ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

ГИА

Математика

Учебно-справочные материалы для 9 класса

Экзамен с «Просвещением»

ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ: ГИА

Математика

ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ

Учебно-справочные материалы для 9 класса

Москва
Санкт-Петербург
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2012

УДК 51 (035)
ББК 22.1я721
М 34

Проект «Итоговый контроль»
Серия «Итоговый контроль: ГИА» основана в 2010 году

Руководитель проекта *М. А. Поляков*
Научный руководитель проекта к.п.н. *Г. С. Ковалёва*

Авторы: *Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, В. А. Булычёв, Е. А. Бунимович, Л. О. Рослова, Н. Х. Агаханов*

Математика: ГИА: Учебно-справочные материалы для 9 класса (Серия «Итоговый контроль: ГИА») / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, В. А. Булычёв, Е. А. Бунимович, Л. О. Рослова, Н. Х. Агаханов. — М.; СПб.: Просвещение, 2012. — 279 с.
М 34

ISBN 978-5-09-026307-8.

Пособие предназначено для отработки основных знаний и умений выпускников, необходимых для успешной сдачи ГИА. Оно поможет систематизировать знания по математике, сконцентрировать внимание на наиболее важных вопросах дисциплины, выносимых на экзамен, а также правильно выстроить стратегию и тактику подготовки к ГИА. Пособие содержит краткий теоретический курс среднего (полного) общеобразовательного уровня, представленный на основе кодификатора, разработанного Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ). Каждый раздел сопровождается примерами типовых заданий разных уровней сложности.

УДК 51 (035)
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-09-026307-8

Предисловие

Пособие предназначено для подготовки к Государственной итоговой аттестации по математике в 9-м классе. Оно содержит теоретический и практический материал для систематизации знаний, повторения основных вопросов курса 5 – 9-х классов и для тренировки в решении типовых экзаменационных заданий разного уровня сложности.

Как известно, в настоящее время экзамен в 9-м классе перестаёт быть экзаменом по алгебре, теперь он охватывает весь курс математики основной школы, включая геометрию и новую для нашей школы содержательную линию – комбинаторику, вероятность и статистику. Предлагаемое пособие по своему содержанию и структуре учитывает особенности новых подходов. В него включён материал по арифметике, алгебре, геометрии, вероятности и статистике.

В первых одиннадцати параграфах в сжатой форме содержатся теоретические сведения по основным содержательным линиям курса. Здесь представлены основные определения, факты, утверждения, теоремы. Здесь же разбираются примеры решения задач с применением рассмотренных фактов – как базового уровня (первая часть экзаменационной работы), так и повышенного (вторая часть). Авторы старались при этом обратить внимание на некоторые «тонкие» моменты, дать советы по выбору способа решения, по приёмам самоконтроля. Каждый законченный фрагмент теоретических сведений завершается небольшим набором тренировочных упражнений и задач, разбитых на две группы – на задания базового уровня и задания повышенного уровня. Ко всем заданиям приводятся ответы, а к некоторым ещё указания или решения.

Необходимо обратить внимание на то, что пособие можно использовать при работе по любому учебнику, так как материал в нём представлен в «итоговой» форме и не зависит от последовательности изучения и методических подходов, применявшихся в учебном процессе.

Последний параграф (§ 12) содержит двенадцать тематических проверочных работ для самостоятельного решения. Задания в них аналогичны экзаменационным и по содержанию, и по форме предъявления – с выбором ответа, с кратким ответом, на соотнесение, с развёрнутым ответом. Чтобы читатель мог получить отчётливое представление о требованиях, предъявляемых на экзамене, в работах явно выделены базовая часть и задания повышенного уровня (задания, относящиеся к этим двум разным уровням, разделены чертой). Выполнив эти работы, можно проверить себя, насколько усвоен материал темы, какие вопросы требуют дополнительной проработки.

В Приложении приведены примеры заданий высокого уровня. Подобные задания в экзаменационной работе даются под № 22 и № 23. Как и остальные, они не выходят за рамки содержания, предусмотренного стандартом основной школы, однако их выполнение требует свободного владения материалом курса, знания некоторых специальных приёмов, владения довольно широким набором способов рассуждений. Около каждого номера в скобках указан раздел курса, к которому относится данное задание. К заданию а) в каждом номере приводится решение, которое рекомендуется разобрать с листом бумаги и ручкой в руках. Задание б) предназначено для самостоятельного решения и снабжено ответом.

§ 1. Числа и вычисления

Что надо знать и уметь:

- понимать и использовать термины, связанные с делимостью натуральных чисел; применять в ходе решения задач признаки и свойства делимости; решать задачи, предполагающие выполнение деления с остатком и содержательную интерпретацию полученного результата;
- представлять обыкновенные дроби десятичными и записывать десятичные дроби в виде обыкновенных; сравнивать и упорядочивать рациональные числа; выполнять вычисления с положительными и отрицательными числами;
- владеть понятием процента; решать задачи на проценты, в том числе с контекстом из реальной жизни;
- решать задачи, требующие владения понятием «отношение», а также понятиями прямой и обратной пропорциональной зависимости;
- владеть понятиями «степень с целым показателем», «квадратный корень»; оценивать квадратные корни, находить их десятичные приближения; вычислять значения выражений, содержащих степени, квадратные корни; понимать и использовать в ходе решения задач запись больших и малых чисел в стандартном виде;
- знать соотношения между различными подмножествами множества действительных чисел, понимать и использовать соответствующие терминологию и символику; находить десятичные приближения рациональных и иррациональных чисел; сравнивать и упорядочивать рациональные и иррациональные числа; понимать и использовать в ходе решения задач соответствие между действительными числами и точками координатной прямой; понимать и интерпретировать буквенную запись свойств действий над числами.

1.1. Делимость натуральных чисел

Теоретические сведения

Делители и кратные

Пусть a и b — натуральные числа. ***Число a делится на число b, если существует натуральное число c такое, что $a = bc$.***

Например, 60 делится на 15, так как $60 = 15 \cdot 4$. А вот на 16 число 60 не делится. В самом деле, $16 \cdot 3 < 60$, а $16 \cdot 4 > 60$, значит, нет такого натурального числа, которое в произведении с числом 16 даёт 60.

