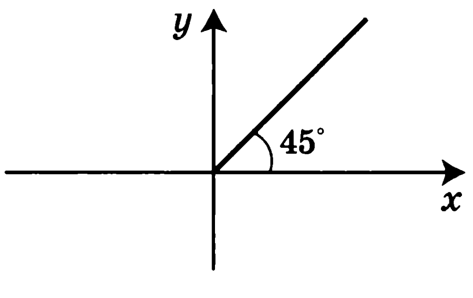
1. $-3n+1$; **2.** $3n-2$; **3.** $4n+3$.

4.28 Какое число не является членом геометрической прогрессии: 1; −3; 9; −27; ...? Укажите номер правильного ответа.

1. −243; **2.** 729; **3.** 81; **4.** 612.

4.29 По графикам функций, представленным на рис. 4.3, задайте арифметическую прогрессию a_n формулой n-го члена для всех натуральных значений аргумента $x = n$ и выберите ту прогрессию, для которой выполняется условие: $a_n > 0$ при всех значениях n. Укажите номер правильного ответа.

1.



2.

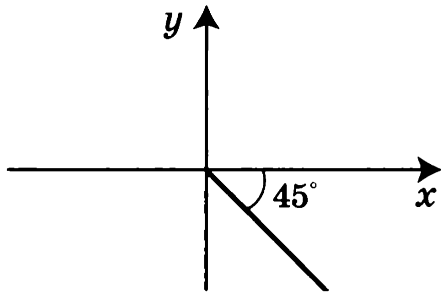


Рис. 4.3

4.30 По графику функции, представленному на рис. 4.4, составьте формулу n-го члена арифметической прогрессии a_n для всех натуральных значений аргумента $x=n$ и выберите, какое из следующих чисел не является членом прогрессии. Укажите номер правильного ответа.

1. 2; **2.** 5,5; **3.** 6; **4.** 7.

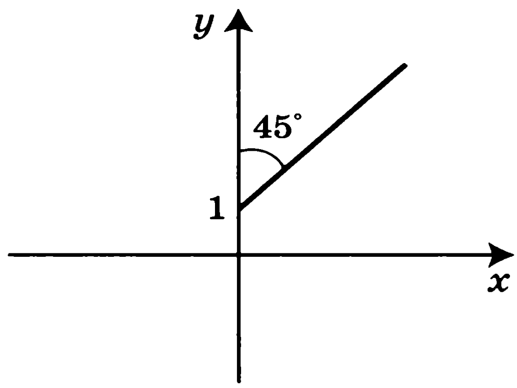


Рис. 4.4

4.31 Три положительных числа, сумма которых равна 15, образуют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 1, 4 и 19, то получатся три числа, образующие геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4.32 Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой второй член в 8 раз больше суммы всех её последующих членов.

4.33 Три числа, сумма которых равна 78, составляют геометрическую прогрессию. Их можно рассматривать так же, как первый, третий и девятый члены арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

4.34 Больному прописано лекарство, которое следует принимать по схеме: в первый день — 30 капель раствора, а каждый последующий день на 2 капли меньше, чем в предшествующий. В ёмкости, предназначенной для курса лечения, содержится 150 капель. Сколько дней длится курс лечения?

ГЛАВА 5

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Комбинаторные задачи. Перестановки. Размещения. Сочетания

Задачи, при решении которых необходимо составлять и подсчитывать комбинации из конечного числа элементов, принято называть **комбинаторными задачами.** Раздел математики, в котором рассматриваются такие задачи, называется **комбинаторикой.**

Правило суммы: общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах (без учёта числа совпадений), то есть если для выбора объекта A имеется n способов, а для выбора объекта B, отличного от A, имеется m способов, то выбор либо A, либо B осуществляется $n+m$ способами.

Правило произведения: если для выбора объекта A имеется n способов и если после каждого такого выбора для выбора объекта B, отличного от A, имеется m способов, то выбор пары (A, B) с учётом порядка осуществляется nm способами.

Если имеется n различных элементов, то число различных способов, которыми n различным элементам можно присвоить номера от 1 до n, равно $n!$. Каждый способ нумерации от 1 до n называется **перестановкой** рассматриваемого множества из n элементов. Число таких перестановок обозначается через P_n и вычисляется по формуле: $P_n = n!$.

Любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определённом порядке из данных n элементов, называется **размещением** из n элементов по k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Число из n элементов по k обозначается A_n^k и вычисляется по формуле: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Выборка k элементов из данных n элементов без учёта порядка называется **сочетанием** из n элементов по k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k и вычисляется по формуле: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Числа C_n^k называются **биномиальными коэффициентами** и обладают следующими свойствами:

$C_n^k = C_n^{n-k}$;

$C_n^0 = C_n^n = 1$;

$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;

$C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1} = C_n^n$.

Элементы теории вероятностей и статистики

Вероятностью события при проведении некоторого испытания называется отношение числа исходов, в результате которых наступает это событие, к общему числу всех равновозможных между собой исходов этого испытания. Пусть проводится некоторый опыт и надо найти вероятность события A. Вероятность события A обозначается $P(A)$ и вычисляется по формуле: $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, где $N(A)$ — количество тех исходов опыта, в котором наступает событие A, N — число всех всевозможных исходов рассматриваемого опыта.

Событие, которое в рассматриваемом опыте может как наступить, так и не наступить, называется **случайным.** Событие, которое в рассматриваемом опыте обязательно наступит, называется **достоверным.** Событием, которое в рассматриваемом опыте наступить не может, называется **невозможным.** При этом вероятность достоверного события считается равной 1; вероятность невозможного события считается равной 0.

Раздел математики, в котором исследуется количественная оценка случайных событий, называется **теорией вероятностей.**

События называются **несовместными**, если они не могут происходить одновременно в одном и том же испытании. Вероятность суммы любого числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. В частности, если событие C

означает, что наступает одно из двух несовместных событий A или B, то вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

Два события называются **независимыми**, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого. Если событие C означает совместное наступление двух независимых событий A и B, то вероятность события C равна произведению вероятностей событий A и B.

К основным задачам статистики относятся, например, получение, обработка и хранение информации, выработка и оценка достоверности различных прогнозов. При этом представление информации возможно в виде таблиц, графиков, диаграмм, в частности, гистограмм (или столбчатых диаграмм). В случае, если ширина столбцов гистограммы мала, а основания столбцов образуют некоторый промежуток, то гистограмма принимает вид графика выравнивающей функции, построенной по рассматриваемой выборке. График выравнивающей функции может быть получен в результате преобразования кривой нормального распределения (гауссовой кривой).

Аналитическое задание гауссовой кривой имеет вид: $y=\phi(x)$, $\phi(x)=\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, в котором присутствуют две константы: $\pi \approx 3{,}14$; $e \approx 2{,}7$.

Отметим несколько основных терминов, необходимых для обработки информации:

— **генеральная совокупность** — множество всех возможных результатов измерения;

— **статистическая выборка** (или статистический ряд) — множество результатов, полученных в рассматриваемом измерении;

— **варианта** — значение элемента выборки;

— **кратность варианты** — количество раз, реально наблюдаемое рассматриваемой варианты в выборке;

— **объём выборки** — сумма кратностей всех вариант выборки;
— **частота варианты** — отношение варианты к объёму выборки;
— **вариационный ряд** — упорядоченное множество всевозможных вариант.

К основным числовым характеристикам выборки относятся:

— **размах выборки** — разница между наибольшей и наименьшей вариантой;
— **мода** — наиболее часто встречающаяся варианта;
— **среднее значение** — частное от деления суммы всех результатов, входящих в выборку, на количество всех результатов.

Если информация обработана и представлена в виде таблицы, и

— в первой строке записывают варианты, во второй — кратности, в этом случае получается таблица распределения выборки;
— в первой строке записывают варианты, во второй — кратности, в третьей — частоты, в этом случае получается таблица распределения частот выборки.

Если информация обработана и представлена в виде графика, и

— по оси абсцисс указывают значения вариант, по оси ординат — кратности, в этом случае полученный график называют графиком распределения выборки;
— по оси абсцисс указывают значения вариант, по оси ординат — частоты, в этом случае полученный график называют графиком распределения частот выборки или полигоном (многоугольником) частот.

Если при большом числе независимых повторений в неизменных условиях одного и того же эксперимента частота появления события совпадает с некоторым постоянным числом, то такое число называется **статистической вероятностью** этого события, а само явление — **статистической устойчивостью.**

Теорема Бернулли: вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания вычисляется по формуле: $P_n(k)=C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где p — вероятность успеха, $q=1-p$ — вероятность неудачи в отдельном испытании.

Закон больших чисел: при неограниченном увеличении повторений некоторого испытания частота наступления в этом испытании события практически совпадает с вероятностью этого события.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

5.1 В классе учатся 12 девочек и 15 мальчиков. Для дежурства на четырёх этажах школы необходимо одновременно выделить четыре пары дежурных. Каждая пара должна состоять из мальчика и девочки. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Выберем сначала девочек. Это можно сделать C_{12}^4 способами. После этого выберем мальчиков в пару к каждой из выбранных девочек, при этом уже порядок выбора мальчиков — существенен. Мальчиков можно выбрать A_{15}^4 способами. Таким образом, выделить четыре пары дежурных можно $C_{12}^4 \cdot A_{15}^4=\frac{12!}{4!\cdot 8!}\cdot\frac{15!}{11!}=16\,216\,200$ способами.

Ответ: 16216200.

5.2 В заключительный тур конкурса детских исследовательских работ отобрано 10 претендентов на победу. Жюри состоит из трёх членов, каждый из которых независимо друг от друга должен распределить претендентов по порядку в зависимости от их успехов. По условиям конкурса победителем будет назван тот претендент, на которого укажут хотя бы двое членов жюри. Какова вероятность того, что победитель конкурса будет определён?

Решение. Трое членов жюри могут отобрать победителя конкурса 10^3 способами. Число 1000 является общим числом исходов. При этом три члена жюри могут выбрать различных победителей в количестве случаев равном $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Совпадение в выборе победителя хотя бы у двух членов жюри возможно в $1000 - 720 = 280$ случаях. В условиях данной задачи число 280 является числом благоприятных исходов, когда на одного и того же претендента указали хотя бы два члена жюри. Таким образом, вероятность того, что победитель конкурса будет определён, вычисляется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов и равно $\frac{280}{1000} = 0{,}28$.

Ответ: 0,28.

5.3 Гриша выстрелил стрелой из лука в квадратную мишень и попал в неё. Какова вероятность того, что острие стрелы попадёт внутрь вписанного в квадрат мишени круга?

Решение. Обозначим сторону квадратной мишени через a. Тогда радиус вписанного в квадрат мишени круга равен $\frac{a}{2}$. Вероятность того, что Гриша, попав в мишень, попадёт внутрь вписанного в квадрат мишени круга, равна отношению площади круга к площади квадрата: $\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

5.4 Конструктор предложил построить сооружение на 2000 забивных железобетонных сваях. Согласно строительным нормам на объекте должен быть испытан контрольными нагрузками 1 % от требуемого количества свай.

Результаты проведённых испытаний привезённых и забитых в грунт свай приведены в таблице:

Сваи	1	2	3	4	5	6	7
Результат испытаний, т	38	42	46	49	41	47	43

Сваи	8	9	10	11	12	13	14
Результат испытаний, т	40	44	48	45	43	46	42

Сваи	15	16	17	18	19	20
Результат испытаний, т	46	48	47	39	46	50

Найдите размах, моду и среднее значение выборки значений из второй строки таблицы. Постройте график распределения кратностей выборки.

Решение. Всего имеем 20 испытаний. Самый большой результат равен 50, а самый маленький результат равен 38. Размах выборки равен: $50-38=12$.

Мода — наиболее часто встречающееся значение варианты в выборке — равна 46.

Для вычисления среднего значения выборки и построения графика распределения кратностей выборки составим таблицу распределения выборки:

Варианта	38	42	46	49	41	47	43	40
Кратность	1	2	4	1	1	2	2	1

Варианта	44	48	45	39	50	Количество вариант: 13
Кратность	1	2	1	1	1	Объём выборки: 20

Следовательно, среднее значение вычисляем по формуле:

$$\frac{38+42\cdot2+46\cdot4+49+41+47\cdot2+43\cdot2+40+44+48\cdot2+45+39+50}{20}=$$

$$=\frac{890}{20}=44{,}5.$$

Для построения графика распределения кратностей выборки отложим по оси абсцисс .значения вариант, а по оси ординат — кратности вариант. Получим следующий график распределения кратностей выборки (рис. 5.1):

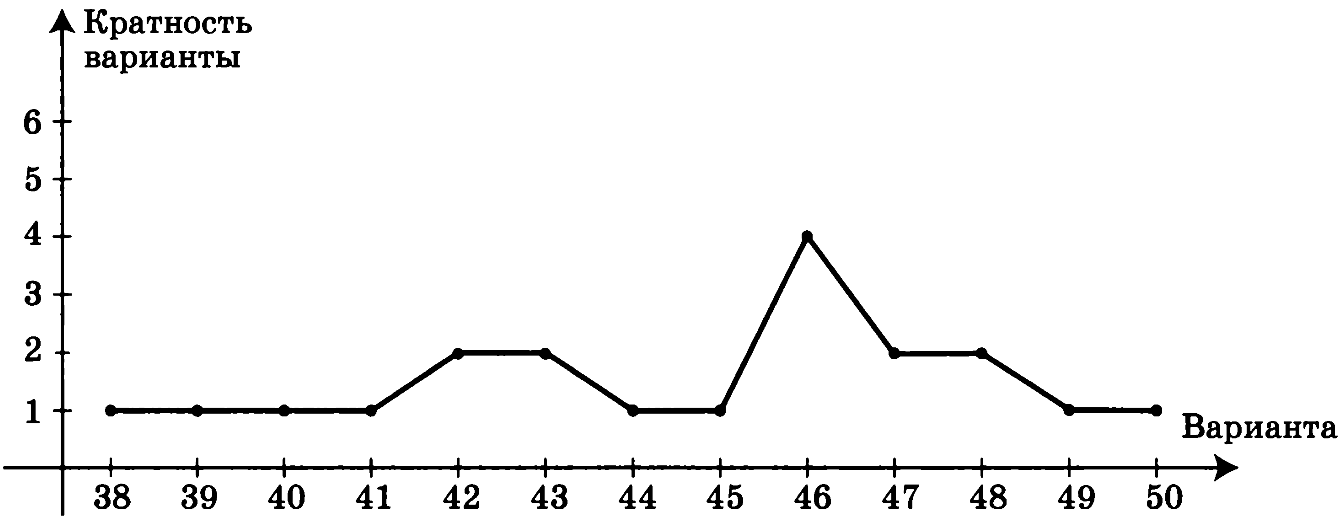


Рис. 5.1

Ответ: 12; 46; 44,5.

5.5 Постройте графики и гистограммы на интервалах 1–3, 4–6, 7–9 распределения кратностей и частот выборки длин слов из приведённого ниже отрывка стихотворения А. С. Пушкина «Храни меня, мой талисман»:

«Храни меня, мой талисман,
Храни меня во дни гоненья,
Во дни раскаянья, волненья:
Ты в день печали был мне дан...»

Решение. Рассмотрим текст отрывка стихотворения и справа в каждой строке запишем длины соответствующих слов (пробелы и знаки препинания не учитываются):

Храни меня, мой талисман, 5, 4, 3, 8
Храни меня во дни гоненья, 5, 4, 3, 3, 7
Во дни раскаянья, волненья: 2, 3, 9, 8
Ты в день печали был мне дан. 2, 1, 4, 6, 3, 3, 3

Получим следующие таблицы:

Таблица распределения выборки

Варианта (длина слова)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Количество вариант: 9
Крат-ность	1	3	6	3	2	1	1	2	1	Объём выборки: 20

Таблица распределения частот выборки

Варианта (длина слова)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Количество вариант: 9
Крат-ность	1	3	6	3	2	1	1	2	1	Объём выборки: 20
Частота варианты	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	1
Частота варианты (%)	5	15	30	15	10	5	5	10	5	100 %

Отложим по оси абсцисс значения вариант, а по оси ординат кратности вариант, получим следующий график распределения кратностей выборки (рис. 5.2):

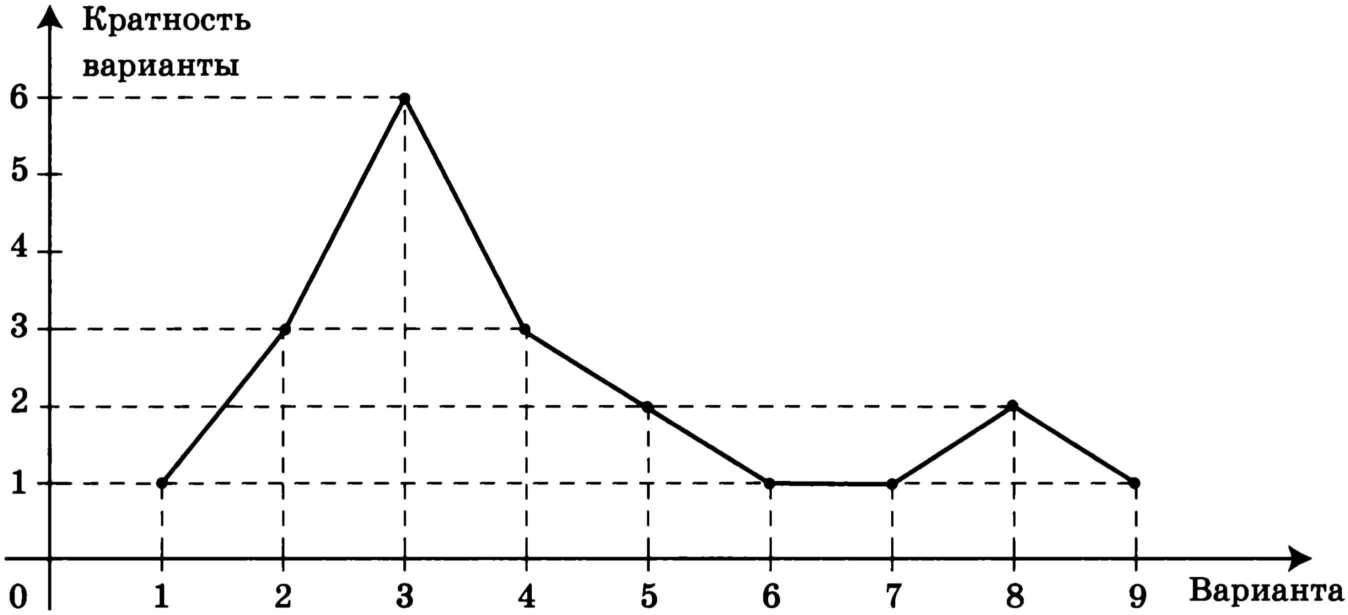


Рис. 5.2

Отложим по оси абсцисс значения вариант, а по оси ординат частоты вариант, получим следующий график распределения частот выборки (рис. 5.3):

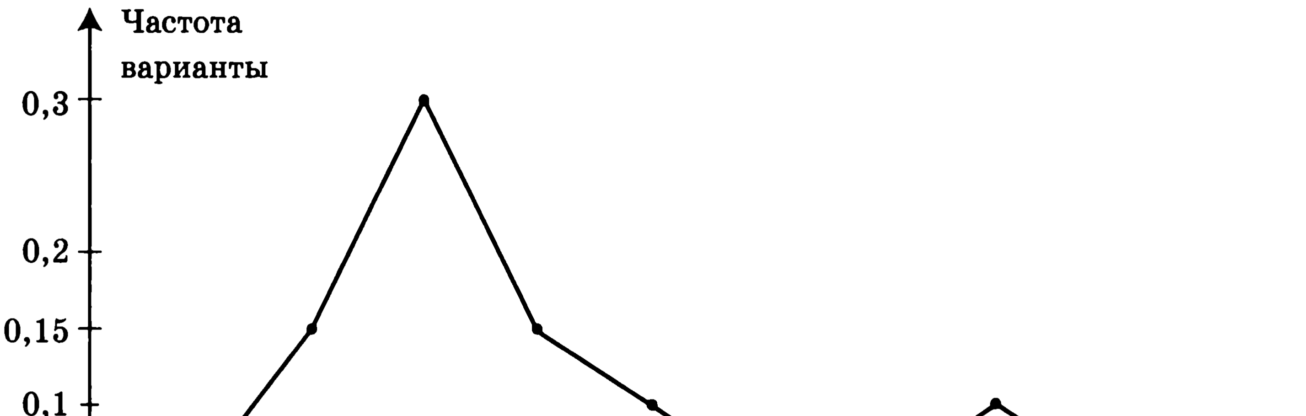


Рис. 5.3

График распределения частот выборки (%)