Пример 1. Докажем, что сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

Запишем сумму трёх последовательных натуральных чисел и преобразуем её:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3\,(n + 1).$$

Рассматриваемая сумма равна произведению числа 3 и некоторого натурального числа, следовательно, она делится на 3.

Если число a делится на число b, то число b называют делителем числа a, а число a — кратным числа b. Например, 60 делится на 15. Значит, 15 — делитель числа 60, а 60 — кратное числа 15.

Пример 2. Выясним, сколько делителей имеет число 24.

Воспользуемся методом перебора. Будем выписывать делители парами: отыскав один делитель, сразу же запишем и другой, являющийся частным от деления числа 24 на найденный делитель:

1	2	3	4
24	12	8	6

Таким образом, число 24 всего имеет 8 делителей.

Взяв некоторое натуральное число, можно найти *все* его делители. Иначе обстоит дело с кратными. Рассмотрим кратные числа 24. Для этого будем умножать 24 на 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. Получим последовательность кратных: 24, 48, 72, 96, 120, ... Эта последовательность бесконечна. Вообще, *у любого натурального числа бесконечно много кратных.*

При решении многих задач приходится находить общие делители и общие кратные двух и более чисел, в частности, ***наибольший общий делитель*** и ***наименьшее общее кратное*** (сокращённо НОД и НОК). НОД и НОК чисел a и b обозначают соответственно НОД (a; b) и НОК (a; b).

Пример 3. С конечной остановки по двум разным маршрутам одновременно выезжают два автобуса. Первый возвращается каждые 30 мин, второй — каждые 40 мин. Через какое наименьшее время они снова окажутся вместе на конечной остановке?

Решение: Промежуток времени, через который автобусы первый раз окажутся на конечной остановке вместе, должен быть кратен и 30, и 40, т. е. быть их наименьшим общим кратным. Чтобы найти НОК (30; 40), будем перебирать числа, кратные 40, и проверять, делятся ли они на 30. Получим: 40; 80; 120; ... . Так как 120 — первое число в ряду чисел, кратных 40, которое делится на 30, то НОК (30; 40) = 120. Таким образом, автобусы снова окажутся вместе на конечной остановке через 120 мин, т. е. через 2 ч.

Числа простые и составные

Определение. ***Натуральное число называется простым числом, если оно имеет только два делителя: 1 и самого себя.***

Первыми простыми числами являются числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... Наименьшее простое число — это число 2. Это единственное чётное простое число; все остальные простые числа нечётные. Простых чисел бесконечно много.

Определение. ***Натуральное число, имеющее более двух делителей, называется составным.***

Например, число 6 составное: оно делится не только на 1 и на 6, но ещё и на 2, и на 3.

Число 1 имеет только один делитель — само это число. Поэтому оно не является ни простым, ни составным числом.

Всякое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, или, как говорят, *разложить на простые множители.* Например: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Таким образом, *какое бы натуральное число (кроме 1) мы ни взяли, оно либо является простым, либо может быть разложено на простые множители.*

Признаки делимости

Число делится на 10 в том и только в том случае, если оно оканчивается цифрой 0. Например, число 48 920 делится на 10, а число 48 902 на 10 не делится.

Число делится на 5 в том и только в том случае, если оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5. Например, числа 14 805 и 14 850 делятся на 5, а число 14 858 на 5 не делится.

Число делится на 2 в том и только в том случае, если оно оканчивается чётной цифрой (то есть цифрой 0, 2, 4, 6 или 8). Например, числа 32 960, 32 984, 48 616 делятся на 2, а числа 47 901, 10 003 на 2 не делятся.

Число делится на 3 в том и только в том случае, если сумма цифр этого числа делится на 3. Например, число 1545 делится на 3, а число 2638 на 3 не делится.

Число делится на 9 в том и только в том случае, если сумма цифр этого числа делится на 9. Убедитесь самостоятельно, что число 2 143 503 делится на 9, а число 123 456 на 9 не делится.

Пример 4. Докажем, что число 15 426 делится на 18.

В самом деле, это число оканчивается чётной цифрой, значит, оно делится на 2. Сумма цифр этого числа равна 18, а значит, оно делится на 9. Отсюда и следует, что это число делится на 18.

Обобщением рассмотренного примера служит следующее утверждение: *если числа **a** и **b** — взаимно простые и они являются делителями числа **c**, то делителем числа **c** является также и их произведение **ab**.*

Взаимно простыми называют числа, которые не имеют общих делителей, отличных от 1. Если условие отсутствия общих делителей у чисел a и b, отличных от 1, не выполняется, то произведение ab может и не быть делителем числа c. Например, число 210 делится на 6 и на 10, но на 60 оно не делится.

Делимость суммы и произведения

Свойство 1. ***Если в произведении один из множителей делится на некоторое число, то и само произведение делится на это число.***

Например, произведение $63 \cdot 115 \cdot 128$ делится на 7, так как множитель, равный 63, делится на 7. (Докажите самостоятельно, что это произведение также делится на 5, на 2, на 3 и на 9.)

Свойство 2. ***Если в сумме каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сама сумма делится на это число.***

Например, в сумме $1248 + 356 + 402$ все слагаемые — чётные числа. Поэтому и сама сумма является числом чётным.

Свойство 3. ***Если в сумме одно из слагаемых не делится на некоторое число, а остальные делятся, то сумма на это число не делится.***

Например, сумма $548 + 426 + 719$ есть число нечётное, так как слагаемые 548 и 426 на 2 делятся, а 719 на 2 не делится.

Обратите внимание: утверждение «если ни одно слагаемое не делится на некоторое число, то и сумма не делится на это число» неверно. Это легко показать, приведя контрпример: так, ни одно из чисел 41 и 84 на 5 не делится, а их сумма, равная 125, делится на 5.

Пример 5. Проверим, не выполняя деления, является ли число 11 делителем числа 1353.

Представим число 1353 в виде какой-либо суммы так, чтобы вопрос о делимости на 11 каждого из слагаемых был очевиден, например: $1353 = 1100 + 220 + 33$. Каждое слагаемое делится на 11, а значит, и сумма, равна 1353, делится на 11.

Пример 6. Выясним, делится ли на 4 сумма четырёх последовательных натуральных чисел.

Запишем сумму четырёх последовательных натуральных чисел и преобразуем её:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6.$$

Первое слагаемое делится на 4, а второе не делится. Значит, рассматриваемая сумма на 4 не делится.

Деление с остатком

В общем случае при делении одного натурального числа на другое получается остаток. Например, при делении числа 1000 на 45 получается неполное частное, равное 22, и остаток, равный 10. (Убедитесь в этом самостоятельно, выполнив деление уголком.) Поэтому число 1000 можно представить в виде суммы следующим образом: $1000 = 45 \cdot 22 + 10$.

Вообще, если при делении числа a на число b получается неполное частное q и остаток r, то верно равенство $a = bq + r$; при этом число r, как остаток от деления на b, всегда меньше b.

В том случае, когда число a кратно числу b, справедливо равенство $a = bq + 0$; поэтому можно считать, что в случае деления нацело получается нулевой остаток.

Говорить о делении с остатком можно и тогда, когда делимое a меньше делителя b. Пусть, например, $a = 3$ и $b = 4$, можно считать, что неполное частное равно 0, а остаток равен 3, и записать: $3 = 4 \cdot 0 + 3$.

Таким образом, ***для любых двух натуральных чисел a и b справедливо равенство $a = bq + r$*** (здесь q — натуральное число или 0, r — натуральное число, меньшее b, или 0). Иными словами, *всякое натуральное число можно разделить на любое другое натуральное число с остатком.*

Пример 7. Моторная лодка должна перевезти группу из 18 человек на другой берег реки. За какое минимальное количество рейсов это можно сделать, если лодка вмещает вместе с рулевым 5 человек?

Решение: За один рейс можно перевезти 4 туристов. А так как $18 = 4 \cdot 4 + 2$, то придётся сделать не менее 5 рейсов: за четыре рейса перевезти 16 пассажиров и ещё один рейс выполнить для двух оставшихся пассажиров.

Пример 8. В кафе имеется некоторое количество чайных ложек. Когда их пересчитали десятками, то до полного десятка не хватило 2 ложек; когда их пересчитали дюжинами, то 8 ложек остались лишними. Сколько всего ложек, если известно, что их число не превосходит 100?

Решение: Из условия ясно, что при пересчёте ложек как десятками, так и дюжинами остаются лишними 8 ложек. Это означает, что при делении числа ложек и на 10, и на 12 получается один и тот же остаток, равный 8. Если 8 ложек убрать, то оставшееся число ложек будет кратно и 10, и 12, при этом оно не должно превосходить 100. С помощью перебора легко получить, что такое число только одно — это 60. «Возвратив» 8 ложек, получим, что всего имеется 68 ложек. (Проверьте самостоятельно ответ на соответствие условию.)

Остаток от деления обязательно меньше делителя — только в этом случае деление заканчивается. При делении на 2 в остатке могут быть числа 0 и 1, на 3 — числа 0, 1, 2, на 4 — числа 0, 1, 2, 3 и т. д. *Количество возможных остатков равно делителю.*

По остаткам от деления на некоторое число множество натуральных чисел можно *разбить на классы*; их будет столько же, сколько и остатков. Например, по отношению к числу 2 все натуральные числа разбиваются на класс чётных чисел и класс нечётных чисел:

2, 4, 6, 8, 10, 12, ... — при делении на 2 дают в остатке 0;

1, 3, 5, 7, 9, 11, ... — при делении на 2 дают в остатке 1.

По отношению к числу 3 множество натуральных чисел разбивается на три класса:

3, 6, 9, 12, 15, ... — при делении на 3 дают в остатке 0 (числа, кратные 3);

1, 4, 7, 10, 13, ... — при делении на 3 дают в остатке 1;

2, 5, 8, 11, 14, ... — при делении на 3 дают в остатке 2.

Обратите внимание: если выписывать подряд натуральные числа, дающие при делении на некоторое число один и тот же остаток, то получается арифметическая прогрессия. Рассмотрите приведённые выше прогрессии и в каждом случае укажите первый член и разность прогрессии, а затем запишите формулу n-го члена. (Запомните формулу чётного числа, формулу нечётного числа, а также числа, кратного 3.)

Пример 9. Выясним, какой цифрой оканчивается число, являющееся значением выражения 2^{126}.

Посмотрим, есть ли какая-нибудь закономерность в том, как меняется последняя цифра числа 2^n с изменением показателя n:

$$2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,$$
$$2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512 \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что последняя цифра периодически повторяется, причём повторяющуюся группу цифр образуют четыре цифры: 2, 4, 8, 6. Значит, последняя цифра степени 2^{126} определяется тем, на каком месте это число стоит в соответствующей четвёрке. Чтобы узнать это, найдём остаток от деления числа 126 на 4. Так как $126 = 4 \cdot 31 + 2$, то в своей четвёрке число 126 стоит на втором месте, а значит, число, являющееся значением степени 2^{126}, оканчивается цифрой 4.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Какое из чисел не является делителем числа a, если $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$?

1) 42 2) 35 3) 30 4) 20

2. Какое из указанных чисел не делится на 3?

1) 12 852 2) 1143 3) 20 293 4) 7239

3. Какое из указанных чисел делится на 6?

1) 12 852 2) 21 436 3) 20 193 4) 16 666

4. На какое из данных чисел делится сумма $520 + 225$?

1) На 3 2) На 5 3) На 2 4) На 4

5. Известно, что a и b — нечётные числа. Какое из следующих чисел также является нечётным?

1) $a + b$ 2) $2ab$ 3) $a + b + 1$ 4) $(a + 1)\,b$

6. Известно, что a и b — чётные числа. Какое из следующих чисел также является чётным?

1) $a + b + 1$ 2) $(a + 1)\,b$ 3) $ab + 1$ 4) $(a + 1)(b + 1)$

7. Известно, что ровно одно из данных чисел является простым. Какое это число?

1) 3326 2) 3325 3) 3321 4) 3307

8. Какие утверждения неверны?

1) Число 31 740 делится на 5 и не делится на 3.
2) Разложением числа 1800 на простые множители является произведение $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
3) Число 315 кратно числу 35.
4) Если в сумме двух чисел каждое слагаемое не делится на 10, то и сумма не делится на 10.

9. Какое из данных утверждений верно?

1) Все простые числа — нечётные.
2) Все нечётные числа — простые.
3) Все простые числа, большие 2,— нечётные.
4) Все нечётные числа, большие 2,— составные.

10. Укажите верное утверждение. Для неверных утверждений приведите контрпример.