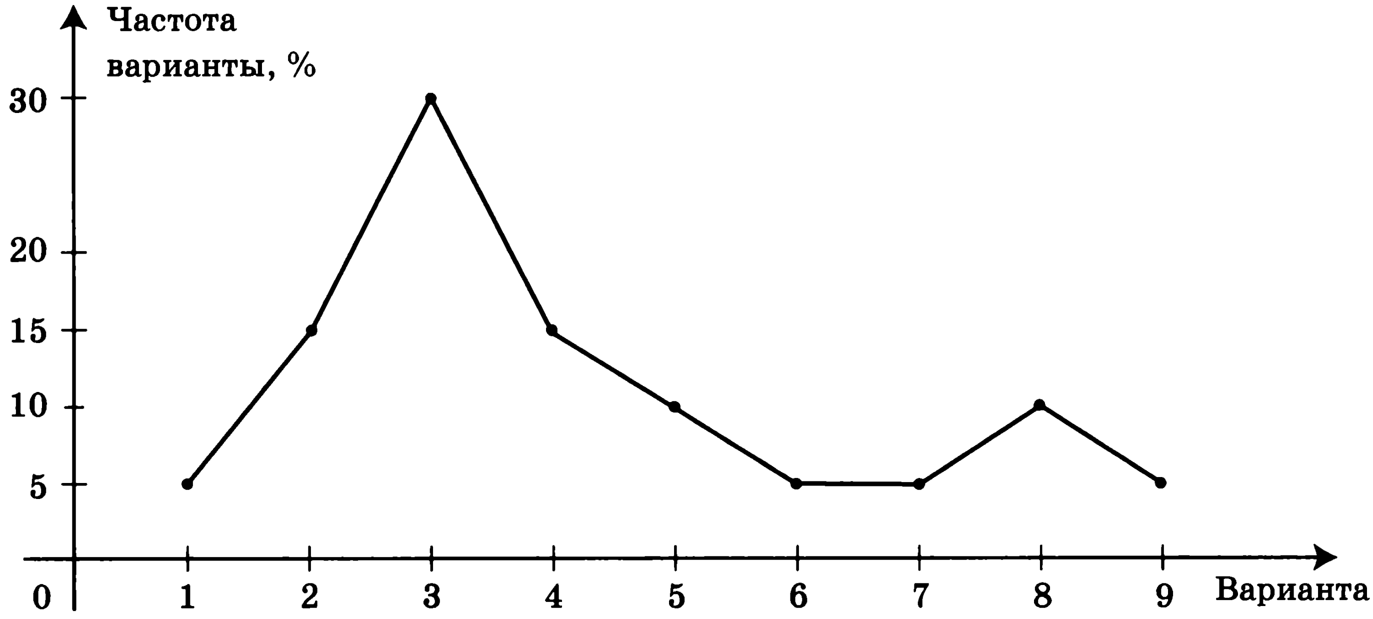


Рис. 5.4

Для построения гистограмм распределения кратностей и частот на интервалах 1–3, 4–6, 7–9 составим следующую таблицу:

Варианта (длина слова)	[1, 3]	[4, 6]	[7, 9]	Количество вариант: 3
Кратность	$1+3+6=10$	$3+2+1=6$	$1+2+1=4$	Объём выборки: 20
Частота варианты	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1
Частота варианты (%)	50 %	30 %	20 %	100 %

Получим следующие гистограммы (рис. 5.5, 5.6):

Гистограмма распределения кратностей

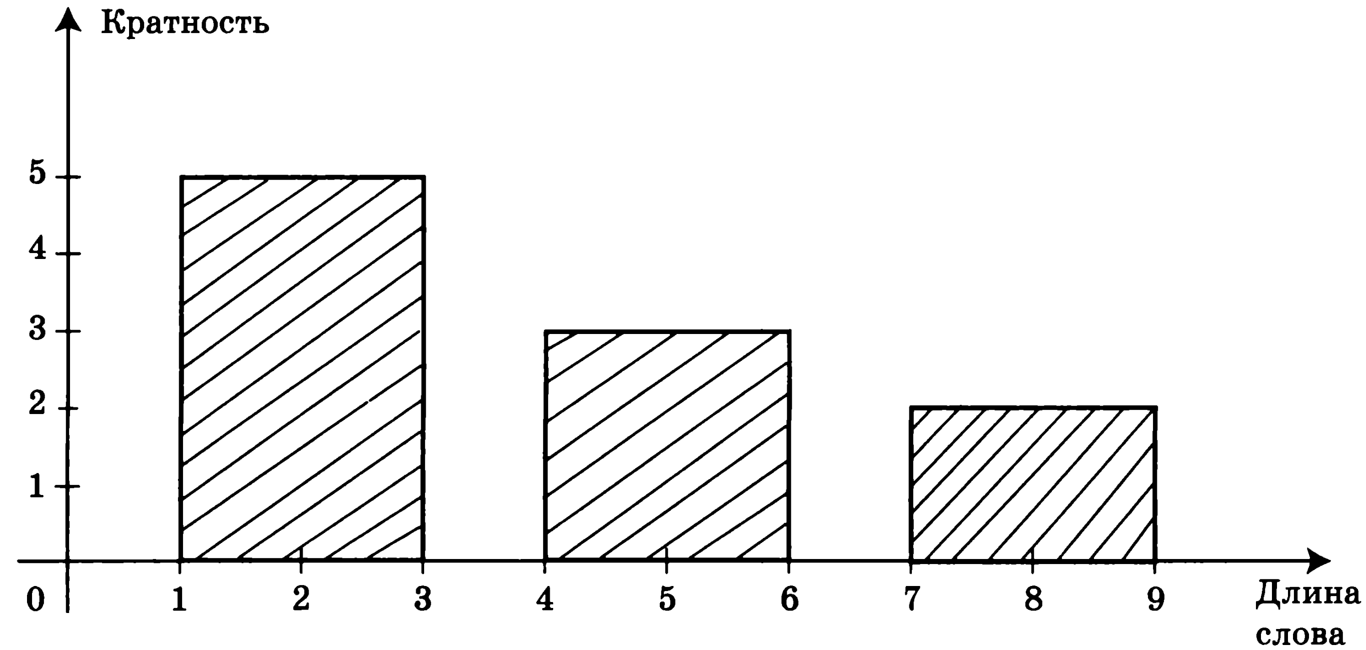


Рис. 5.5

Гистограмма распределения частот (%)

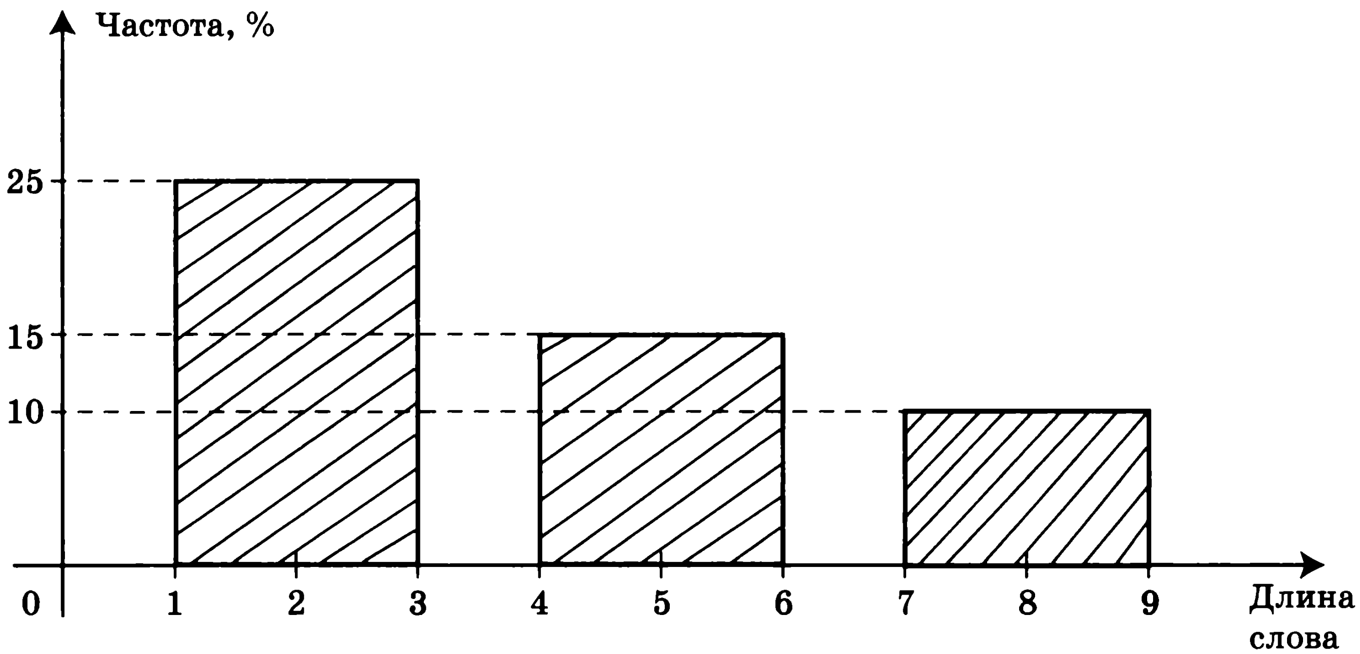


Рис. 5.6

Ответ: графики и гистограммы распределения выборки и частот выборки приведены на рис. 5.2–5.6.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

5.6 Для изготовления трёхцветных различных флагов команд спортсменов, участвующих в соревнованиях, имеются ткани пяти различных цветов. Для какого числа команд можно изготовить такие флаги?

Ответ: 60.

5.7 В поход собирается группа из девяти человек. Необходимо выбрать из состава группы руководителя, его заместителя, казначея и повара. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3024.

5.8 Тренер должен выбрать из 30 спортсменов команду из 4 человек для участия в четырёхэтапной эстафете, определив при этом порядок выхода спортсменов на этапы. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 657720.

5.9 В районный совет избрано 30 депутатов. Из них необходимо выбрать председателя совета, а также первого, второго и третьего его заместителей. Каким количеством способов можно это сделать?

Ответ: 657720.

5.10 Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8, 9 при условии, что каждая цифра может содержаться в записи числа лишь нечётное количество раз?

Ответ: 72.

5.11 Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 7,8,9,0, если каждая цифра может содержаться в записи числа лишь 1 раз?

Ответ: 18.

5.12 Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Ответ: 27.

5.13 На прямой взяты 7 точек, а на параллельной ей прямой — 3 точки. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются данные точки?

Ответ: 84.

5.14 Сколько существует треугольников, у которых вершины являются вершинами данного выпуклого 12-угольника, но стороны не совпадают со сторонами этого 12-угольника?

Ответ: 112.

5.15 В колоде имеется 36 карт четырёх мастей, в каждой масти имеется туз. Из этой колоды вынимают одновременно две карты. Какова вероятность того, что обе карты — тузы?

Ответ: $\frac{1}{105}$.

5.16 В колоде имеется 36 карт четырёх мастей, в каждой масти имеется туз. Из этой колоды вынимают одновременно три карты. Какова вероятность того, что все три вытащенные карты — тузы?

Ответ: $\frac{1}{1785}$.

5.17 В мешочке находится 3 красных и 4 синих шарика. Какова вероятность того, что вынутые из него одновременно два шарика окажутся красными?

Ответ: $\frac{1}{7}$.

5.18 Для иллюстраций учебника математики автор нарисовал различные геометрические фигуры.

1) Когда он нарисовал прямоугольный треугольник с гипотенузой 70 мм и с отношением катетов, равным 3:4, внутрь треугольника упала капля туши. Какова вероятность того, что капля попала ближе к меньшему катету, чем к большему?

Ответ: $\frac{3}{7}$.

2) Когда он нарисовал параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°, и диагональю, делящей тупой угол в отношении 1 : 3, внутрь треугольника упала капля туши. Какова вероятность того, что капля попала ближе к вершине A, чем к вершинам B и D?

Ответ: $\frac{1}{8}$.

5.19 Постройте графики и гистограммы на интервалах 1–3, 4–6, 7–9 распределения кратностей и частот выборки длин слов из приведённого ниже отрывка стихотворения А. С. Пушкина «Певец»:

«...Вздохнули ль вы, внимая тихий глас
Певца любви, певца своей печали?
Когда в лесах вы юношу видали,
Встречая взор его потухших глаз,
Вздохнули ль вы?»

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.20 Из 25 спортсменов тренер должен отобрать команду из четырёх человек для участия в четырёхэтапной эстафете. Сколькими способами он может это сделать, если ему также необходимо учесть порядок пробега этапов эстафеты?

5.21 Для дежурства по школе надо выделить из класса трёх девочек и двух мальчиков. Сколькими способами это можно сделать, если в классе учатся 15 девочек и 17 мальчиков?

5.22 В отряде из 30 человек необходимо избрать руководителя и трёх его заместителей. Каким количеством способов это можно сделать?

5.23 В колоде содержится 36 карт четырёх мастей. Сколькими способами можно выбрать из этой колоды одновременно 4 карты разных мастей так, чтобы в каждой четвёрке не было карт одинакового достоинства?

5.24 Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 7, 8, 9, если одна и только одна цифра содержится в записи числа чётное количество раз?

5.25 Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, если цифры могут повторяться?

5.26 Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 8, 9, 0, одна и только одна цифра содержится в записи числа чётное количество раз?

5.27 Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8, 9, 0, если каждая цифра содержится в записи числа лишь 1 раз?

5.28 На прямой взяты 11 точек, а на параллельной ей прямой — 5 точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются данные точки?

5.29 Сколько существует треугольников, у которых вершины являются вершинами данного выпуклого 10-угольника, но стороны не совпадают со сторонами этого 10-угольника?

5.30 В мешочке находятся шарики: 2 жёлтых, 3 синих и 16 красных. Вася хочет вытащить из мешочка одновременно два шарика. Какова вероятность того, что из вытащенных двух шариков один окажется жёлтым, а другой — синим?

5.31 В колоде имеются карты четырёх мастей. В каждой масти — по 9 карт во главе с тузом. Миша должен вытащить из колоды одновременно 3 карты. Какова вероятность того, что среди вытащенных карт окажется хотя бы один туз?

5.32 В колоде имеются карты четырёх мастей. В каждой масти — по 9 карт. Гриша хочет вытащить из колоды одновременно две карты. Какова вероятность того, что вытащенные карты будут одинаковой масти?

5.33 На уроке черчения Петя по заданию учителя начертил тушью равнобедренный прямоугольный треугольник. Капля туши упала внутрь этого треугольника. Какова вероятность того, что капля попала ближе к вершине прямого угла, чем к вершинам острых углов треугольника?

5.34 Для фундаментов металлургического завода изготовлено 2640 буронабивных свай. Для контроля качества выполненных свай строительными нормами предусмотрены испытания не менее 0,5 % свай пробными (контрольными) нагрузками. В связи с ответственностью объекта было испытано 18 свай. Результаты испытаний приведены в таблице:

Сваи	1	2	3	4	5	6
Результат испытаний, т	620	680	590	610	670	660

Сваи	7	8	9	10	11	12
Результат испытаний, т	630	650	640	620	640	650

Сваи	13	14	15	16	17	18
Результат испытаний, т	670	630	680	660	650	610

Найдите размах, моду и среднее значение выборки значений из второй строки таблицы.

5.35 Для устранения трещин в стенах и фундаментах старых зданий применяют цементный раствор с различным содержанием по весу составляющих веществ — воды, цемента, специальной глины и добавок, которые регулируют затвердевание раствора. На рис. 5.7 представлены три круговые диаграммы. Определите, какая из диаграмм соответствует раствору, содержащему наименьшее количество воды. В ответе укажите номер диаграммы.

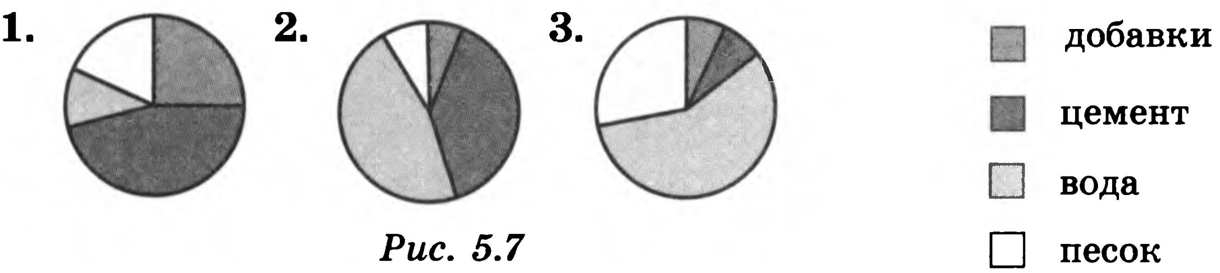


Рис. 5.7

5.36 На рис. 5.8 представлены три круговые диаграммы, отражающие содержание по весу цемента, воды, песка и специальных добавок для различных видов штукатурных растворов. Определите, какая из диаграмм соответствует раствору с наибольшим содержанием песка. В ответе укажите номер диаграммы.

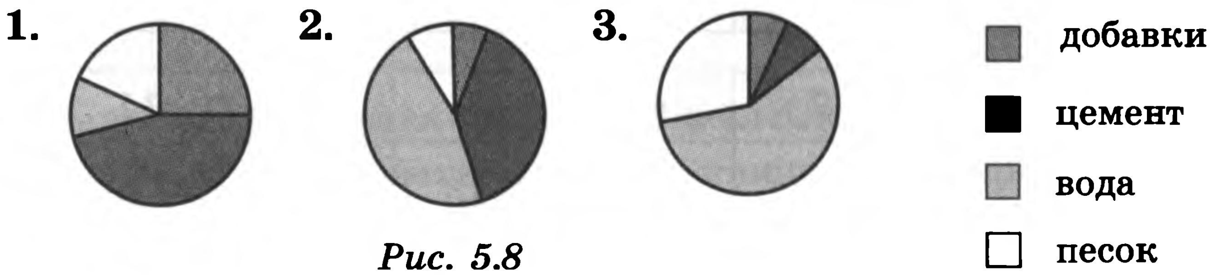


Рис. 5.8

ГЛАВА 6

АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ. ТРЕУГОЛЬНИКИ И ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Аксиомы планиметрии

Приведём аксиомы школьного курса планиметрии:

I_1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

I_2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

II_1. Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II_2. Прямая, принадлежащая плоскости, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.

III_1. Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

III_2. Каждый угол имеет определённую градусную меру, большую нуля. Развёрнутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

IV_1. На любой полупрямой от её начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

IV_2. От любой полупрямой на содержащей её плоскости в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

IV_3. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в данной плоскости в заданном расположении относительно данной полупрямой в этой плоскости.

V. На плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Треугольники

Виды треугольников

По сторонам треугольника можно определить его вид следующим образом:

Пусть a, b, c — стороны треугольника; c — наибольшая из сторон, тогда:

1) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник — остроугольный;
2) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник — прямоугольный,
3) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник — тупоугольный.

Равенство и подобие треугольников

Существуют следующие три признака равенства треугольников:

1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по одной стороне и двум прилежащим к ней углам;
3) по трём сторонам.

Существуют следующие три признака подобия треугольников:

1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по двум углам;
3) по трём сторонам.

Отметим следующие важные свойства подобных треугольников:

1) отношение соответствующих периметров, медиан, высот, биссектрис подобных треугольников равно коэффициенту подобия;
2) отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Медианы, высоты и биссектрисы треугольника

Свойства медиан:

1) Медианы пересекаются в одной точке (центр тяжести) и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины (рис. 6.1): $AO:OD = BO:OE = CO:OF = 2:1$.

2) Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
3) Медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.
4) Формула для вычисления медианы имеет следующий вид:
$m_a = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$, где m_a — медиана, проведённая к стороне a.

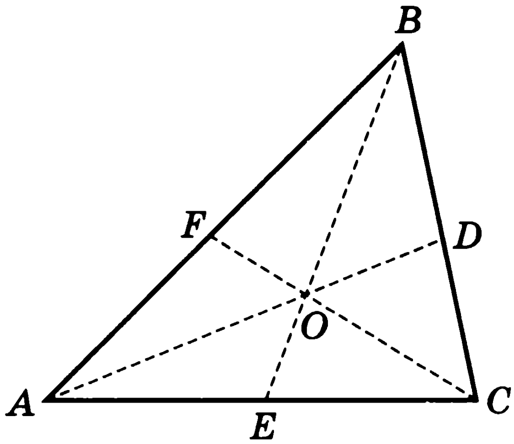


Рис. 6.1

Свойства высот:

1. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром треугольника.
2. Возможны следующие три случая расположения ортоцентра:
   — ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри треугольника (рис. 6.2);
   — ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла;
   — ортоцентр тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (рис. 6.3).

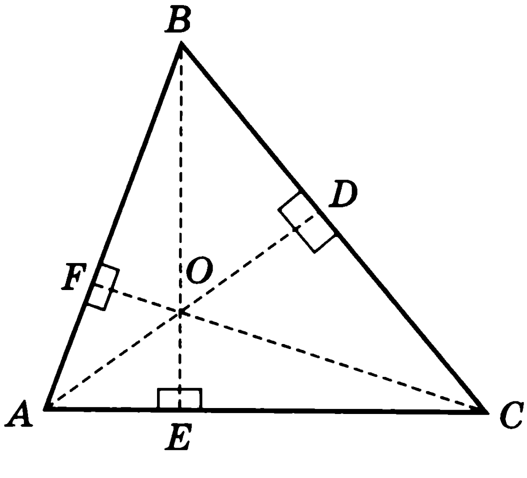


Рис. 6.2

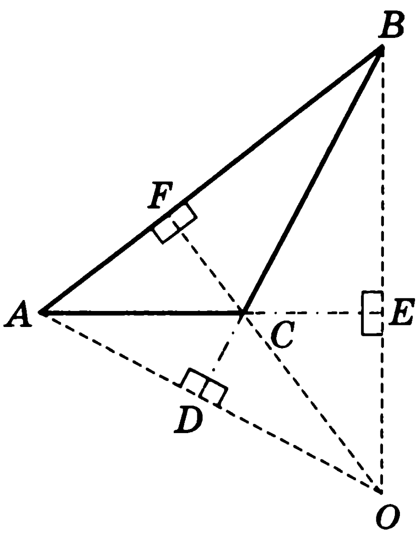


Рис. 6.3

3) Высоты h_a, h_b, h_c треугольника обратно пропорциональны его сторонам a, b, c: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Свойства биссектрис:

1) Биссектрисы пересекаются в одной точке — центре вписанной в треугольник окружности (рис. 6.4).
2) Каждая биссектриса делит противоположную сторону произвольного треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, например, для биссектрисы BE: $AE : CE = AB : BC$.
3) Биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника взаимно перпендикулярны.
4) Формула для вычисления длины биссектрисы имеет следующий вид: $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot DC}$, где l_a — биссектриса угла при вершине A.

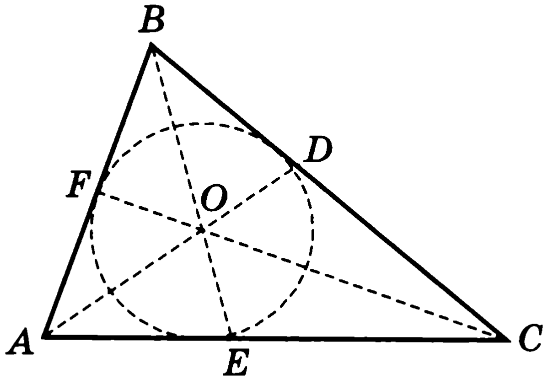


Рис. 6.4

Средняя линия треугольника и её свойства

1) средняя линия параллельна третьей стороне треугольника и равна её половине;
2) средняя линия отсекает треугольник, подобный исходному, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

Сумма внутренних углов треугольника

Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

Прямоугольный треугольник

1) **Теорема Пифагора:** *В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов*: $c^2 = a^2 + b^2$, где гипотенуза $AB = c$, катеты $AC = b$, $BC = a$.

2) **Теорема, обратная теореме Пифагора:** *Если в некотором треугольнике квадрат длины одной стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный.*

3) В прямоугольном треугольнике выполняются следующие соотношения между его сторонами и углами (рис. 6.5):
$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}$, $\cos\alpha=\frac{AC}{AB}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC}$.
Эти соотношения также принято называть «решениями прямоугольного треугольника».

3) Проекции c_1, c_2 соответственно катетов a, b на гипотенузу c обладают следующими свойствами (рис. 6.6):

$$h=\sqrt{c_1c_2},\quad a=\sqrt{cc_1},\quad b=\sqrt{cc_2},\quad h=\frac{ab}{c}=\frac{a+b}{a_c+b_c}.$$

4) Медиана, проведённая из вершины прямого угла на гипотенузу, равна половине гипотенузы: $CM=\frac{1}{2}AB$.
Верно также и обратное утверждение: если в некотором треугольнике длина одной из медиан равна половине той стороны, которую она делит пополам, то этот треугольник является прямоугольным (рис. 6.7).

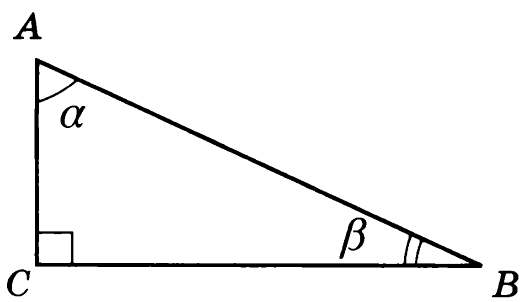


Рис. 6.5

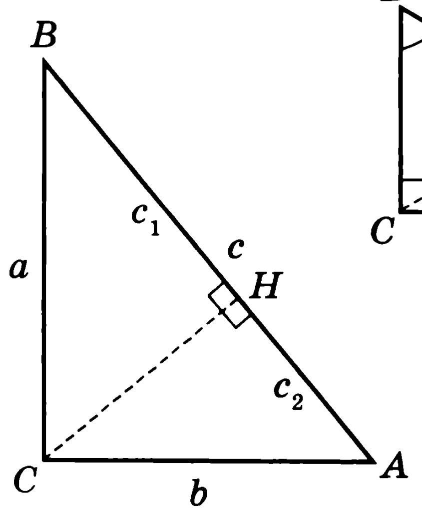


Рис. 6.6

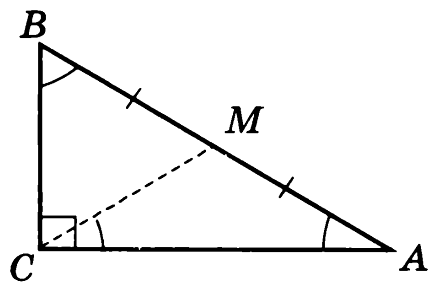


Рис. 6.7

Четырёхугольники

Параллелограмм и его свойства

1) противоположные стороны параллелограмма равны;
2) противоположные углы параллелограмма равны;
3) сумма углов, прилежащих к любой из сторон параллелограмма, равна 180°;
4) диагонали параллелограмма делятся точкой их пересечения пополам;
5) точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии;
6) сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов длин его сторон: $d^2{}_1 + d^2{}_2 = 2(a^2 + b^2)$ (рис. 6.8).

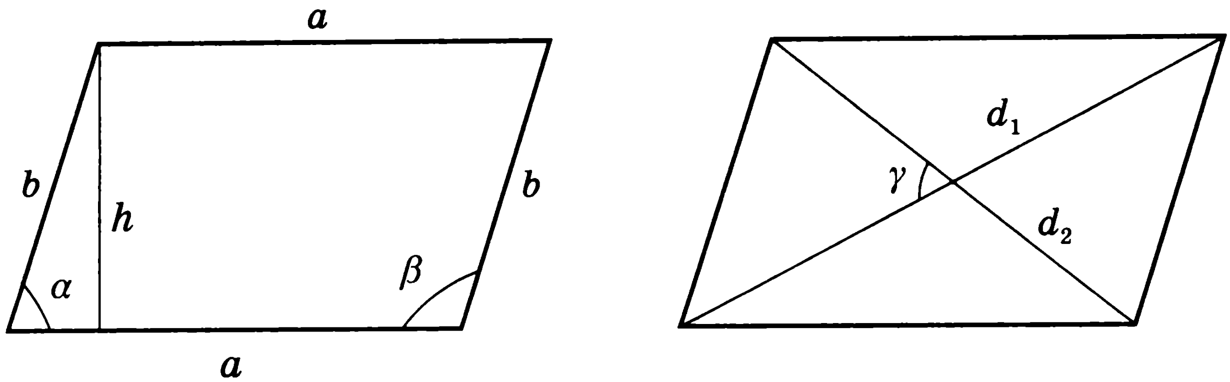


Рис. 6.8

Ромб и его свойства

1) все стороны ромба равны;
2) диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его внутренних углов;
3) прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 6.9).

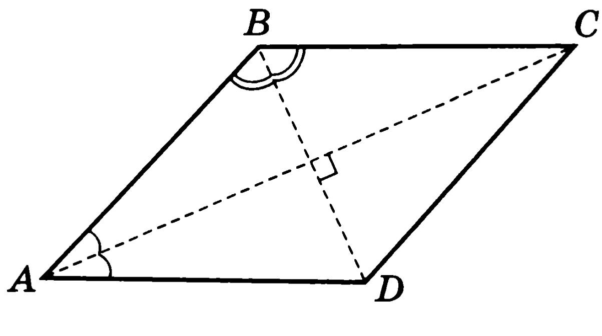


Рис. 6.9

Прямоугольник и его свойства

1) стороны прямоугольника являются его высотами;
2) диагонали прямоугольника равны;
3) диагонали прямоугольника точкой пересечения делятся пополам;
4) противоположные стороны прямоугольника равны;
5) углы, прилежащие к любой из сторон прямоугольника, — прямые;
6) квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин его сторон;
7) прямые, содержащие серединные перпендикуляры к сторонам прямоугольника, являются его осями симметрии (рис. 6.10).

Квадрат и его свойства

1) стороны квадрата равны и попарно взаимно перпендикулярны;
2) диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны;
3) диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам;
4) прямые, содержащие диагонали квадрата, являются биссектрисами его внутренних углов;
5) прямые, содержащие диагонали квадрата, и прямые, содержащие серединные перпендикуляры к сторонам квадрата, являются его осями симметрии;
6) точка пересечения диагоналей квадрата является его центром симметрии (рис. 6.11).

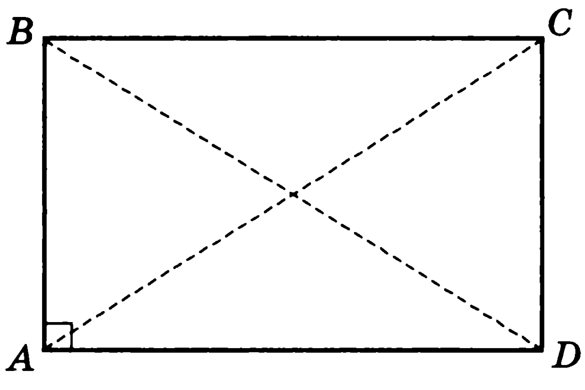


Рис. 6.10

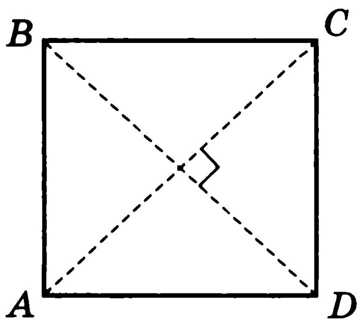


Рис. 6.11

Трапеция и её свойства

Остановимся на основных элементах трапеции (рис. 6.12). Параллельные стороны AD и BC называются *основаниями* трапеции, а две другие AB и CD — *боковыми сторонами*. Расстояние между основаниями трапеции называется *высотой трапеции*. Отрезок MK, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией* трапеции.

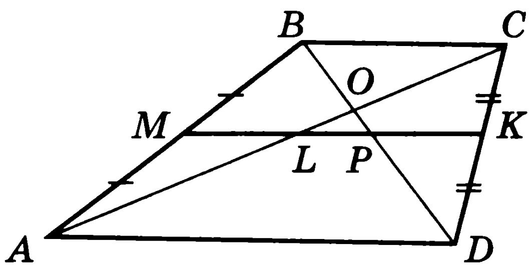


Рис. 6.12

Существуют следующие частные случаи трапеции:

1) **Равнобочной** (равнобедренной) трапецией называется трапеция с равными боковыми сторонами ($AB = CD$). В этом случае углы при каждом основании трапеции соответственно равны ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$) (рис. 6.13).

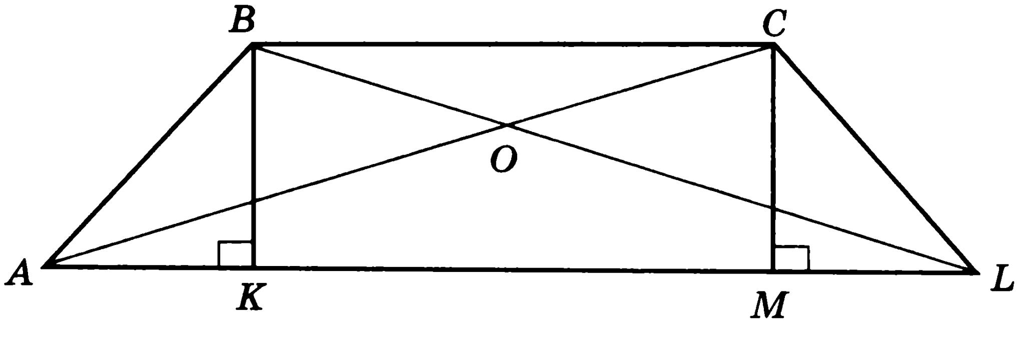


Рис. 6.13

2) **Прямоугольной** трапецией называется трапеция, один из углов которой — прямой.

Средняя линия трапеции и её свойства

1) средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции;
2) длина средней линии трапеции равна полусумме длин оснований трапеции: $MK = \dfrac{AD + BC}{2}$ (рис. 6.12);
3) средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок, заключённый между основаниями трапеции.

Многоугольники. Правильные многоугольники

Основные теоретические сведения

Для решения задач нам понадобятся основные сведения о **простых многоугольниках**, т. е. многоугольниках, для которых ломаная, являющаяся их границей, не имеет самопересечений. Для наглядности понятия «простой многоугольник» мы предлагаем на рисунках изображения простого многоугольника (рис. 6.14) и многоугольника, не являющегося простым (рис. 6.15).

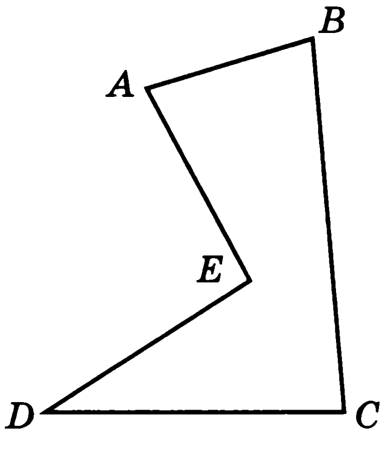


Рис. 6.14

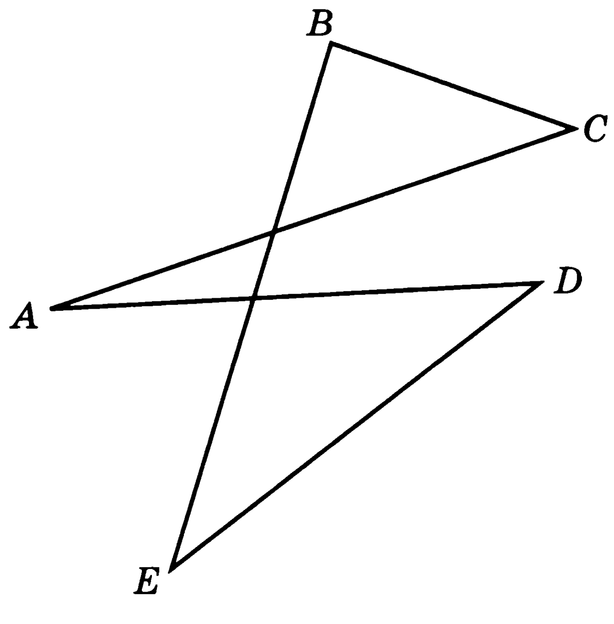


Рис. 6.15

Выпуклый многоугольник и его свойства

Среди всевозможных простых многоугольников выделяют **выпуклые** многоугольники. На рис. 6.16 многоугольник $ABCDEF$ является выпуклым, в то время как многоугольник $ABCDE$, расположенный на рис. 6.14, — простой, не являющийся выпуклым.

Отметим следующие свойства выпуклых многоугольников:

1) сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$;
2) сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна $360°$;
3) число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$;
4) диагонали, выходящие из одной вершины, разбивают выпуклый n-угольник на n-2 треугольника.

Правильный многоугольник и его свойства

Выпуклый многоугольник, у которого все стороны и углы равны, называется **правильным**.

К основным свойствам правильного многоугольника отнесём следующие:

1) каждый угол правильного многоугольника равен $\frac{180°(n-3)}{2}$, где n — число его углов;
2) центр правильного многоугольника равноудалён от его вершин;
3) центр правильного многоугольника равноудалён от его сторон;
4) в правильный многоугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность;
5) центры вписанной и описанной окружностей совпадают с центром правильного многоугольника (рис. 6.17).

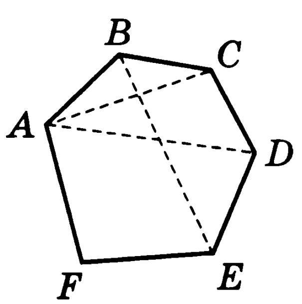


Рис. 6.16

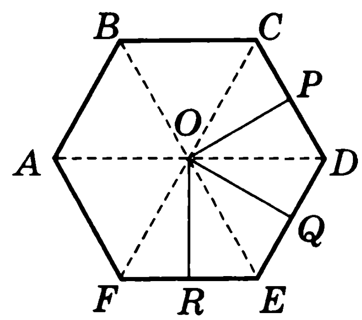


Рис. 6.17

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

6.1 Угол A в трапеции в 5 раз меньше угла B (рис. 6.18). Найдите градусные меры углов A и B.

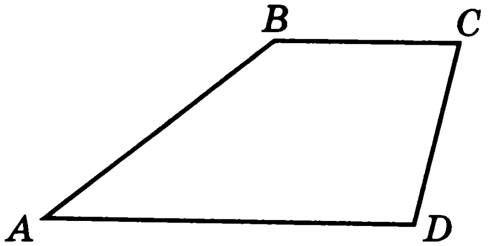


Рис. 6.18

Решение. Сумма углов A и B в трапеции, прилегающих к её боковой стороне, равна 180°. Обозначим градусную меру угла A через x. Тогда получим следующее уравнение: $x+5x=180$, $6x=180$, $x=30$. Таким образом, градусная мера угла A равна 30°, а градусная мера угла B равна 150°.