1) Если сумма делится на некоторое число, то и каждое слагаемое делится на это число.
2) Если произведение делится на некоторое число, то и один из множителей делится на это число.
3) Чётное число имеет только чётные делители.
4) Если число делится на 9, то оно делится и на 3.

11. Найдите: а) НОК (12; 18); б) НОД (12; 18); в) НОК (60; 72); г) НОД (60; 72).

12. Для группы туристов из 27 человек заказывают четырёхместные байдарки. Сколько потребуется байдарок? Сколько ещё человек можно взять в группу?

13. Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить не более 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

14. В высотном доме один подъезд, нумерация квартир в нём начинается с 1. На каждом этаже 6 квартир. На каком этаже находится квартира номер 116?

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

15. На какое из данных чисел делится произведение $123 \cdot 70$?

1) На 4 2) На 6 3) На 9 4) На 25

16. Известно, что число a при делении на 5 даёт остаток 4. Какие из утверждений верны?

1) Число $a + 1$ делится на 5.
2) Число a чётно.
3) Число $a - 4$ делится на 5.
4) Число $2a$ при делении на 5 даёт остаток 8.

17. Сколько делителей у числа ab, если a и b — простые числа и $a \neq b$?

18. Если Таня раскладывает имеющиеся у неё карандаши в коробки по 12 карандашей, то у неё остаётся 1 карандаш, а если в коробки по 9 карандашей, то 5 карандашей не хватает. Сколько карандашей у Тани, если известно, что их не более 50?

19. В мотке 10 м тесьмы. От неё отрезают куски длиной 35 см. Сколько таких кусков получится? Какова длина оставшегося куска?

20. Какой цифрой оканчивается число 3^{2010}?

21. Сколько в октябре воскресений, если известно, что первое октября — пятница?

22. Докажите, что сумма двух последовательных натуральных чисел есть число нечётное.

23. Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел есть число чётное.

24. Докажите, что любое трёхзначное число, записанное одинаковыми цифрами, делится на 37.

25. При делении на 7 число a даёт в остатке 3, число b даёт в остатке 4. Докажите, что число $a + b$ делится на 7.

Решения и ответы

1. 4. **2.** 3. **3.** 1. **4.** 2. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 1 и 4. **9.** 3. **10.** 4; 1) $9 + 11 = 20$, число 20 делится на 2, а 9 и 11 на 2 не делятся; 2) $9 \cdot 4 = 36$, число 36 делится на 12, но 9 и 4 на 12 не делятся; 3) чётное число 12 имеет нечётный делитель 3. **11.** а) 36; б) 6; в) 360; г) 12. **12.** 7 байдарок; ещё одного человека. **13.** 12. **14.** На 20-м. **15.** 2. **16.** 1 и 3. **17.** 4, это числа 1, ab, a и b. **18.** 13 или 49. **19.** 28 кусков, 20 см. **20.** Цифрой 9. **21.** Пять. *Реше-*

ние. В октябре 31 день, неделя равна 7 дням. Так как $31 = 7 \cdot 4 + 3$, то в октябре содержится 4 полные недели и ещё 3 дня. Четыре недели (каждая с пятницы по четверг) дают 4 воскресенья. Следующая неполная неделя тоже начинается в пятницу и длится три дня. Значит, последний день октября — воскресенье. Таким образом, всего в октябре, начинающемся с пятницы, 5 воскресений. **22.** *Решение.* Из двух последовательных натуральных чисел одно чётное, другое нечётное. Так как в сумме одно число делится на 2, а другое — не делится, то и сумма на 2 не делится. Значит сумма есть число нечётное. **23.** *Указание.* См. решение № 22, рассуждай аналогично. **24.** *Решение.* Пусть в трёхзначном числе a сотен, a десятков, a единиц. Тогда его можно записать в виде: $100a + 10a + a$. Преобразовав эту сумму, получим: $100a + 10a + a = 111a = 37 \cdot 3 \cdot a$. Так как произведение $37 \cdot 3 \cdot a$ делится на 37, то и трёхзначное число, в котором a сотен, a десятков, a единиц, делится на 37. **25.** *Решение.* $a = 7q + 3$; $b = 7p + 4$; $a + b = (7q + 3) + (7p + 4) = 7(q + p) + 7 = 7(q + p + 1)$.

1.2. Вычисления с рациональными числами[1]

Теоретические сведения

Сравнение и упорядочивание рациональных чисел

Множество рациональных чисел образуют целые числа (натуральные, противоположные им отрицательные числа и число ноль) и дробные числа (положительные и отрицательные). Существуют две формы записи дробных рациональных чисел — *обыкновенные дроби* и *десятичные дроби*, и важно знать о возможности перехода от одной формы к другой.

Десятичную дробь всегда можно представить в виде обыкновенной. (Например: $0{,}027 = \frac{27}{1000}$; $1{,}3 = \frac{13}{10}$.) *Но не всякую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной* (точнее, конечной десятичной дроби).

Чтобы решить вопрос о возможности обращения обыкновенной дроби в десятичную, её прежде всего надо сократить. ***Несократимую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби, если её знаменатель не имеет простых делителей, отличных от 2 и 5.*** В противном случае такое представление невозможно.

Так, в виде конечной десятичной дроби можно записать обыкновенную дробь со знаменателями 2, 5, 8, 20, 25, 40, 50, состоящими только из «двоек» и «пятёрок». Такую дробь всегда можно привести к знаменателю, который записывается единицей с нулями. Например: $\frac{3}{40} = \frac{3 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{75}{1000} = 0{,}075$.

А дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{55}$ в конечные десятичные не обращаются. Если делить уголком числитель такой дроби на знаменатель, то деление никогда

[1] Соответствующие задания как самостоятельные включаются только в первую часть работы.

не закончится и получится *бесконечная десятичная дробь*. Например: $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$.

Для обыкновенных и десятичных дробей существуют свои правила сравнения и выполнения действий. Десятичные дроби сравнивают поразрядно. Например: $0{,}364 < 0{,}463$; $1{,}095 > 1{,}1104$. Две обыкновенные дроби можно сравнить, приведя их к общему знаменателю. ***Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше.***

Пример 1. Выясним, какая из двух дробей — $\frac{5}{6}$ или $\frac{7}{9}$ — больше. Наибольший общий знаменатель этих дробей равен 18 : $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$, $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$. Так как $\frac{15}{18}>\frac{14}{18}$, то $\frac{5}{6}>\frac{7}{9}$.