Ответ: 30°, 150°.

6.2 В треугольнике ABC (рис. 6.19) угол B в два раза больше угла A. Известны длины двух сторон треугольника: $AC=6$, $BC=4$. Найдите длину медианы, проведённой к третьей стороне треугольника.

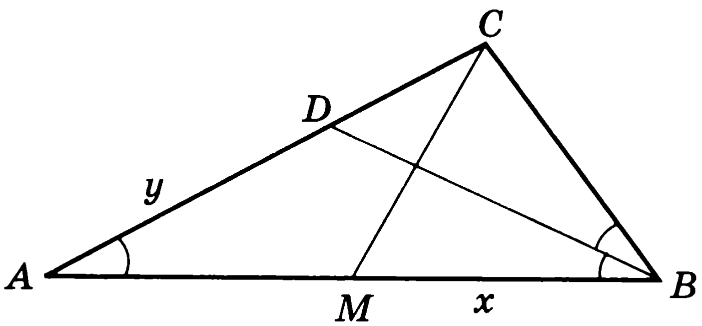


Рис. 6.19

Решение.

1) Для нахождения медианы CM, проведённой к третьей стороне треугольника, воспользуемся формулой

$$CM=\frac{\sqrt{2AC^2+2BC^2-AB^2}}{2}.$$

Чтобы применить эту формулу, надо найти длину третьей стороны AB треугольника ΔABC.

2) Так как по условию задачи угол B в два раза больше угла A, то проведём биссектрису BD угла B.

3) Для нахождения длины AB рассмотрим подобные треугольники ΔCBD и ΔCAB. Обозначим длину стороны AB через x, длину отрезка AD через y. Получим:

$$\frac{CB}{AC}=\frac{CD}{CB},\ \frac{4}{6}=\frac{6-y}{4},\ y=\frac{10}{3}.$$

4) По теореме о биссектрисе BD угла B в треугольнике ABC:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC},\ \frac{x}{4}=\frac{y}{6-y},\ \frac{x}{4}=\frac{\frac{10}{3}}{6-\frac{10}{3}},\ x=5.$$

Таким образом, третья сторона $AB=5$.

5) Найдём медиану CM:

$$CM=\frac{\sqrt{2AC^2+2BC^2-AB^2}}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot 6^2+2\cdot 4^2-5^2}}{2}=\frac{\sqrt{72+32-25}}{2}=\frac{\sqrt{79}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{2}$.

6.3 Диагонали трапеции равны и взаимно перпендикулярны. Длина высоты трапеции равна 17. Найдите длину средней линии трапеции.

Решение.

1) Для нахождения средней линии LN, $LN=LO+OT+TN$, трапеции найдём длины составляющих её отрезков LO, OT, TN (рис. 6.20).

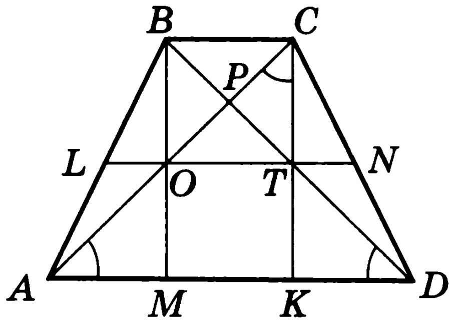


Рис. 6.20

2) Рассмотрим высоты трапеции BM и CK. Треугольники ΔACK и ΔDBM равны как прямоугольные по гипотенузе и катету. Следовательно, соответственные элементы этих треугольников равны: $\angle CAK = \angle BDM$.

3) Рассмотрим треугольник ΔAPD. По условию задачи этот треугольник — прямоугольный, следовательно:
$\angle CAK = \angle BDM = 45°$.

4) Углы ACK и BDA равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно:
$\angle CAK = \angle BDM = \angle ACK = 45°$.
Значит, треугольник ΔACK — равнобедренный: $AK = CK$.

5) Треугольники ΔACD и ΔDBA равны по двум сторонам и углу между ними: $BD = AC$ по условию, AD — общая, $\angle CAK = \angle BDM = 45°$ по доказанному в п. 2. Следовательно, $CD = AB$ и трапеция — равнобедренная.

6) Поскольку трапеция — равнобедренная, то отрезки LO и TN равны, причём $2LO = 2TN = AM$. Следовательно, средняя линия $LN = OT + AM = AK$. Но в п. 4 доказано, что $AK = CK$, значит, $AK = 17$.

7) Средняя линия равнобедренной трапеции $LN = AK = 17$.

Ответ: 17.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

6.4 Угол A в трапеции в 3 раза меньше угла B (рис. 6.21). Найдите градусные меры углов A и B.

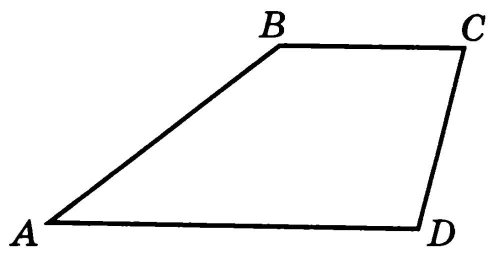


Рис. 6.21

Ответ: 45°; 135°.

6.5 В прямоугольном треугольнике катеты равны 21 и 28. Найдите длины отрезков, на которые гипотенуза разбивается биссектрисой прямого угла.

Ответ: 15; 20.

6.6 В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла C. Известны длины двух сторон треугольника: $AB = 8$, $BC = 12$. Найдите длину третьей стороны треугольника.

Ответ: 10.

6.7 Длины оснований трапеции равны a и b. Найдите длину средней линии трапеции.

Ответ: $\frac{a-b}{2}$.

6.8 Докажите, что в трапеции биссектрисы углов, прилегающих к боковой стороне, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии.

Указание: воспользуйтесь тем, что сумма углов, прилегающих к боковой стороне, равна 180° и свойствами равнобедренного треугольника.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

6.9 Угол B в трапеции в 9 раз больше угла A (рис. 6.22). Найдите градусные меры углов A и B.

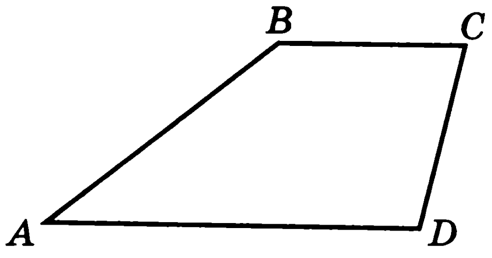


Рис. 6.22

6.10 В треугольнике угол B в два раза больше угла A. Известны длины двух сторон треугольника: $AC = 6$, $BC = 4$. Найдите периметр треугольника.

6.11 Найдите периметр квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и имеющего с треугольником общий прямой угол.

6.12 В треугольнике ABC известны длины двух сторон: $BC = 12$, $AC = 15$. На стороне AB взята точка D так, что $BD = 8$, на стороне BC взята точка E так, что величины углов BDE и BCA равны. Найдите длину отрезка DE.

6.13 Точки $ABCK$ — середины сторон произвольного четырёхугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCK$ — параллелограмм.

ГЛАВА 7

ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Окружность и прямая

Возможны следующие случаи взаимного расположения окружности и прямой:

1) Окружность и прямая не имеют общих точек. В этом случае расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности.
2) Окружность и прямая имеют две общие точки. В этом случае расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности. Прямая при таком расположении называется **секущей.**
3) Окружность и прямая имеют одну общую точку (правильнее будет сказать — две совпавшие общие точки). В этом случае расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности. Прямая при таком расположении называется **касательной** к окружности.

Окружность и точка

Возможны следующие случаи взаимного расположения окружности и точки на плоскости:

1) Точка может лежать вне окружности (внешняя точка). В этом случае расстояние от центра окружности до рассматриваемой точки больше радиуса окружности. При таком расположении к окружности можно провести две касательные, проходящие через рассматриваемую точку.
2) Точка может лежать внутри окружности (внутренняя точка), т. е. принадлежать кругу, границей которого является окружность. В этом случае расстояние от центра окружности до рассматриваемой точки меньше радиуса окружности. При таком расположении к окружности нельзя провести ни одной касательной, проходящей через рассматриваемую точку.
3) Точка может лежать на окружности. В этом случае расстояние от центра окружности до рассматриваемой точки равно радиусу

окружности. При таком расположении к окружности можно провести одну касательную, проходящую через рассматриваемую точку.

Метрические соотношения в окружности. Свойства касательных к окружности

1) Произведение длин отрезков секущих, проведённых из общей точки, равны: $OA \cdot OB = OD \cdot OC$ (рис. 7.1).
2) Квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей, проведённой из той же точки: $OA^2 = OD \cdot OB$ (рис. 7.2).

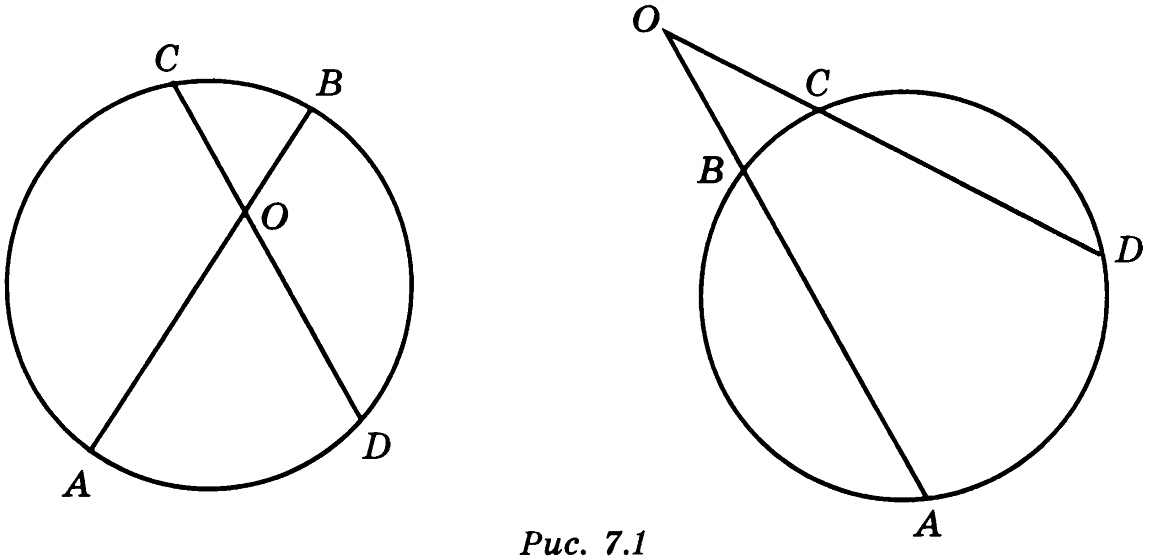


Рис. 7.1

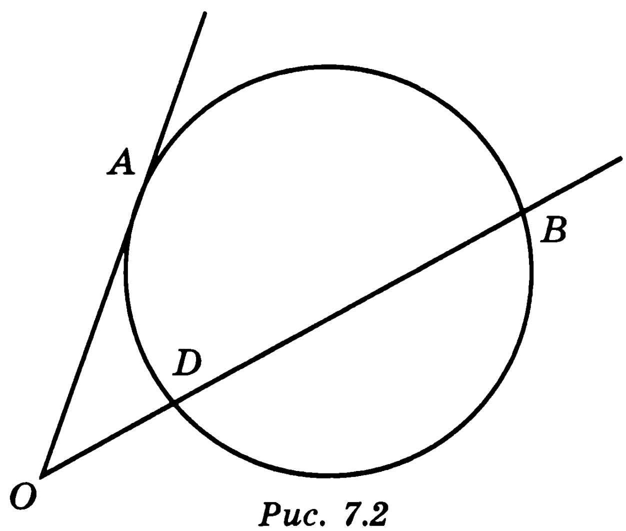


Рис. 7.2

3) Отрезки касательных, проведённых из общей точки, равны: $AB = AC$ (рис. 7.3).
4) Центр окружности, вписанной в угол MAN, принадлежит биссектрисе этого угла (рис. 7.4).

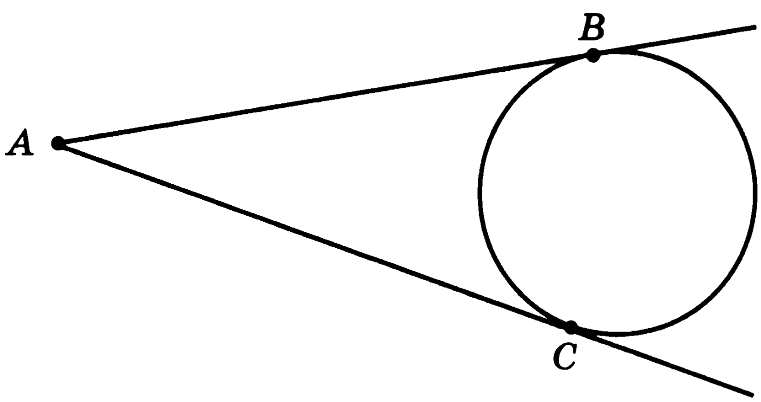


Рис. 7.3

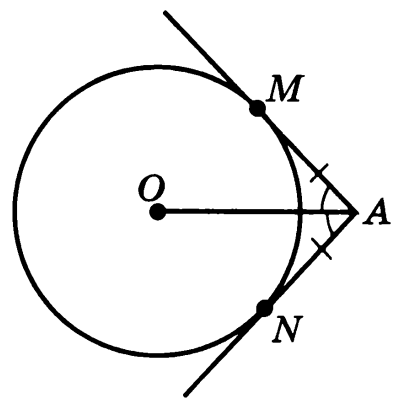


Рис. 7.4

Углы, связанные с окружностью

1) **Центральный** угол AOB (вершина угла совпадает с центром окружности) измеряется дугой m, на которую он опирается (рис. 7.5).
2) **Вписанный** угол BAC (вершина угла принадлежит окружности) измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 7.6).

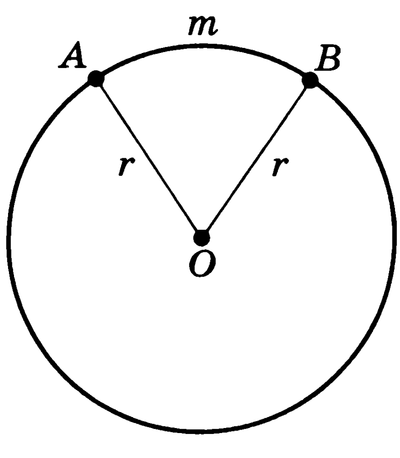


Рис. 7.5

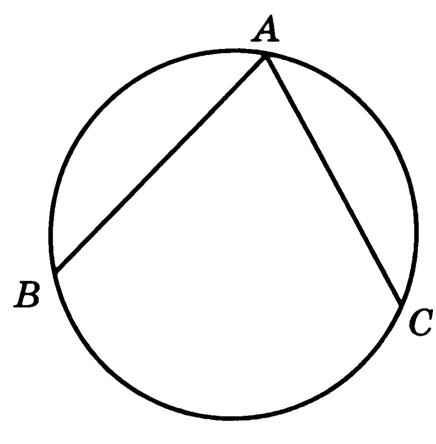


Рис. 7.6

3) Если вписанный угол $\angle ABC$ и центральный угол $\angle AOC$ опираются на одну и ту же дугу окружности, то: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ (рис. 7.7).

4) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 7.7).

5) Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, — прямые (рис. 7.7): $\angle APB = \angle AQB = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$.

6) Угол между касательной CB и хордой CD измеряется половиной дуги m, заключённой между касательной и хордой (рис. 7.8).

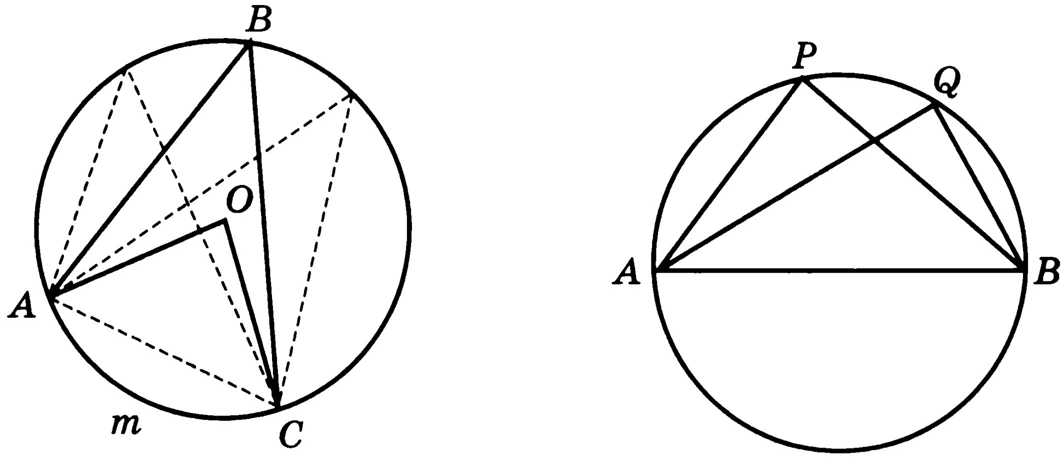


Рис. 7.7

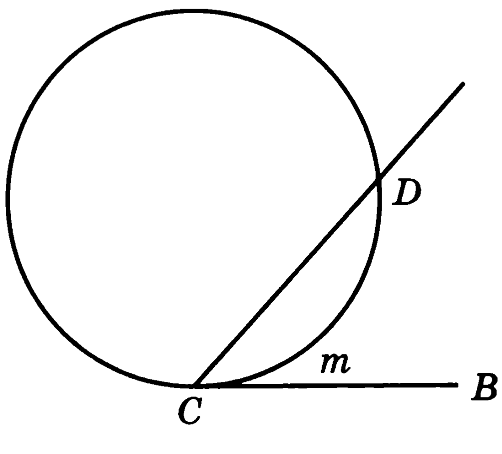


Рис. 7.8

7) Угол $\angle BOC$ между касательной и секущей измеряется полуразностью дуг, заключённых между сторонами угла: $\angle BOC = \frac{m-n}{2}$ (рис. 7.9).

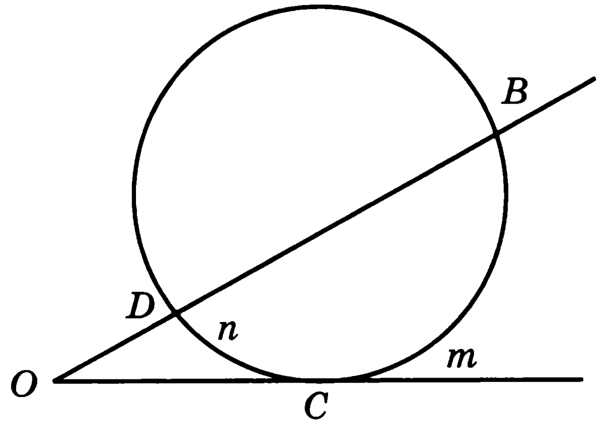


Рис. 7.9

8) Угол $\angle AOD$ между секущими, пересекающимися внутри окружности, вычисляется по формуле: $\frac{m+n}{2}$ (рис. 7.10).

9) Угол $\angle AOD$ между секущими, пересекающимися вне окружности, вычисляется по формуле: $\frac{n-m}{2}$ (рис. 7.10).

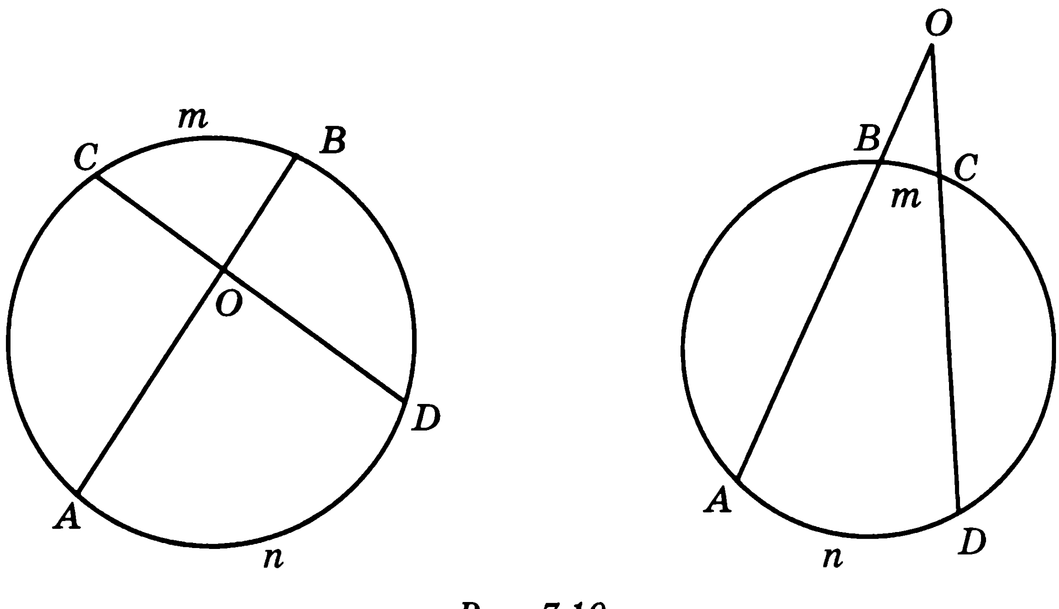


Рис. 7.10

Окружность и треугольник

1) Около любого треугольника можно описать окружность. Центром описанной около треугольника окружности является **точка пересечения серединных перпендикуляров** к сторонам треугольника (рис. 7.11).

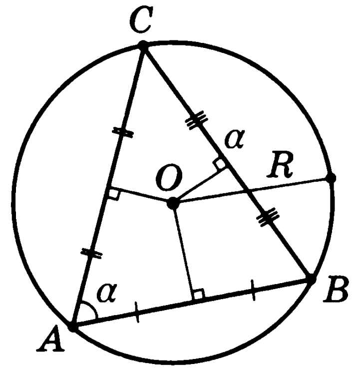


Рис. 7.11

Радиус R описанной около треугольника окружности может быть вычислен по формулам: $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$; $R = \dfrac{abc}{4S}$; где a, b, c — стороны треугольника, α — угол, лежащий против стороны a, S — площадь треугольника.

Возможны следующие расположения центра описанной окружности:

— в случае остроугольного треугольника центр описанной окружности лежит внутри треугольника;

— в случае прямоугольного треугольника центром описанной окружности является середина гипотенузы;

— в случае тупоугольного треугольника центр описанной окружности лежит вне треугольника.

2) В любой треугольник можно вписать окружность. Центром вписанной в треугольник окружности является **точка пересечения его биссектрис** (рис. 7.12).

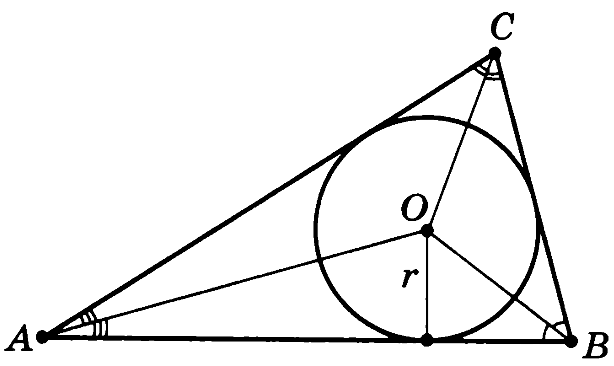


Рис. 7.12

Радиус r вписанной в треугольник окружности может быть вычислен по формуле: $r = \frac{S}{p}$, где S — площадь треугольника, а p — полупериметр.

Существуют следующие частные случаи:

— центры вписанной и описанной окружностей совпадают для правильного треугольника;

— радиус r вписанной в прямоугольный треугольник окружности может быть вычислен по формуле:

$r = \frac{a+b-c}{2}$, где a, b, c — стороны треугольника.

Окружность и четырёхугольник

Справедливы следующие критерии взаимного расположения окружности и выпуклого четырёхугольника:

1. Около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его внутренних противоположных углов равна 180°: $\beta + \varphi = \alpha + \gamma = 180°$ (рис. 7.13).
2. В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда равны суммы длин его противоположных сторон: $a + c = b + d$, где a, b, c, d — длины сторон четырёхугольника (рис. 7.14).

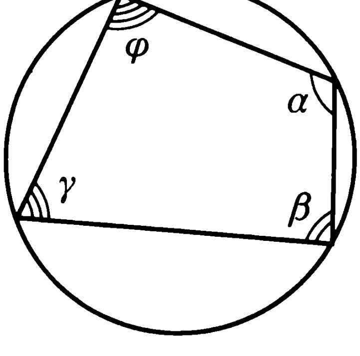


Рис. 7.13

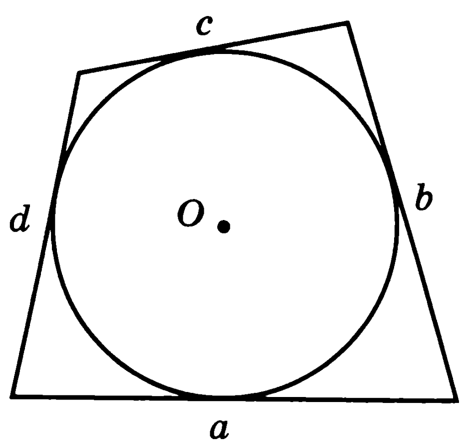


Рис. 7.14

Соотношения между стороной правильного многоугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей

Рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2A_3A_4...A_n$. Центр O правильного n-угольника является как точкой пересечения биссектрис его углов, так и точкой пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам (рис. 7.15).

Радиус R описанной около правильного многоугольника окружности: $R = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = ... = OA_n$.

Радиус r вписанной в правильный многоугольник окружности: $r = OM = OK = OP...$

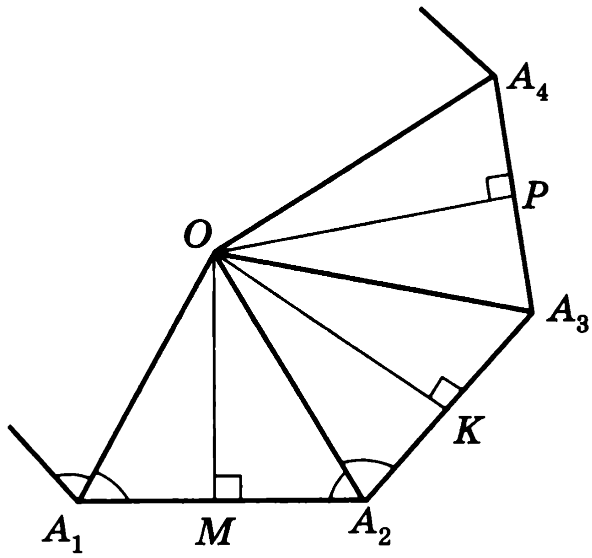


Рис. 7.15

Пусть число сторон правильного n-угольника равно n, тогда:

1) угол, под которым каждая сторона n-угольника видна из его центра, вычисляется по формуле: $\angle A_1OA_2 = \frac{360°}{n}$;
2) радиус описанной около правильного n-угольника окружности вычисляется по формуле: $R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$;
3) радиус вписанной в правильный n-угольник окружности вычисляется по формуле: $r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$.

Результаты вычислений R и r для частных случаев: $n = 3, 4, 6$ представим в следующей таблице, где через a_3, a_4, a_6 обозначены соответственно стороны правильного треугольника, квадрата, шестиугольника:

n	3	4	6
R	$\frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	a_6
r	$\frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a_4}{2}$	$\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$\frac{r}{R}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

7.1 Из внешней точки к окружности проведены: секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найдите длину внутреннего отрезка секущей.

Решение. По свойствам секущей и касательной, проведённых к окружности из внешней точки, имеем: $OA^2 = OB \cdot OD$ (рис. 7.16).

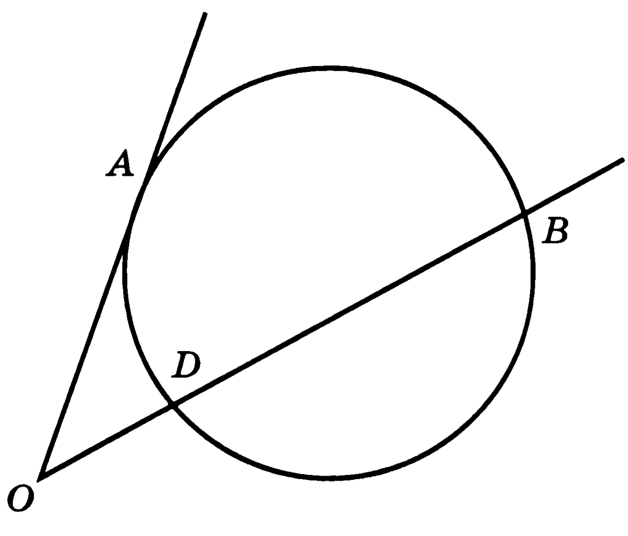


Рис. 7.16

Обозначим длину внутреннего отрезка секущей DB через x.

Получим: $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 12 \cdot (12 - x)$.

Решив данное квадратное уравнение, получаем: $x = 9$ см.

Ответ: 9.

7.2 Около окружности описан треугольник с длинами сторон 6, 10, 12. Прямая, пересекающая две большие стороны треугольника, касается окружности. Найдите периметр треугольника, отсечённого отрезком касательной.

Решение. 1) Обозначим точки пересечения касательной с большими сторонами треугольника через L и M. Отрезки касательных к окружности, проведённых из общей точки A — AN и AK, равны (рис. 7.17). Обозначим их длины через x. Периметр P отсечённого треугольника состоит из длин следующих отрезков:

$P = AL + LM + MA = AL + MT + TL + MA$.

По свойству касательных, проведённых к окружности из одной общей точки, имеем:

$LT = LN$, $MT = MK$, поэтому $LM = LN + MK$,

следовательно, искомый периметр:

$P = AL + MK + LN + MA = AL + LN + AM + MK = AN + AK = 2x$.

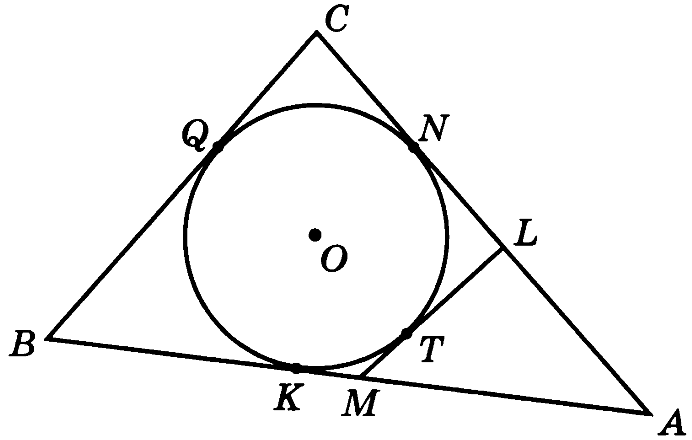


Рис. 7.17

2) $BC = BQ + QC$. По свойству касательных, проведённых к окружности из одной общей точки, имеем:
$BQ = BK$, $CQ = CN$, тогда $BC = CN + BK$.
Так как $CN = CA - AN = 10 - x$, $BK = BA - AK = 12 - x$,
то $BC = 10 - x + 12 - x$.
Таким образом, получаем уравнение: $6 = 10 - x + 12 - x$, откуда следует, что $2x = 16$.
3) Итак, искомый периметр $P = 2x = 16$.

Ответ: 16.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

7.3 Вершина A треугольника принадлежит окружности, его сторона BC касается этой окружности в точке B, а сторона $AC = 6$ пересекает окружность в точке P так, что $PC + CB = AP$. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки C.

Ответ: 3.

7.4 В полуокружность вписан четырёхугольник $ABCD$ с известными длинами трёх сторон: $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = 6$. Найдите периметр четырёхугольника.

Ответ: $16 + 4\sqrt{5}$.

7.5 Укажите номер верного утверждения:

1. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.
2. Диаметр окружности, проходящий через середину любой хорды, перпендикулярен этой хорде.
3. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

4. В любой четырёхугольник можно вписать окружность.

Ответ: 1.

7.6 Докажите, что центр окружности, вписанной в острый угол, принадлежит биссектрисе этого угла.

7.7 Найдите градусную меру угла DCB, если величина дуги $m = 90°$ (рис. 7.18).

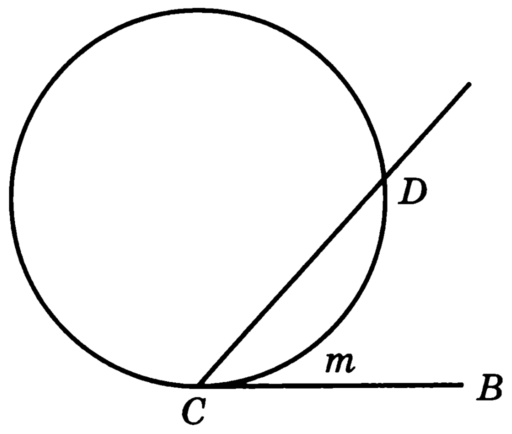


Рис. 7.18

Ответ: 45°.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

7.8 Укажите номер верного утверждения:

1. Сумма углов остроугольного треугольника меньше 180°.

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

3. Диагонали любого прямоугольника взаимно перпендикулярны.

4. Около любого четырёхугольника можно описать окружность.

7.9 Докажите, что для правильного треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

7.10 Найдите градусную меру угла BOC, если величина дуги $m = 90°$, а величина дуги $n = 26°$ (рис. 7.19).

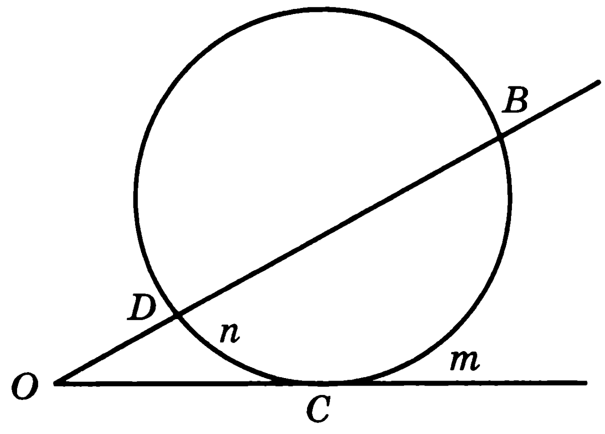


Рис. 7.19

7.11 Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 8 и 15.

7.12 Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции, основания которой равны 9 и 21, а высота — 8.

ГЛАВА 8

ТРИГОНОМЕТРИЯ В ПЛАНИМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Отметим основные направления применения тригонометрии в решении задач на плоскости.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника (решения прямоугольного треугольника)

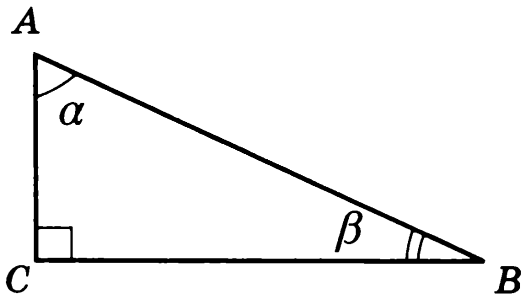


Рис. 8.1

$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC}$.

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной около треугольника окружности (рис. 8.2, 8.3).

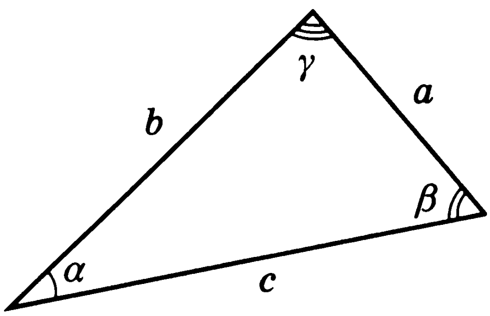


Рис. 8.2

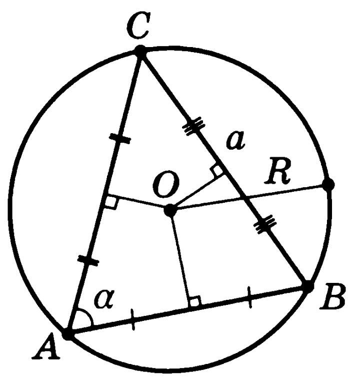


Рис. 8.3

Теорема косинусов:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$

Формулы площадей

Во многих формулах площадей присутствуют тригонометрические функции. Формулы для вычислений площадей плоских фигур нами приведены в следующем разделе. Некоторые из формул нам пришлось напомнить вам в предыдущих разделах.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

8.1 Длина средней линии равнобедренной трапеции равна 3. Найдите длину диагонали данной трапеции, образующей с основанием трапеции угол, тангенс которого равен $2\sqrt{2}$.

Решение.

1) Средняя линия равнобедренной трапеции
$LN = LO + OT + TN = OT + AM = AK$, таким образом, $AK = LN = 3$ (рис. 8.4).

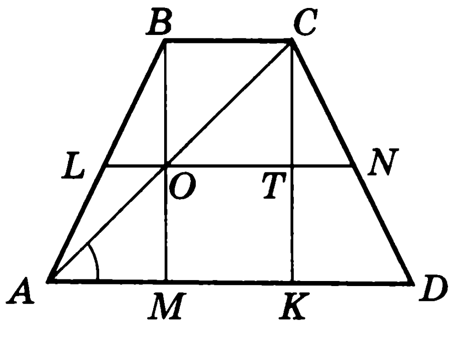


Рис. 8.4

2) Рассмотрим ΔACK:

$$AK = AC \cdot \cos\angle CAK,\ AC = \frac{AK}{\cos\angle CAK} = \frac{3}{\cos\angle CAK}.$$

3) $1+\mathrm{tg}^2\angle CAK=\dfrac{1}{\cos^2\angle CAK}$, $1+8=\dfrac{1}{\cos^2\angle CAK}$, $\cos^2\angle CAK=\dfrac{1}{9}$, $\cos\angle CAK=\dfrac{1}{3}$.

(По смыслу условия задачи угол CAK — угол между диагональю и основанием равнобедренной трапеции — острый.)

4) $AC=\dfrac{AK}{\cos\angle CAK}=\dfrac{3}{\frac{1}{3}}=9$.

Ответ: 9.

8.2 Около четырёхугольника со сторонами a, b, c, d описана окружность. Найдите угол, заключённый между сторонами a и b.

Решение.

1) Обозначим искомый угол через x.

Применим теорему косинусов дважды: для треугольника со сторонами a, b, n (рис. 8.5) имеем: $n^2=a^2+b^2-2ab\cos x$; для треугольника со сторонами c, d, n имеем:

$n^2=c^2+d^2-2cd\,\cos(180°-x)=c^2+d^2+2cd\cos x$.

Здесь учтено, что около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

2) Приравняем правые части обоих равенств:

$n^2=a^2+b^2-2ab\cos x=$
$=c^2+d^2+2cd\cos x$, выразим из последнего равенства $\cos x$:

$\cos x=\dfrac{a^2+b^2-c^2+d^2}{2(ab+cd)}$.