Иногда, однако, две обыкновенные дроби удаётся сравнить и без приведения их к общему знаменателю, а действуя «по смыслу». Для этого полезно помнить следующие простые факты:

- $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots>\frac{1}{9}>\frac{1}{10}>\ldots$ — чем больше число долей, тем меньше доля;
- $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\ldots<\frac{8}{9}<\frac{9}{10}<\ldots$ — с приближением к 1 дроби увеличиваются;
- всякая неправильная дробь больше правильной, например: $\frac{14}{13}>\frac{13}{14}$;
- из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше, например: $\frac{5}{8}>\frac{5}{9}$.

При сравнении двух дробей иногда может помочь приём сравнения с «промежуточным числом». Сравним, например, дроби $\frac{4}{9}$ и $\frac{6}{11}$. Каждая из них близка к дроби $\frac{1}{2}$, но легко понять, что $\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$, а $\frac{6}{11}>\frac{1}{2}$; значит, $\frac{4}{9}<\frac{6}{11}$.

Пример 2. Найдём наименьшее из чисел $0{,}7$; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{4}{5}$.

Можно было бы представить дробь 0,7 в виде обыкновенной и затем привести все дроби к общему знаменателю. Но есть более простой способ решения этой задачи. Прежде всего исключаем дробь $\frac{9}{7}$: она больше 1, а остальные числа меньше 1. Дробь $\frac{4}{5}$ обращается в десятичную: $\frac{4}{5}=0{,}8$. Так как $0{,}8 > 0{,}7$, то число $\frac{4}{5}$ тоже исключается. Остаётся сравнить числа 0,7 и $\frac{7}{9}$. Для этого запишем число 0,7 в виде обыкновенной дроби: $0{,}7=\frac{7}{10}$. Так как $\frac{7}{10}<\frac{7}{9}$, то наименьшим является число 0,7.

В рассмотренных примерах мы имели дело только с положительными числами. Если же среди чисел есть отрицательные, то следует пользоваться общими *правилами сравнения положительных и отрицательных чисел*:

- ***любое отрицательное число меньше нуля и любого положительного числа*** (например, $-100 < 0{,}01$);
- ***из двух отрицательных чисел меньше то, у которого модуль больше, т. е. то, которое на координатной прямой расположено дальше от нуля*** (например, $-1{,}5 < -0{,}5$).

Выполнение арифметических действий с рациональными числами

При выполнении действий с обыкновенными дробями руководствуются следующими правилами (они представлены в буквенном виде):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Пример 3. Найдём произведение чисел $2\frac{4}{7}$ и 35.

Чтобы воспользоваться соответствующим правилом, представим каждый из множителей в виде дроби:

$$2\frac{4}{7} \cdot 35 = \frac{18}{7} \cdot \frac{35}{1} = \frac{18 \cdot 35}{7 \cdot 1} = 18 \cdot 5 = 90.$$

Сложение, вычитание и умножение десятичных дробей сводится к соответствующему действию с натуральными числами; нужно только в результате определить положение запятой. Так, *две десятичные дроби перемножают, не обращая внимания на запятые, а затем в произведении отделяют столько знаков справа налево, сколько десятичных знаков содержится в обоих множителях вместе.* (Например, $1{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}98$.)

Иначе обстоит дело с делением десятичных дробей. Дело в том, что частное двух натуральных чисел и десятичных дробей не всегда может быть выражено конечной десятичной дробью. Поэтому, если требуется вычислить частное десятичных дробей, лучше сразу перейти к обыкновенным дробям. Это можно сделать по-разному, например:

$$0{,}5 : 0{,}3 = \frac{5}{10} : \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 10}{10 \cdot 3} = 1\frac{2}{3}; \quad \text{или:}$$

$$0{,}5 : 0{,}3 = \frac{0{,}5}{0{,}3} = \frac{0{,}5 \cdot 10}{0{,}3 \cdot 10} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Если среди чисел, с которыми требуется выполнить арифметические действия, есть и обыкновенные дроби, и десятичные, их надо привести к какой-нибудь одной из этих форм. Например, разность $0{,}6 - \frac{1}{6}$ можно вычислить только в обыкновенных дробях, а сумму $\frac{3}{4} + 0{,}4$ — как в обыкновенных, так и в десятичных.

Для выполнения действий с числами разных знаков существуют специальные правила, в каждом из них выделяются два обязательных момента: 1) способ определения знака результата; 2) способ нахождения модуля результата.

Пример 4. Вычислим произведение $-0{,}01 \cdot (-2{,}5)$.

Пользуясь правилом «минус на минус даёт плюс», получаем, что произведение должно быть положительным. Чтобы найти модуль произведения, нужно перемножить модули входящих в него чисел: $0{,}01 \cdot 2{,}5 = 0{,}025$. Таким образом, $-0{,}01 \cdot (-2{,}5) = 0{,}025$.

Пример 5. Найдём значение разности $1{,}7 - 2{,}5$:

$$1{,}7 - 2{,}5 = 1{,}7 + (-2{,}5) = -(2{,}5 + 1{,}7) = -0{,}8.$$

Решение состоит из следующих шагов:

1) заменили разность $1{,}7 - 2{,}5$ суммой $1{,}7 + (-2{,}5)$ (чтобы вычесть из одного числа другое, нужно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому);

2) поставили в результате знак «минус» (сумма двух чисел разных знаков имеет знак того слагаемого, у которого модуль больше) и записали в скобках разность модулей (чтобы найти модуль суммы двух чисел разных знаков, нужно из большего модуля вычесть меньший);

3) вычислили значение выражения в скобках.

Пример 6. Найдём значение выражения $-1{,}7 - 2{,}5$:

$$-1{,}7 - 2{,}5 = -1{,}7 + (-2{,}5) = -(2{,}5 + 1{,}7) = -4{,}2.$$

Прокомментируйте каждый шаг решения. Пользуйтесь тем, что:

- сумма двух чисел одного знака имеет тот же знак, что и слагаемые;
- модуль суммы чисел одного знака равен сумме модулей слагаемых.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Соотнесите обыкновенные дроби с десятичными.