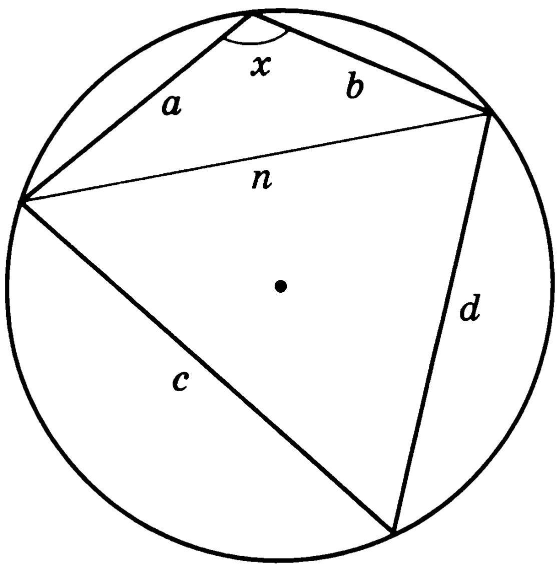


Рис. 8.5

Ответ: $\cos x=\dfrac{a^2+b^2-c^2+d^2}{2(ab+cd)}$.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

8.3 Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, если её диагональ равна 9 и образует с основанием угол, тангенс которого равен $2\sqrt{2}$.

Ответ: 3.

8.4 По данным на рис. 8.6 найдите тангенсы острых углов прямоугольного треугольника.

Ответ: $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$.

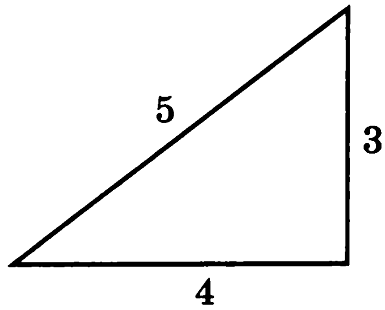


Рис. 8.6

8.5 Найдите сторону BC треугольника ABC, если известно, что $AC=\sqrt{2}$, $\angle A=45°$, $\angle B=30°$.

Ответ: 2.

8.6 Найдите длину биссектрисы, проведённой к боковой стороне равнобедренного треугольника с основанием 6 см, углом при вершине 120°.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{2}}$.

8.7 Найдите тангенсы углов, образуемых большей диагональю параллелограмма с его сторонами, если стороны параллелограмма равны 6 и 8, а острый угол параллелограмма равен 30°.

Ответ: $\frac{2}{3+2\sqrt{3}}$; $\frac{3}{8+3\sqrt{3}}$.

8.8 Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 4, угол при большем основании равен 15°. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

Ответ: $\sqrt{65+28\sqrt{3}}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

8.9 По данным на рис. 8.6 найдите синусы острых углов прямоугольного треугольника.

8.10 По данным на рис. 8.6 найдите косинусы острых углов прямоугольного треугольника.

8.11 Найдите сторону BC треугольника ABC, если известно, что $AC=\sqrt{6}$, $\angle A=45°$, $\angle B=60°$.

8.12 Найдите длину биссектрисы, проведённой к боковой стороне равнобедренного треугольника с основанием 12 см, углом при вершине 36°.

8.13 Длины двух сторон треугольника равны 5 и 7, а угол между ними равен 120°. Найдите длину биссектрисы, проведённой к третьей стороне треугольника.

ГЛАВА 9

ПЛОЩАДИ ФИГУР

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Площадь треугольника

1. Произвольный треугольник. Пусть a, b, c — длины сторон произвольного треугольника (рис. 9.1);

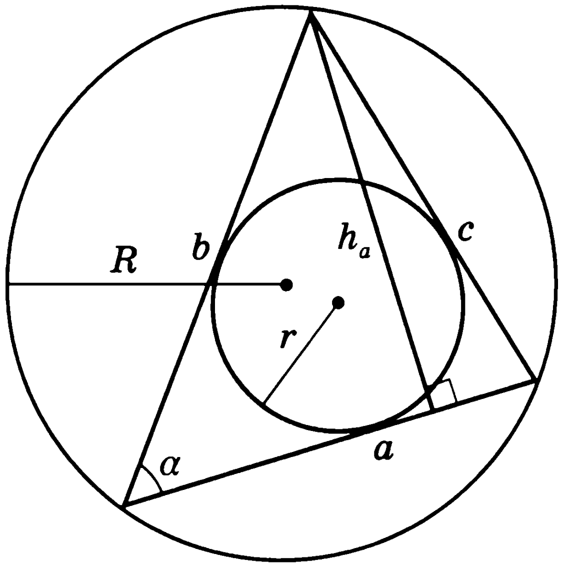


Рис. 9.1

α — угол между сторонами a и b;

p — полупериметр треугольника;

R — радиус описанной около треугольника окружности;

r — радиус вписанной в треугольник окружности;

S — площадь треугольника;

h_a — длина высоты, проведённой к стороне a.

Тогда площадь произвольного треугольника может быть вычислена при помощи одной из следующих формул:

$S=\frac{1}{2}ah_a$;

$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$;

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$S=pr$;

$S=\frac{abc}{4R}$.

2. Прямоугольный треугольник. Пусть a, b — длины катетов; c — длина гипотенузы; h_c — длина высоты, проведённой к гипотенузе c. Тогда площадь прямоугольного треугольника (рис. 9.2) может быть вычислена при помощи одной из следующих формул:

$S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}ch_c$.

3. Равносторонний треугольник со стороной длины a (рис. 9.3):

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

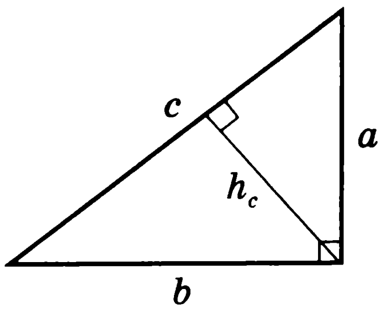


Рис. 9.2

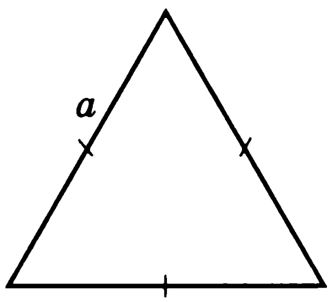


Рис. 9.3

Площадь параллелограмма

Пусть a, b — длины сторон параллелограмма; α — угол между сторонами параллелограмма; d_1, d_2 — длины диагоналей параллелограмма; φ — указанный на рисунке угол между диагоналями. Тогда площадь параллелограмма (рис. 9.4) может быть вычислена при помощи одной из следующих формул:

$S = ah_a$;

$S = ab\sin\alpha$;

$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$.

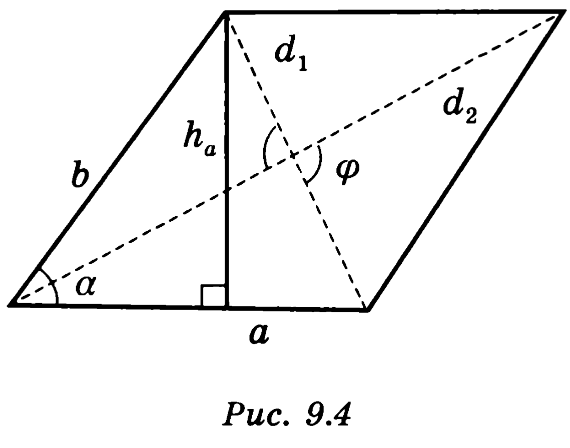


Рис. 9.4

Площадь ромба

Пусть a — длина стороны ромба; h_a — длина высоты ромба; α — угол между сторонами ромба; d_1, d_2 — длины диагоналей ромба. Тогда площадь ромба (рис. 9.5) может быть вычислена при помощи одной из следующих формул:

$S = ah_a$;

$S = a^2 \sin\alpha$;

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

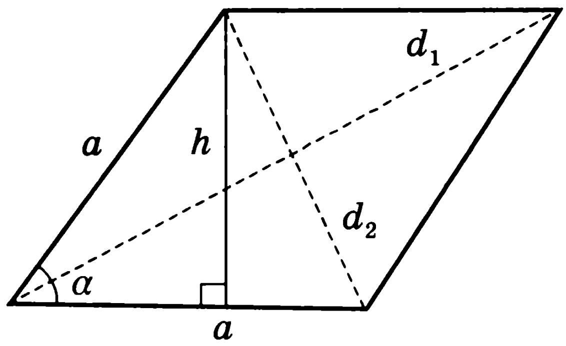


Рис. 9.5

Площадь прямоугольника

Пусть a, b — длины сторон прямоугольника; d — длина диагонали прямоугольника; φ — указанный на рисунке угол между диагоналями.

Тогда площадь прямоугольника (рис. 9.6) может быть вычислена при помощи одной из следующих формул:

$S = ab$;

$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$.

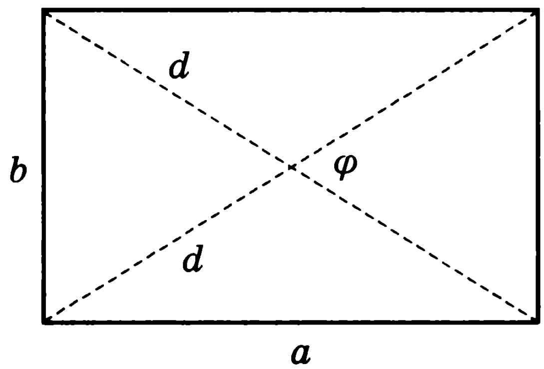


Рис. 9.6

Площадь квадрата

Пусть a — длина стороны квадрата; d — длина диагонали квадрата. Тогда площадь квадрата (рис. 9.7) может быть вычислена при помощи одной из следующих формул: $S = a^2$; $S = \frac{1}{2} d^2$.

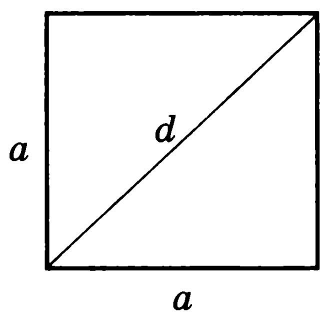


Рис. 9.7

Площадь трапеции

Пусть a и b — длины оснований трапеции; h — длина высоты трапеции; l — длина средней линии трапеции. Тогда площадь трапеции (рис. 9.8) может быть вычислена при помощи одной из следующих формул:

$$l=\frac{a+b}{2};$$

$$S=lh.$$

Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника

Пусть d_1, d_2 — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника; φ — указанный на рисунке угол между ними. Тогда площадь выпуклого четырёхугольника (рис. 9.9) может быть вычислена по формуле:

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

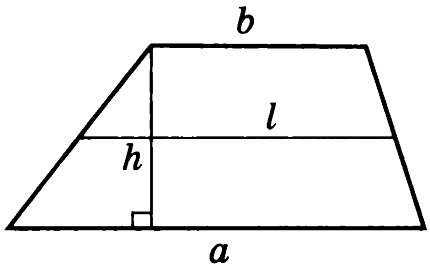


Рис. 9.8

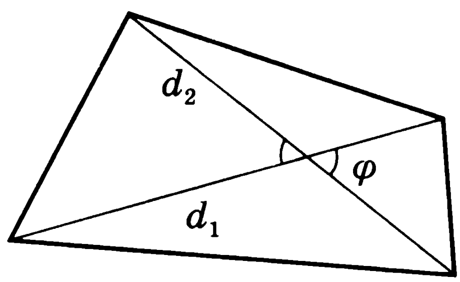


Рис. 9.9

Площадь многоугольника, описанного около окружности

Пусть p — полупериметр многоугольника, r — радиус вписанной в него окружности. Тогда площадь многоугольника, описанного около окружности, может быть вычислена по формуле: $S=pr$.

Площадь круга и его частей

1. Площадь круга:

$S=\pi R^2$, где R — радиус круга.

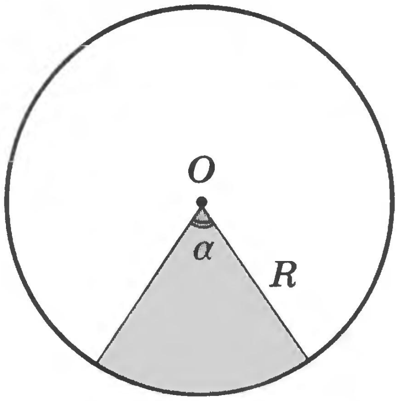


Рис. 9.10

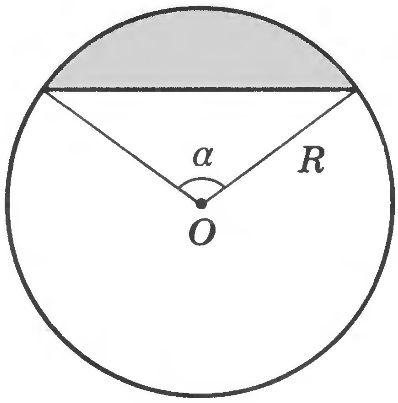


Рис. 9.11

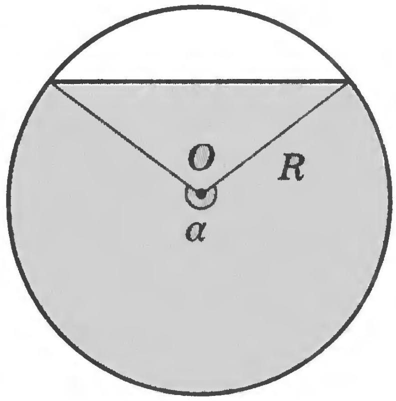


Рис. 9.12

2. Площадь сектора:

$S=\frac{1}{2}\alpha\cdot R^2$, угол α — в радианах (рис. 9.10).

3. Площадь сегмента (заштрихованного):

1) $S=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$,

угол α — в радианах (рис. 9.11);

2) $S=\frac{1}{2}R^2(\alpha+\sin\alpha)$,

угол α — в радианах (рис. 9.12).

4. Площадь кольца.

Пусть R, r — внешний и внутренний радиусы кольца; D, d — внешний и внутренний диаметры. Тогда площадь кольца (рис. 9.13) может быть вычислена по формулам:

$S=\pi(R^2-r^2)=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$.

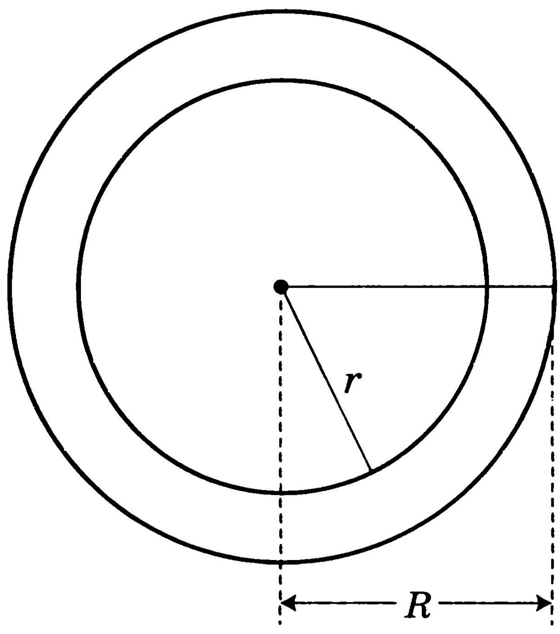


Рис. 9.13

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

9.1 Найдите площадь треугольника, представленного на рис. 9.14.

Решение. Катет BC, расположенный против угла в $30°$ (рис. 9.14), равен половине гипотенузы, следовательно, $BC=8$. Площадь можно найти различными способами, например, по формуле $S=\frac{1}{2}BC\cdot AB\cdot\sin 60°=\frac{8\cdot 16\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2}=32\sqrt{3}$.

Ответ: $32\sqrt{3}$.

9.2 Найдите площадь круга, вписанного в прямоугольную трапецию, если синус её острого угла равен $\frac{1}{7}$, а площадь трапеции равна 64.

Решение.

1) Искомая площадь вписанного в трапецию круга равна: $S=\pi r^2$.

2) Высота трапеции равна $2r$.

3) По свойству четырёхугольника, в который вписан круг, суммы длин его противоположных сторон равны: $AD+BC=AB+CD$.

4) В прямоугольном треугольнике ABF (рис. 9.15): $\angle AFB=90°$, $AB=\frac{2r}{\sin\alpha}$.

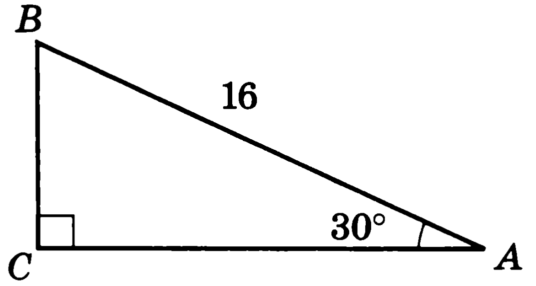


Рис. 9.14

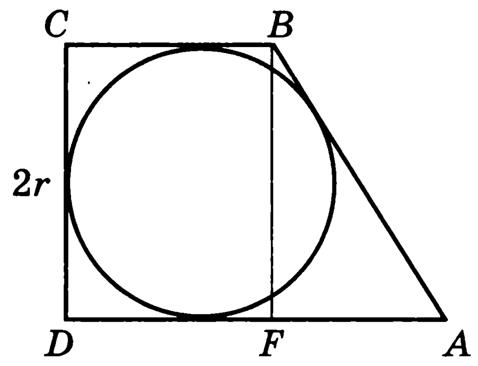


Рис. 9.15

Подставляя значение AB в равенство из п. 2, получим:
$AD+BC=2r+\frac{2r}{\sin\alpha}$.

5) Площадь трапеции можно выразить по формуле:
$S=\frac{AD+BC}{2}2r=\left(2r+\frac{2r}{\sin\alpha}\right)r$.

По условию задачи известно, что данная площадь равна 64. Приравнивая полученное выражение для нахождения площади трапеции к данному значению, найдём квадрат радиуса круга:

$\left(2r+\frac{2r}{\sin\alpha}\right)r=64$, $r^2\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)=32$, $r^2\left(1+\frac{1}{\frac{1}{7}}\right)=32$, $8r^2=32$, $r^2=4$.

6) Искомая площадь круга $S=\pi r^2=4\pi$.

Ответ: 4π.

9.3 В треугольнике один из углов равен 60°, а точка касания вписанного круга делит противоположную сторону на отрезки $\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Найдите отношение площади треугольника к площади круга.

Решение.

1) В треугольнике BOK (рис. 9.16):

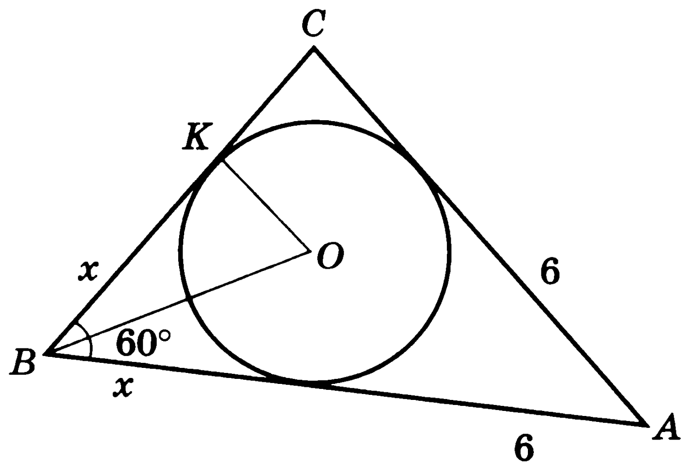


Рис. 9.16

$\angle KBO = 30°$, $\angle K = 90°$. Следовательно, $OB = 2OK = 2r$, $x = r\sqrt{3}$. По свойству равенства отрезков касательных, проведённых к окружности из общей точки, получим, что полупериметр треугольника можно выразить следующим образом:

$p = \sqrt{3} + 6\sqrt{3} + r\sqrt{3} = (7 + r)\sqrt{3}$.

2) Выразим площадь треугольника двумя способами:

$S = pr$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанного круга. И в дальнейшем приравняем правые части полученных равенств.

3) Приравнивая правые части полученных в п. 2 равенств, получим:

$r(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) = \sqrt{(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot r\sqrt{3}}$,

$r^2(7\sqrt{3} + r\sqrt{3})2 = (7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) \cdot 18 \cdot r\sqrt{3}$,

$r(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$,

$S = r(7\sqrt{3} + r\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$.

Решив уравнение

$r^2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}r - 18\sqrt{3} = 0$, $r^2 + 7r - 18 = 0$,

найдём радиус вписанного круга: $r = 2$.

4) Площадь вписанного в треугольник круга равна $S = \pi r^2 = 4\pi$.

5) Для вычисления площади заданного треугольника воспользуемся формулой:

$S = pr = 2((7 + 2)\sqrt{3}) = 18\sqrt{3}$.

6) Искомое отношение площадей равно:

$\frac{18\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

9.4 Найдите площадь треугольника, представленного на рис. 9.17.

Ответ: $50\sqrt{3}$.

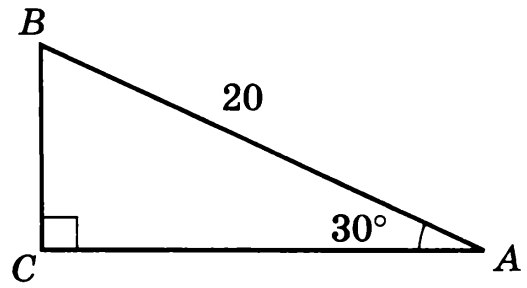


Рис. 9.17

9.5 Найдите площадь треугольника, представленного на рис. 9.18.

Ответ: $\frac{225\sqrt{3}}{2}$.

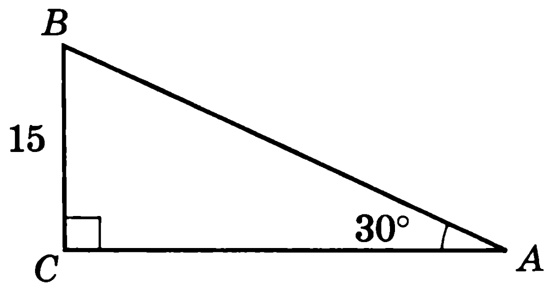


Рис. 9.18

9.6 Найдите площадь прямоугольной трапеции, синус острого угла которой равен $\frac{1}{7}$, а площадь вписанного в неё круга равна 4π.

Ответ: 64.

9.7 В треугольнике один из углов равен 60°, а точка касания вписанного круга делит противоположную сторону на отрезки $\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Найдите площадь круга.

Ответ: 4π.

9.8 Сторона квадрата, вписанного в круг, отсекает сегмент площади $2(\pi - 2)$. Найдите площадь круга.

Ответ: 8π.

9.9 Из произвольной точки, взятой внутри правильного треугольника, восстановлены перпендикуляры к сторонам треугольника. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров равна высоте треугольника.

Указание: воспользуйтесь методом площадей, выразив площадь треугольника различными способами.

9.10 Стороны треугольника 10, 17, 21. Найдите площади треугольников, на которые данный треугольник разбивается медианами.

Ответ: 14.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

9.11 Найдите площадь круга, вписанного в треугольник по данным, представленным на рис. 9.19.

9.12 Найдите площадь круга, вписанного в треугольник по данным, представленным на рис. 9.20.

9.13 В параллелограмме $ABCD$ точки L и K являются соответственно серединами сторон AD и DC. Отрезки AK и BL пересекаются в точке M. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AML равна 1.

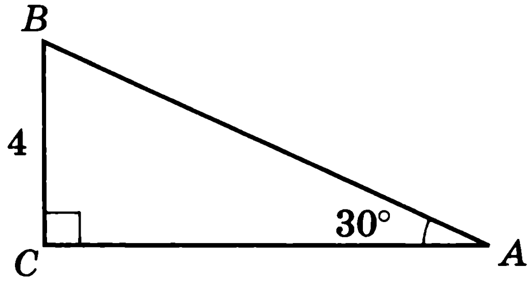


Рис. 9.19

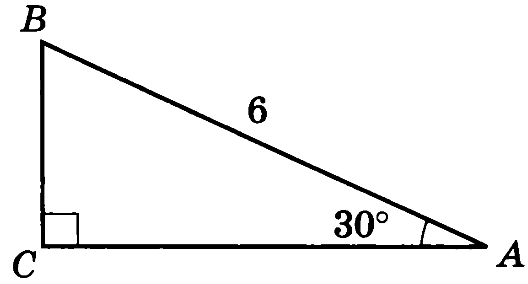


Рис. 9.20

9.14 Найдите отношение площади круга радиуса 2, вписанного в прямоугольную трапецию, синус острого угла которой равен $\frac{1}{7}$.

9.15 В треугольнике один из углов равен 60°, а точка касания вписанного круга делит противоположную сторону на отрезки $\sqrt{3}$ и $6\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

9.16 Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию площади, равной 8, если боковая сторона трапеции в два раза больше её высоты.

9.17 Площадь равнобедренной трапеции равна 96. Диагональ трапеции делит её тупой угол пополам. Длина меньшего основания равна 3. Найдите периметр трапеции.

9.18 Сторона квадрата, вписанного в круг, отсекает сегмент площади $2(\pi - 2)$. Найдите отношение площади круга к площади квадрата.

9.19 Стороны треугольника 10, 17, 21. Найдите наименьшую высоту треугольника.

9.20 Докажите, что площади треугольников, на которые данный треугольник площади S разбивается медианами, равны $\frac{S}{6}$.

ГЛАВА 10

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ. УРАВНЕНИЯ ФИГУР. ВЕКТОРЫ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Декартовы координаты. Уравнения фигур

Декартовы координаты

Рассмотрим на плоскости (рис. 10.1) произвольную точку O. Через рассматриваемую точку O (**начало координат**) плоскости проведём две взаимно перпендикулярные прямые (**координатные оси**): OX (**ось абсцисс**) и OY (**ось ординат**).

Через произвольную точку M, отличную от точки O, проведём прямую, параллельную оси ординат до её пересечения с осью абсцисс. Число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от начала координат O до полученной точки пересечения, называется **абсциссой** точки M.

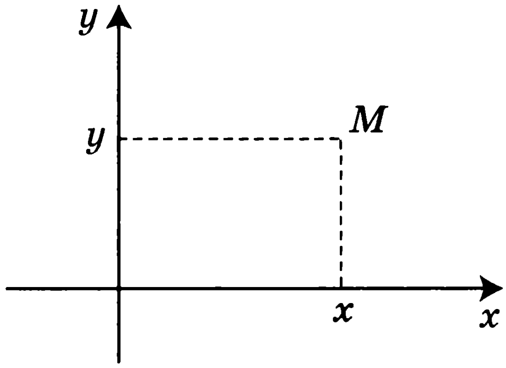


Рис. 10.1

Через точку M проведём прямую, параллельную оси абсцисс до её пересечения с осью ординат. Число y, абсолютная величина которого равна расстоянию от начала координат до полученной точки пересечения, называется **ординатой** точки M.

Таким образом, мы каждой точке плоскости, отличной от начала координат, сопоставили пару действительных чисел — абсциссу x и ординату y: $M\ (x,\ y)$.

Координатами начала координат являются значения $x=0$, $y=0$.

Система, состоящая из начала координат и взаимно перпендикулярных координатных осей, называется **декартовой системой координат** на плоскости, а координаты точек — декартовыми координатами.

В декартовой системе координат на плоскости имеют место следующие формулы:

1) Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:
$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

2) Координаты середины отрезка с концами в точках $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Уравнения фигур на плоскости

Существуют следующие виды **уравнения прямой** на плоскости в декартовой системе координат:

1) Общее уравнение прямой: $ax+by+c=0$.
2) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=kx+b$, где k — тангенс угла наклона прямой к оси Ox (угловой коэффициент).
3) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(x_0;\ y_0)$: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$.
4) Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a, b — отрезки, отсекаемые прямой на осях абсцисс и ординат соответственно.
5) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Уравнения кривых на плоскости

парабола	$y=ax^2+bx+c$ $y^2=px$
гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
окружность с центром в начале координат радиуса R	$x^2+y^2=R^2$
окружность с центром в точке $(a;\ b)$ радиуса R	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Векторы

Строгое определение понятия вектора требует глубоких знаний высшей математики. В школьном курсе **вектор** определён как **направленный отрезок.**

Вектор характеризуется направлением и абсолютной величиной.

Абсолютной величиной (или модулем) вектора называется длина направленного отрезка, определяющего данный вектор.

Координаты вектора

Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости OE_1E_2 (рис. 10.2) точки E_1, E_2 имеют соответственно координаты $(1, 0)$, $(0, 1)$. Назовём векторы $\vec{i}=\overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OE_2}$ **координатными векторами** или **базисными векторами.**

Тогда для базисных векторов выполняются следующие соотношения: $\vec{i}\perp\vec{j}$, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$.

В этом случае базисные векторы называются **единичными.**

Система векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ называется **ортонормированным базисом.**

Пусть в системе координат OE_1E_2 точка A имеет координаты $(a_1;\ a_2)$, точка B имеет координаты $(b_1;\ b_2)$.

Тогда координатами вектора с началом в точке A и концом в точке B называются числа b_1-a_1, b_2-a_2. Принята следующая запись:

$\overrightarrow{AB}(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$.

В этом случае также считают, что вектор $\overrightarrow{AB}$ представлен в виде $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1)\vec{i}+(b_2-a_2)\vec{j}$.

Это представление означает, что вектор $\overrightarrow{AB}$ разложен по базисным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$.

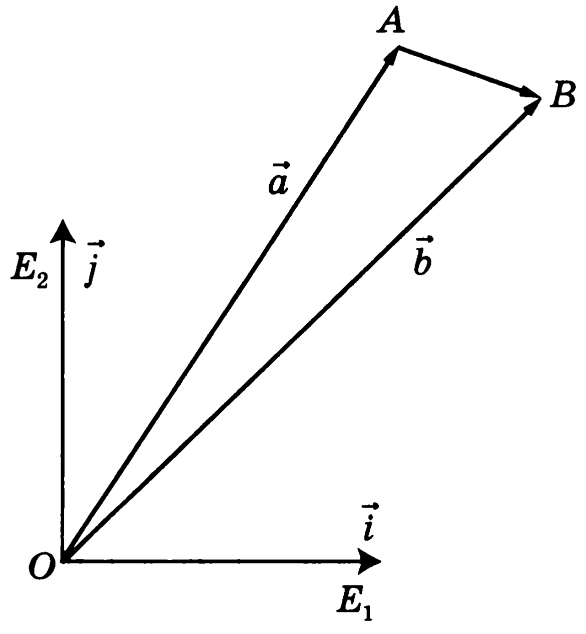


Рис. 10.2

Если началом вектора является начало координат $O(0,\ 0)$, а концом вектора является точка $A(a_1;\ a_2)$, то такой вектор называется **радиус-вектором** точки A, и его координаты совпадают с координатами точки A: $\overrightarrow{OA}(a_1;\ a_2)$ (рис. 10.3).

Если конец вектора совпадает с его началом, то вектор называется **нулевым**: $\vec{0}(0,\ 0)$. Другими словами, точка является нулевым вектором.

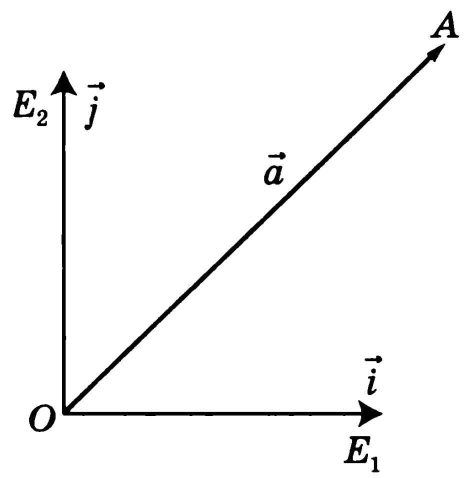


Рис. 10.3

Сложение векторов

Рассмотрим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (рис. 10.4). Отложим вектор $\vec{a}$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ от точки A — получим направленный отрезок $\overline{AB}$; отложим вектор $\vec{b}$: $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ от конца направленного отрезка $\overline{AB}$ — получим направленный отрезок $\overline{BC}$.

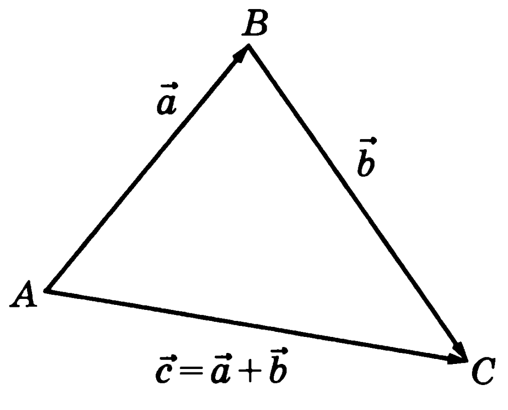


Рис. 10.4

Соединим точки A и B в указанном порядке. Получим направленный отрезок $\overline{AC}$. Вектор $\vec{c}$, определённый направленным отрезком $\overline{AC}$, называется **суммой** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Построение суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ возможно по одному из двух правил: треугольника или параллелограмма.

Выполняются следующие свойства сложения векторов:

1) **Свойство коммутативности:** для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2) **Свойство ассоциативности:** для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливо равенство: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3) Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо соотношение: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4) Для любого вектора $\vec{a}$ его сумма с противоположным вектором $(-\vec{a})$ равна нулевому вектору: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Под **разностью** двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условию: $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы

Произведением ненулевого действительного числа λ и ненулевого вектора называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$, где $|\lambda|$ — абсолютная величина λ.
2) Если $\lambda>0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены; если $\lambda<0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены. Если $\lambda=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$, произведение $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

Выполняются следующие свойства умножения вектора на число. Для любых действительных чисел α и β и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно:

1) $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=(-\vec{a})$;
2) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$;
3) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;
4) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Линейные операции над векторами в координатах

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ имеют координаты: $\vec{a}(a_1;\ a_2)$, $\vec{b}(b_1;\ b_2)$. Тогда вектор $\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ имеет координаты:

$\alpha\vec{a}\pm\beta\vec{a}(\alpha a_1\pm\beta b_1,\ \alpha a_2\pm\beta b_2)$.

Два вектора называются **коллинеарными**, если существует прямая, которой они оба параллельны. Коллинеарные векторы обозначаются так: $\vec{a}||\vec{b}$.

Критерий коллинеарности векторов: два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$ являются коллинеарными в том и только том случае, когда существует такое единственное действительное число λ, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Критерий коллинеарности векторов в координатной форме: ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны в том и только том случае, когда их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\vec{a}\|\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=\lambda a_1 \\ b_2=\lambda a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

Скалярное произведение двух векторов. Длина вектора. Угол между двумя векторами

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1;\ a_2)$, $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ называется число $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.

Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними. Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через φ (рис. 10.5). Тогда имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

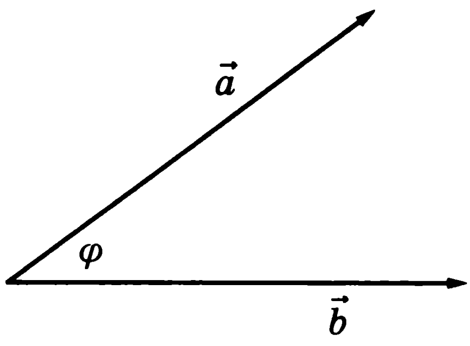


Рис. 10.5

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется число:

$$\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\,\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2.$$

Длина вектора $\vec{a}$ может быть вычислена по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{a_1a_1+a_2a_2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Косинус угла φ между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

Критерий перпендикулярности двух векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны в том и только том случае, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$.

Проекция вектора на ось

Пусть m — ось, а $\vec{e}$ — её орт. Тогда проекцией $pr_m\vec{a}$ любого ненулевого вектора $\vec{a}$ на ось m называется число $pr_m\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=\angle\vec{a}\vec{e}$ (рис. 10.6).

Например, проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=|\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

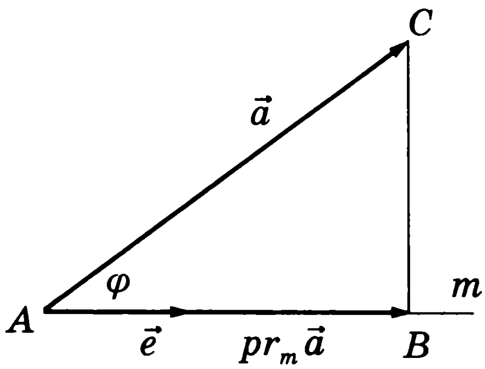


Рис. 10.6

В частности, проекции вектора $\vec{a}$ на координатные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ соответственно имеют вид:

$$pr_{\vec{i}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{|\vec{i}|}=\vec{a}\cdot\vec{i}=a_1;$$

$$pr_{\vec{j}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{j}|}=\vec{a}\cdot\vec{j}=a_2;$$

Взаимное расположение фигур на плоскости

Расстояние от точки $(x_0;\ y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле: $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Взаимное расположение прямых, заданных общими уравнениями: $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$

1) Условие параллельности прямых: $a_1b_2-a_2b_1=0$
2) Условие перпендикулярности прямых: $a_1a_2+b_1b_2=0$

3) Угол α между прямыми может быть найден по формулам:
$\sin\alpha = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ $\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_2b_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

Взаимное расположение прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами: $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$

1) Условие параллельности: $k_1=k_2$
2) Условие перпендикулярности: $k_1\cdot k_2=-1$
3) Угол α между прямыми может быть найден по формуле:
$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

10.1 Найдите проекцию вектора $\vec{a}$ (2; 1) на вектор $\vec{b}$ (1; 3).

Решение. Проекцией вектора называется число, определяемое по формуле: $pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=\angle\vec{a}\vec{b}$ (рис. 10.7).

Тогда $pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=|\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=$
$=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}=\frac{2+3}{\sqrt{1+9}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{2,5}.$

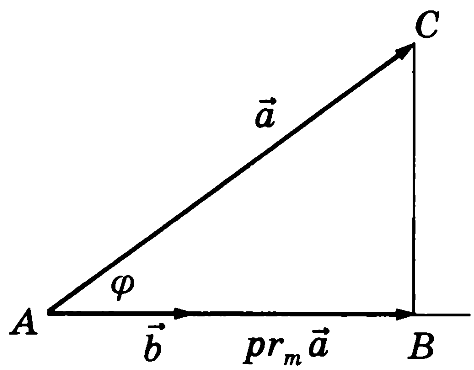


Рис. 10.7

Ответ: $\sqrt{2,5}$.

10.2 Установите взаимное расположение двух прямых:
l: $5x-2y+7=0$; m: $5x-2y+11=0$.

Решение. В нашем случае выполняется условие параллельности прямых: $a_1b_2-a_2b_1=0$. Действительно, $-10-(-10)=0$, следовательно, данные прямые параллельны.

Ответ: прямые параллельны.

10.3 Вычислите координаты точки пересечения двух прямых, представленных на рис. 10.8.

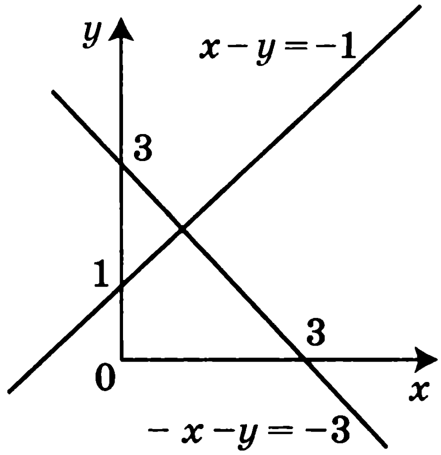


Рис. 10.8

Решение. Для нахождения координат точки пересечения прямых (рис. 137) решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ -x - y = -3. \end{cases}$$

Решим систему методом сложения. Получим: $-2y = -4$, $y = 2$. Подставляя полученное значение переменной y в первое уравнение системы, получим: $x - 2 = -1$, $x = 1$. Таким образом, точка пересечения прямых имеет следующие координаты: $x = 1$, $y = 2$.

Ответ: $x = 1$, $y = 2$.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

10.4 Установите взаимное расположение двух прямых: l: $11x + 3y + 2 = 0$; m: $11x + 3y + 11 = 0$.