А. $\frac{5}{8}$	Б. $\frac{3}{25}$	В. $\frac{1}{2}$	Г. $\frac{1}{50}$
1) 0,5	2) 0,02	3) 0,12	4) 0,625

2. Какие из данных дробей можно привести к знаменателю 100?

1) $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{24}{25}$ 3) $\frac{7}{12}$ 4) $\frac{8}{17}$ 5) $\frac{11}{20}$

3. Расположите в порядке убывания числа 0,072; 0,0723; 0,23.

4. В таблице приведены результаты забега на 200 м шести участников школьных соревнований.

Номер дорожки	I	II	III	IV	V	VI
Результат (в c)	30,2	27,8	24,9	28,5	24,3	27,4

По какой дорожке бежал школьник, показавший лучший результат?

1) По I 2) По V 3) По IV 4) По III

5. Какие утверждения являются неверными?

1) Дробь $\frac{9}{15}$ больше 0,5.

2) Неравенство $\frac{8}{9}<0{,}9$ верно.

3) Из чисел $\frac{3}{7}$ и 0,4 большим является 0,4.

4) Дроби $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ расположены в порядке возрастания.

5) Среди чисел $-\frac{1}{4}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$ наибольшим является $-\frac{3}{4}$.

6. Укажите наибольшее из чисел: $0{,}5$; $\frac{2}{7}$; $\frac{7}{9}$; $0{,}78$.

1) 0,5 2) $\frac{2}{7}$ 3) $\frac{7}{9}$ 4) 0,78

7. Значение какого выражения меньше 1?

1) $\frac{83}{127}+\frac{1}{2}$ 2) $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}$ 3) $0{,}455+\frac{1}{2}$ 4) $0{,}99+\frac{1}{9}$

8. Значение какой суммы больше 1?

1) 0,709 + 0,2 3) 0,527 + 0,509
2) 0,89 + 0,098 4) 0,49 + 0,495

9. Найдите значение выражения:

а) $0{,}5+\frac{1}{7}$; б) $2\frac{1}{3}-0{,}3$; в) $\frac{4}{7}\cdot 2{,}8$; г) $2\frac{1}{3}:0{,}7$.

10. Укажите номера тех вычислений, которые выполнены верно.

1) $1:\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ 3) $\frac{4}{5}+0,4=1,2$

2) $1,2\cdot\frac{2}{3}=0,8$ 4) $\frac{0,6}{1-\frac{2}{3}}=0,2$

11. Соотнесите выражения и их значения.

А. $-1,5+2,9$ Б. $-1,5-2,9$ В. $1,5-2,9$ Г. $1,5+2,9$

1) $-1,4$ 2) $1,4$ 3) $4,4$ 4) $-4,4$

12. Укажите номера тех выражений, значение которых равно -5.

1) $-4\cdot1,25+10$ 3) $4\cdot(-1,25)-10$
2) $-4\cdot(-1,25)-10$ 4) $4\cdot1,25-10$

Решения и ответы

1. А4, Б3, В1, Г2. **2.** 2 и 5. **3.** 0,23; 0,0723; 0,072. **4.** 2. **5.** 3 и 5. **6.** 4. **7.** 3. **8.** 3. *Решение.* В 1) и 2) достаточно определить первую цифру после запятой — это 9; в 4) оба слагаемых меньше 0,5, значит, их сумма меньше 1; в 3) оба слагаемых больше 0,5, значит, их сумма больше 1. **9.** а) $\frac{9}{14}$; б) $2\frac{1}{30}$; в) 1,6; г) $3\frac{1}{3}$. **10.** 2 и 3. **11.** А2, Б4, В1, Г3. **12.** 2 и 4.

1.3. Проценты

Теоретические сведения

Определение. ***Процентом от некоторой величины называется одна сотая её часть: 1% — это $\frac{1}{100}$***. Поэтому, чтобы найти 1% от некоторой величины, нужно эту величину разделить на 100. Например, 1% от 3000 р. равен 30 р.; 1% от 2 кг равен 0,02 кг.

Для того чтобы свободно пользоваться этим понятием при решении задач и выполнении процентных расчётов, нужно уметь переходить от дробей к процентам и наоборот. Выразим, например, 0,04 школьного бюджета в процентах: $0,04=\frac{4}{100}$, т. е. 0,04 — это 4%.

Можно пользоваться следующим правилом: ***чтобы часть величины, записанную десятичной дробью, выразить в процентах, надо перенести запятую на два знака вправо и приписать к полученному числу знак %:***

0,52 некоторой величины — это 52% этой величины;

0,125 некоторой величины — это 12,5% этой величины;

1,7 некоторой величины — это 170% этой величины.

Для обратного перехода запятую нужно перенести в противоположном направлении: ***чтобы часть величины, записанную в процентах, выразить десятичной дробью, надо в числе, стоящем перед знаком %, перенести запятую на два знака влево:***

32% некоторой величины — это 0,32 этой величины;
17,5% некоторой величины — это 0,175 этой величины;
150% некоторой величины — это 1,5 этой величины.

Если часть величины задана обыкновенной дробью, то, чтобы выразить эту часть в процентах, удобно записать дробь в виде десятичной (точно или приближённо). Например, $\frac{5}{8}=0{,}625$, значит, $\frac{5}{8}$ — это 62,5%.

Полезно помнить некоторые соотношения между процентами и дробями (см. таблицу). Это позволит во многих случаях упростить вычисления.

Проценты	50%	25%	75%	10%	20%
Дроби	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

Пример 1. В начале года число абонентов Интернет-компании «Север» составляло 200 тыс. человек, а в конце года их стало 210 тыс. На сколько процентов увеличилось за год число абонентов этой компании?

Решение: Сначала найдём, на сколько тысяч человек увеличилось число абонентов к концу года: 210 тыс. – 200 тыс. = 10 тыс. Теперь найдём, сколько процентов составляет эта разница от первоначального числа абонентов. Для этого узнаем, какую часть от 200 тыс. составляют 10 тыс., и выразим полученную дробь в процентах: $\frac{10}{200}=0{,}05$, т. е. число абонентов увеличилось на 5%.

Пример 2. Стоимость акции при открытии предприятия оставляла 80 р., а через пять лет её цена возросла на 30%. Какова новая цена акции?

Решение: *Способ 1.* Сначала найдём 30% от 80 р. Так как 30% — это 0,3, то надо 80 р. умножить на 0,3 и получить: $80 \cdot 0{,}3 = 24$ (р.). Новая цена акции равна $80 + 24 = 104$ (р.).