Ответ: прямые параллельны.

10.5 Установите взаимное расположение двух прямых: l: $x - 2y + 1 = 0$; m: $2x - 4y + 2 = 0$.

Ответ: прямые совпадают.

10.6 Вычислите координаты точки пересечения двух прямых, представленных на рис. 10.9.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

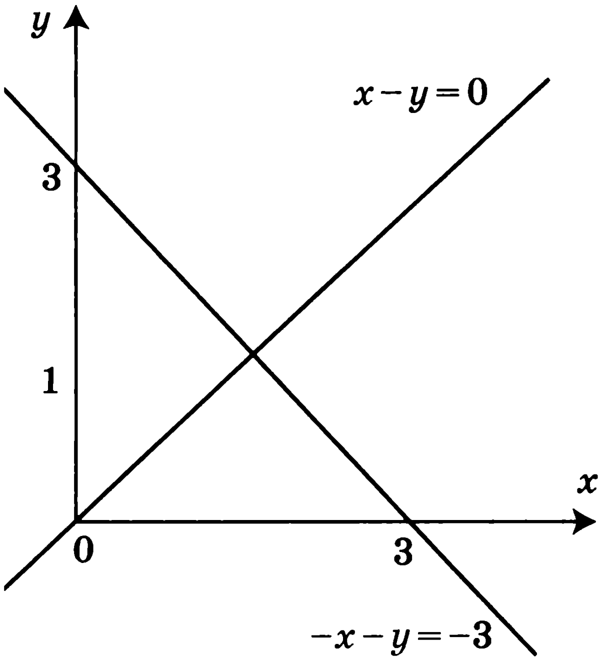


Рис. 10.9

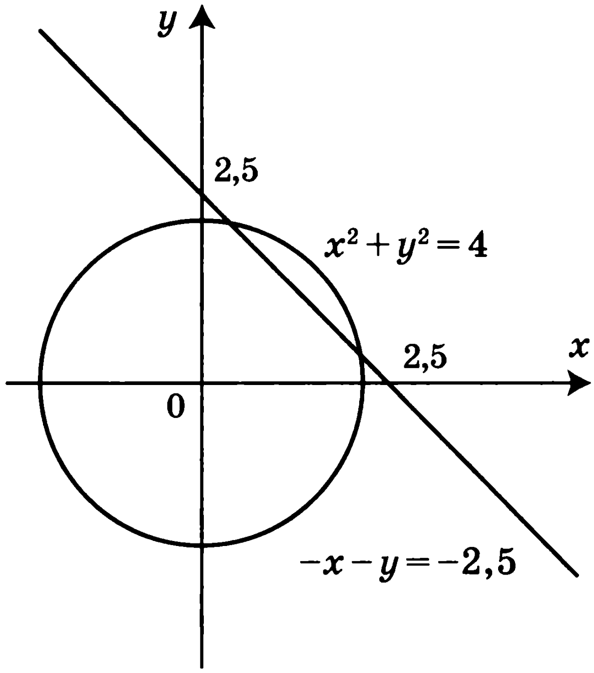


Рис. 10.10

10.7 Вычислите координаты точки пересечения прямой и окружности, представленных на рис. 10.10.

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{7}}{4};\ \frac{5-\sqrt{7}}{4}\right)$; $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{4};\ \frac{5+\sqrt{7}}{4}\right)$.

10.8 Найдите длину вектора $\vec{a}(-1;\ 3)$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

10.9 Найдите длину вектора $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}$.

Ответ: $2\sqrt{5}$.

10.10 Найдите угол между векторами $\vec{a}(-4;\ 5)$; $\vec{b}(1;\ 2)$.

Ответ: $\arccos\frac{6}{\sqrt{205}}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

10.11 Установите взаимное расположение двух прямых:
l: $y = 2x + 1$; m: $y = 2x - 5$.

10.12 Установите взаимное расположение двух прямых:
l: $x - y - 3 = 0$; m: $-x - y + 11 = 0$.

10.13 Вычислите координаты точки пересечения двух прямых, представленных на рис. 10.11.

10.14 Вычислите координаты точки пересечения двух окружностей, представленных на рис. 10.12.

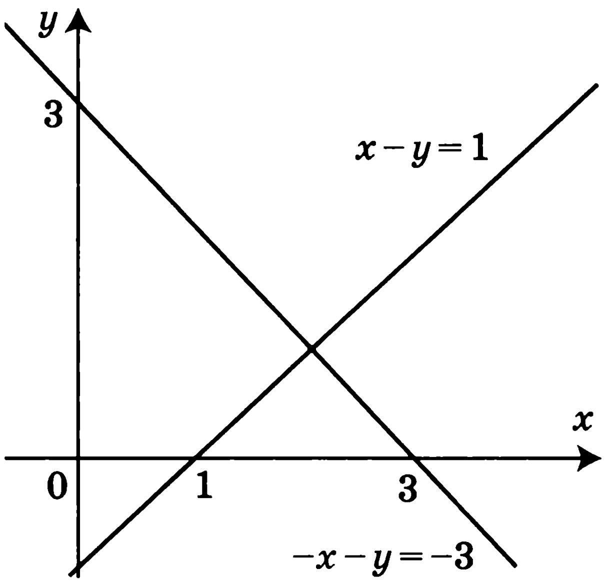


Рис. 10.11

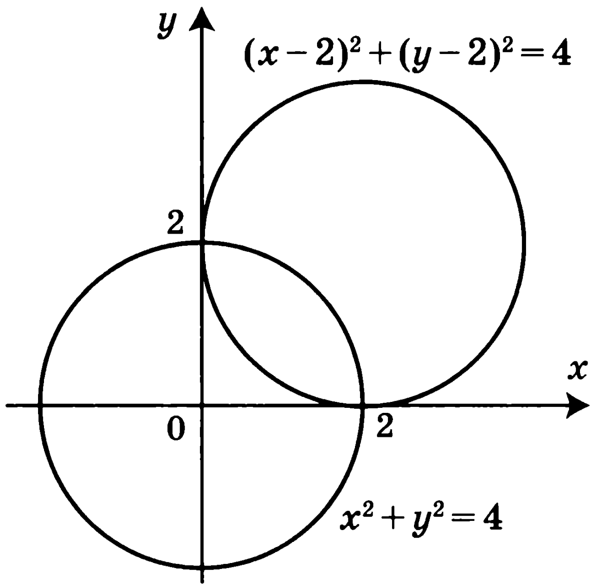


Рис. 10.12

10.15 Определите радиус окружности, заданной уравнением: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 121$.

10.16 Найдите угол между векторами $\vec{a}(-3;\ 1)$; $\vec{b}(2;\ 6)$.

ГЛАВА 11

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В школьном курсе рассматриваются построения, выполненные циркулем и линейкой. Задача на построение решается в 4 этапа: анализ, построение, доказательство, исследование.

К основным действиям, которые можно осуществлять с помощью циркуля и линейки, относятся следующие:

1) Построение прямой, проходящей через две имеющиеся точки.
2) Построение окружности с центром в построенной точке и радиусом, равным отрезку с концами в построенных точках.
3) Построение пересечения двух построенных фигур.
4) Выбор любого конечного числа произвольных точек, принадлежащих одной из построенных фигур.

Основные методы решения задач на построение

1) Метод геометрических мест точек.
2) Метод геометрических преобразований.
3) Алгебраический метод.

Основные геометрические места точек

1) Множество всех точек плоскости, удалённых на заданное расстояние от данной точки, — окружность с центром в данной точке и радиусом, равным заданному расстоянию.
2) Множество всех точек плоскости, равноудалённых на заданное расстояние от данной прямой, — пара прямых, параллельных данной прямой, точки которых отстоят от данной прямой на заданное расстояние.
3) Множество всех точек плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых, — прямая, параллельная данным прямым и делящая пополам всякий отрезок с концами на этих прямых.
4) Множество всех точек плоскости, равноудалённых от концов данного отрезка, — прямая, перпендикулярная к данному

отрезку, проходящая через его середину (серединный перпендикуляр к данному отрезку).

5) Множество всех точек плоскости, равноудалённых от сторон угла — биссектриса угла.
6) Множество всех точек плоскости, равноудалённых от пары данных пересекающихся прямых, — пара взаимно перпендикулярных прямых, являющихся биссектрисами углов, образованных при пересечении данных прямых.
7) Множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом, — окружность, построенная на данном отрезке как на диаметре.
8) Множество всех точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом, — есть две дуги окружностей равных радиусов, опирающихся на данный отрезок (концы отрезка не рассматриваются).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

11.1 Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.

Решение. *Анализ.* Пусть задача решена и серединный перпендикуляр KL к данному отрезку CD построен (рис. 11.1).

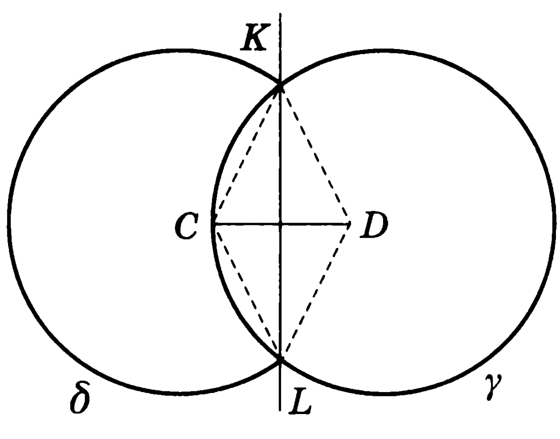


Рис. 11.1

Отметим, что каждая точка серединного перпендикуляра KL равноудалена от концов отрезка CD, то есть представляет собой пересечение двух окружностей с центрами в точках C и D соответственно.

Построение.

1) Окружность δ радиуса CD с центром в точке C.
2) Окружность γ радиуса CD с центром в точке D.
3) Точки K и L пересечения окружностей δ и γ: $\delta \cap \gamma = \{KL\}$.
4) Прямая KL — искомый серединный перпендикуляр.

Доказательство. Прямая KL — искомый серединный перпендикуляр, так как четырёхугольник $CKDL$ — ромб (по построениям 1, 2, 3), а диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам.

Исследование. Задача всегда имеет единственное решение.

11.2 Постройте треугольник наименьшего периметра по данной стороне a и высоте h_a, проведённой к стороне a.

Решение. *Анализ.* Пусть задача решена. Точка A принадлежит множеству точек, расположенных на расстоянии h_a от прямой BC, то есть лежит на прямой l, параллельной BC и отстоящей от неё на расстояние h_a (рис. 11.2).

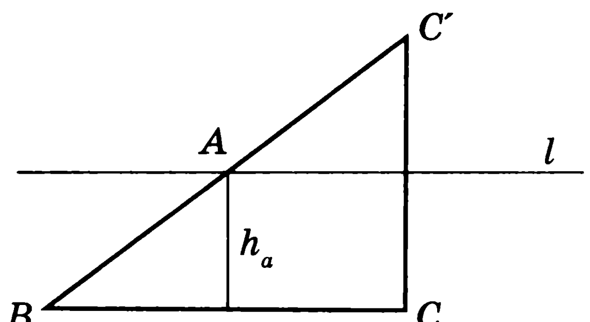


Рис. 11.2

Значение суммы $BC + AC + AB$ должно быть наименьшим, так как по условию задачи периметр искомого треугольника должен быть наименьшим. Поскольку длина отрезка BC по условию задана и равна a, то наименьшее значение должна принимать сумма длин двух оставшихся сторон: $AC+AB$. Это возможно тогда и только тогда, когда три точки B, A и C принадлежат одной прямой. Рассмотрим осевую симметрию относительно оси l. Образом точки C при симметрии является точка C', такая, что $CC' \perp l$ и расстояния от точек C и C' до прямой l равны. Рассмотрим прямую BC′: прямая BC′ пересекает прямую l в точке A. Так как точки B, A, C' лежат на одной прямой, то значение суммы $BA+AC'$ — наименьшее. Следовательно, положение искомой точки A определено как пересечение прямых BC' и l.

Построение.

1) Любая прямая k, принадлежащая плоскости построения (рис. 11.3).

2) Любая точка B на прямой k.

3) Окружность $\omega(B,\ a)$ с центром в точке B, радиуса a.

4) Точка $C=\omega(B,\ a)\cap k$.

5) Прямая l, удалённая от прямой k на расстояние h_a.

6) Точка C', симметричная точке C относительно прямой l.

7) Прямая BC'.

8) Точка $A=BC'\cap l$.

9) Треугольник ABC — искомый.

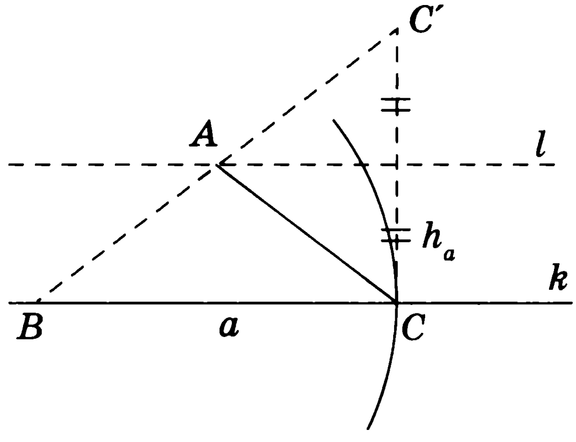


Рис. 11.3

Доказательство. Построенный треугольник ABC — искомый, так как:

1) $BC=a$ по пунктам 3, 4 раздела «Построение».

2) Длина высоты треугольника, проведённой к стороне BC, равна h_a по пунктам 5, 8 раздела «Построение».

3) Построенный треугольник является треугольником наименьшего периметра, так как по пункту 6 раздела «Построение» $BC+AC+AB=BC+AC'+AB$.

Исследование.

Задача всегда имеет решение. С точностью до движений плоскости решение — единственное.

БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

11.3 Постройте на данном луче отрезок, равный данному.

11.4 Постройте прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной.

11.5 Постройте прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку.

11.6 Постройте от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

11.7 Постройте биссектрису данного угла.

11.8 Постройте середину данного отрезка.

11.9 Постройте треугольник по двум данным его сторонам и углу между ними.

11.10 Постройте треугольник по стороне и двум, прилежащим к ней углам.

11.11 Постройте треугольник по трём данным его сторонам.

11.12 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

11.13 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

11.14 Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

11.15 Постройте правильный треугольник по данному радиусу описанной около него окружности.

11.16 Постройте правильный треугольник по данному радиусу вписанной в него окружности.

11.17 Постройте ромб по его данным диагоналям.

11.18 Постройте прямоугольный треугольник по данной гипотенузе и данной медиане, проведённой к одному из катетов.

11.19 Постройте трапецию по данным её основаниям и диагоналям.

11.20 Постройте квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.48 1. **1.49** 1. **1.50** 2. **1.51** 3. **1.52** 2.
1.53 4. **1.54** 2. **1.55** 5. **1.56** 1. **1.57** 4.
1.58 3. **1.59** 2. **1.60** 5. **1.61** 1. **1.62** 3.
1.63 2. **1.64** 3. **1.65** 4. **1.66** 2. **1.67** 4.

1.68 а) 16 км; б) 4 ч.; в) 2 раза; г) $\frac{1}{2}$ ч., $\frac{1}{3}$ ч.; д) $5\frac{1}{19}$ км/ч.

1.69 $v=\frac{s}{t}$. **1.70** $S=\frac{F}{p}$.

Глава 2

2.36 $ab(a-b)$. **2.37** 567. **2.38** -3. **2.39** 4. **2.40** 2 .
2.41 -3. **2.42** 0. **2.43** -3. **2.44** 1. **2.45** 7 .
2.46 1. **2.47** 2. **2.48** 3; 4. **2.49** -4; -3. **2.50** -1.
2.51 1. **2.52** 2. **2.53** 1. **2.54** 3. **2.55** 4.
2.56 2. **2.57** 3. **2.58** 3. **2.59** 2. **2.60** 11.

Глава 3

3.36 1. **3.37** 2. **3.38** 1 **3.39** 2. **3.40** 1.
3.41 1. **3.42** 5. **3.43** 4 **3.44** 2. **3.45** 4.
3.46 7. **3.47** 0. **3.48** 2,5. **3.49** 3. **3.50** 1.
3.51 3. **3.52** 2. **3.53** 3. **3.54** 1. **3.55** 1.
3.56 2. **3.57** 5. **3.58** 2.

3.59

а	б	в
2	1	3

3.60

а	б	в
2	3	1

3.61 1. **3.62** 1. **3.63** $\frac{3}{2}$. **3.64** 1.

3.65 $a\in(1;\ +\infty)$. **3.66** 24; 12. **3.67** 20; 12.

Глава 4

4.22 $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_5 = -\frac{9}{8}$; $x_{100} = \frac{199}{103}$. **4.23** $x_1 = 5$; $x_7 = 23$; $x_{200} = -602$.

4.24 $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_5 = -\frac{1}{32}$; $x_8 = \frac{1}{256}$. **4.25** 1. **4.26** 3.

4.27 1. **4.28** 4. **4.29** 1; $a_n = n$. **4.30** 2; $a_n = n+1$.

4.31 2; 5; 8. **4.32** $\frac{1}{9}$. **4.33** 6, 18, 54; 26, 26, 26. **4.34** 6 дней.

Глава 5

5.20 303600. **5.21** 61880. **5.22** 109620. **5.23** 3024.

5.24 39. **5.25** 2058. **5.26** 26. **5.27** 48. **5.28** 385.

5.29 50. **5.30** $\frac{1}{35}$. **5.31** $\frac{109}{357}$. **5.32** $\frac{8}{35}$. **5.33** $\frac{1}{2}$.

5.34 90; 650; $642\frac{2}{9}$. **5.35** 1. **5.36** 3.

Глава 6

6.9 18°; 162°. **6.10** 15. **6.11** $\frac{48}{7}$. **6.12** 10.

6.13 *Указание:* воспользуйтесь свойством средних линий треугольников, на которые исходный четырёхугольник разбивается диагоналями.

Глава 7

7.8 2. **7.10** 32°. **7.11** 3 **7.12** 10,625.

Глава 8

8.9 $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$. **8.10** $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$. **8.11** 2. **8.12** 12. **8.13** $\frac{35}{12}$.

Глава 9

9.11 $8\pi(2+\sqrt{3})$. **9.12** $\frac{9\pi}{2}(2-\sqrt{3})$. **9.13** 20. **9.14** $\frac{\pi}{16}$. **9.15** $18\sqrt{3}$.
9.16 π. **9.17** 42. **9.18** $\frac{\pi}{2}$. **9.19** 8.

9.20 *Указание:* воспользуйтесь свойствами площадей подобных треугольников и треугольников с общими основаниями.

Глава 10

10.11 прямые параллельны. **10.12** прямые перпендикулярны.
10.13 (2; 1) **10.14** (0; 2); (2; 0). **10.15** 11. **10.16** 90°.

Учебное издание

Глизбург Вита Иммануиловна

МАТЕМАТИКА. ГИА
Комплексная подготовка

Ведущий редактор *Е. Н. Куликова*
Художественный редактор *А. М. Драговой*
Оформление обложки *М. А. Кузнецов*
Технический редактор *В. А. Артемов*
Компьютерная вёрстка *Г. В. Доронина*
Корректор *З. А. Тихонова*

Подписано в печать 29.09.11. Бумага офсетная.
Формат 70×90 1/16. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Печ. л. 11,0. Усл. печ. л. 12,87. Тираж 5000 экз. Заказ № 3833.

ООО «Издательство «АЙРИС-пресс»
129626, г. Москва, проспект Мира, д. 104.

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством материалов
в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени
полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР».
170040, г. Тверь, пр. 50 лет Октября, 46.

- ☑ Комплексная подготовка к ГИА по алгебре и геометрии.
- ☑ Трёхуровневая система задач по типу ГИА с решениями, рекомендациями и ответами.
- ☑ Доступность, наглядность и строгость материала.
- ☑ Соответствие ФГОС, совместимость с действующими учебниками по алгебре и геометрии.