Способ 2. Первоначальную стоимость акции примем за 100%. Через пять лет её стоимость увеличилась на 30% и составила 100% + 30% = 130% первоначальной цены. Выразим 130% десятичной дробью: это 1,3. Значит, новая цена в 1,3 раза больше исходной. Умножив 80 на 1,3, получим требуемое число: $80 \cdot 1{,}3 = 104$ (р.).

Пример 3. За доставку шкафа покупатель заплатил 216 р. Сколько стоит шкаф, если стоимость доставки составляет 3% стоимости товара?

Решение: Решим эту задачу сначала арифметическим способом (по действиям), а затем алгебраическим (составим уравнение).

Способ 1. Выразим 3% дробью: 3% — это 0,03. Чтобы найти число по известной его части, выраженной дробью, надо эту часть разделить на данную дробь: $\frac{216}{0,03} = 7200$ (р.).

Способ 2. Эту же задачу можно решить, составив уравнение (такой способ для многих представляется более простым и естественным). Обозначим стоимость шкафа буквой x. Так как 0,03 этой стоимости составляет 216 р., то имеем уравнение: $0,03x = 216$, $x = \frac{216}{0,03} = 7200$. Значит, шкаф стоит 7200 р.

Задачи «на концентрацию, смеси и сплавы» удобнее решать, составляя уравнение.

Пример 4. Сколько граммов воды нужно добавить к 600 г сахарного сиропа, который содержит 20% сахара, чтобы концентрация сахара в нём составила 12%?

Решение: Сначала выясним, сколько граммов сахара содержится в 600 г сахарного сиропа. Для этого найдём 20% массы сиропа: $600 \cdot 0,2 = 120$ г. Далее будем составлять уравнение.

Пусть x г — масса добавленной воды. Тогда масса полученного сиропа составит $(600 + x)$ г, а масса сахара, содержащегося в нем, составит $0,12 \cdot (600 + x)$ г.

После добавления воды изменилась концентрация сахара в сиропе, а масса сахара не изменилась. Поэтому можно составить уравнение: $0,12 \cdot (600 + x) = 120$.

Решив его, получим, что $x = 400$. Таким образом, нужно добавить 400 г воды.

Замечание. В данной задаче при вычислении массы сахара в сиропе можно было воспользоваться тем, что 20% — это пятая часть величины, поэтому, чтобы найти 20% от 600 г, можно просто разделить 600 на 5.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Содержание витаминов группы B в таблетке составляет 7,5%. Выразите эту часть десятичной дробью.

1) 7,5 2) 0,75 3) 0,075 4) 0,0075

2. Соотнесите дроби и проценты.

А. $\frac{1}{5}$ Б. $\frac{3}{4}$ В. $\frac{7}{8}$ Г. $1\frac{1}{4}$

1) 75% 2) 125% 3) 20% 4) 87,5%

3. В двух библиотеках одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 100%, а во второй — в 1,5 раза. В какой библиотеке книг стало больше?

1) В первой библиотеке
2) Во второй библиотеке
3) Книг осталось поровну
4) Для ответа не хватает данных

4. В 9-х классах школы 79 учащихся, 45 девятиклассников поедут летом в спортивный лагерь. Сколько процентов девятиклассников поедут в спортивный лагерь? (Ответ округлите до целых.)

1) 6% 2) 18% 3) 57% 4) 176%

5. При покупке стиральной машины стоимостью 6500 р. покупатель предъявил вырезанную из газеты рекламу, дающую право на 5%-ю скидку. Сколько он заплатит за машину?

1) 325 р. 2) 3250 р. 3) 6175 р. 4) 6495 р.

6. Городской бюджет составляет 45 млн р., а расходы на одну из его статей составили 12,5%. Сколько рублей потрачено на эту статью бюджета?

1) 50 625 000 р. 3) 562 500 р.
2) 5 625 000 р. 4) 562,5 р.

7. Средний вес мальчиков того же возраста, что и Иван, равен 48 кг. Вес Ивана составляет 120% среднего веса. Сколько весит Иван?

1) 57,8 кг 2) 57,6 кг 3) 40 кг 4) 9,6 кг

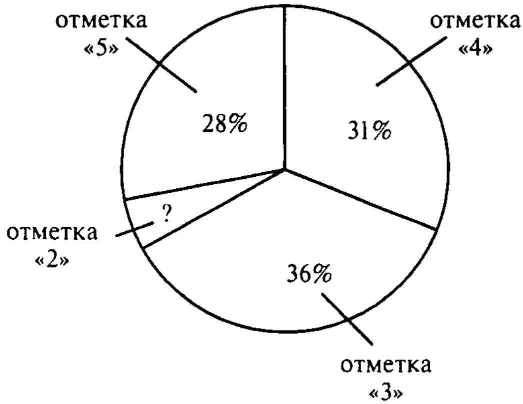
8. а) Товар на распродаже уценили на 20%, при этом он стал стоить 680 р. Сколько стоил товар до распродажи?

1) 136 р. 2) 700 р. 3) 816 р. 4) 850 р.

б) После увеличения на 20% пенсия составила 4800 р. Какой была пенсия до увеличения?

1) 5760 р. 2) 4600 р. 3) 4000 р. 4) 3840 р.

9. Результаты районной контрольной работы по алгебре в 9-м классе представили в виде диаграммы (см. с. 22). Сколько учащихся получили отметку «2», если всего работу писали 320 девятиклассников?



1) 5 учащихся
2) 16 учащихся
3) 64 учащихся
4) 160 учащихся

10. В таблице приведена стоимость работ по установке натяжных потолков.

Цвет потолка	**Цена в руб. за 1 м^2 (в зависимости от площади)**			
	до 10 м^2	**от 11 до 30 м^2**	**от 31 до 60 м^2**	**свыше 60 м^2**
Белый матовый	1050	850	700	600
Цветной матовый	1200	1000	950	850
Белый глянцевый	1370	1150	970	860
Цветной глянцевый	1570	1300	1220	1110

Для детской комнаты заказан цветной глянцевый натяжной потолок площадью 14 м^2. Сколько придётся заплатить за заказ при скидке в 10%?

11. Из объявления фирмы, проводящей обучающие семинары: «Стоимость участия в семинаре — 3000 р. с человека. Группам от организаций предоставляются скидки: от 3 до 10 человек — 5%; более 10 человек — 8%». Сколько должна заплатить организация, направившая на семинар группу из 4 человек?

1) 11 400 р. 2) 2850 р. 3) 600 р. 4) 12 000 р.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

12. При поступлении товара с оптового склада в магазин его стоимость была увеличена на 20%, а затем во время сезонной распродажи стоимость была уменьшена на 20%. Какое утверждение относительно стоимости товара верно?

1) Стоимость товара снова стала равна его оптовой стоимости.
2) После двух изменений стоимость уменьшилась на 4%.
3) После двух изменений стоимость возросла в 1,5 раза.
4) Не зная оптовой стоимости товара, ничего сказать о её последующих изменениях нельзя.

13. Сколько граммов воды надо добавить к 180 г сиропа, содержащего 25% сахара, чтобы получить сироп, концентрация которого равна 20%?

14. Клиент внёс 3000 р. на два вклада, один из которых даёт годовой доход, равный 8%, а другой — 10%. Через год на двух счетах у него было 3260 р. Какую сумму клиент внёс на каждый вклад?

15. В январе кондитерская фирма провела акцию под девизом «25% бесплатно». Во время этой акции масса печенья в упаковке была увеличена на 25%, а цена оставлена прежней. На сколько процентов подешевело печенье?

Решения и ответы

1. 3. **2.** А3, Б1, В4, Г2. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 2. **8.** а) 4; б) 3. **9.** 2. **10.** 16 380 р. **11.** 1. **12.** 2. *Решение.* Пусть стоимость товара на складе была x р., тогда его стоимость в магазине сначала составила $1{,}2x$ р., а на распродаже $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96x$ р., что составляет 96% первоначальной (оптовой) стоимости; т. е. она уменьшилась на 4%. **13.** 45 г. *Решение.* Сироп содержит 25% (или четверть) сахара, что в граммах составляет $180 : 4 = 45$ г. Эти 45 г в новом сиропе должны составлять 20% (пятую часть), значит, общая масса сиропа будет равна $45 \cdot 5 = 225$ г. Значит, воды надо добавить $225 - 180 = 45$ г. **14.** На 8%-й вклад 2000 р., на 10%-й вклад 1000 р. *Решение.* Пусть на первый вклад внесено x р., тогда на второй — $(3000 - x)$ р. Через год на первом вкладе будет $1{,}08x$ р., на втором — $1{,}1\,(3000 - x)$ р. Составим уравнение, учитывая, что всего на двух вкладах стало 3260 р.: $1{,}08x + 1{,}1\,(3000 - x) = 3260$, откуда $x = 2000$. Значит, на первый вклад внесено 2000 р., на второй $3000 - 2000 = 1000$ р. **15.** На 20%. *Решение.* Пусть упаковка печенья массой x кг стоила y р., т. е. стоимость печенья составляла $\frac{y}{x}$ р./кг. Во время проведения акции масса упаковки стала равной $1{,}25x$, а стоимость печенья $\frac{y}{1{,}25x}$ р./кг. Найдём, во сколько раз изменилась стоимость печенья: $\frac{y}{1{,}25x} : \frac{y}{x} = \frac{1}{1{,}25} = \frac{4}{5} = 0{,}8$, т. е. она уменьшилась на 20%.

1.4. Отношения. Пропорциональность величин.

Теоретические сведения

Отношение

Отношение двух чисел — это другое название их частного. ***Отношение двух положительных чисел показывает, во сколько раз одно число больше другого, или какую часть одно число составляет от другого.*** Например, в прошлом году в городской математической олимпиаде участвовало 450 учащихся, а в этом году их стало 720. Отношение числа участников этого года к числу частников прошлого года равно $\frac{720}{450}=1{,}6$, т. е. по сравнению с прошлым годом число участников математической олимпиады увеличилось в 1,6 раза. Обратное отношение числа участников прошлого года к числу участников этого года равно $\frac{5}{8}$, или 0,625, т. е. число участников в прошлом году составляло $\frac{5}{8}$ числа участников этого года.

Часто в задачах и в практике используется «невычисленное» отношение. Так, для приведённого примера можно сказать: число участников олимпиады этого года относится к числу участников прошлого года, как 720 : 450, или после «сокращения» — как 8 : 5.

Отношение одноимённых величин (длин, площадей, масс и т. д.) выражается числом. При вычислении отношения в таких случаях важно следить за тем, чтобы величины были выражены в одних и тех же единицах. Так, например, отношение 25 см к 20 м равно не 25 : 20, а 25 : 2000 = 1 : 80.

Если находится отношение разноимённых величин, то получается новая величина. Так, отношение пути ко времени — это скорость. Если путь измерен в метрах, а время в минутах, то скорость будет выражена в метрах в минуту. Например: $\frac{240\,\text{м}}{3\,\text{мин}}=\frac{240}{3}\cdot\frac{\text{м}}{\text{мин}}=80\,\text{м}/\text{мин}$.

Примером практического применения отношения величин является *масштаб*. Масштабом называют отношение длины отрезка на карте (плане, чертеже и др.) к длине соответствующего отрезка в реальности.

Масштаб обычно записывают в виде отношения, первый член которого равен 1. Если, например, на карте указан масштаб 1 : 10 000 000, то это означает, что 1 см на карте изображает 10 000 000 см на местности, т. е. 100 000 м или 100 км.

Пример 1. Расстояние между стадионом и автобусной остановкой равно 50 м. На плане это расстояние равно 2 см. Найдём масштаб плана.

Сначала выразим длины в одних единицах, например в сантиметрах, а затем найдём отношение расстояния между стадионом и остановкой на плане к соответствующему расстоянию на местности: 50 м = 5000 см; 2 : 5000 = 1: 2500. Таким образом, масштаб плана равен 1 : 2500.

Пример 2. Строительная площадка прямоугольной формы изображена на плане в масштабе 1 : 100. Стороны прямоугольника на плане равны 30 см и 40 см. Какими будут стороны прямоугольника на другом плане, масштаб которого 1 : 80?

Решение:

Способ 1. Сначала найдём реальные длины сторон площадки. Так как реальные расстояния в 100 раз больше, чем на плане, то размеры площадки соответственно равны: $30 \cdot 100 = 3000$ (см) $= 30$ (м), $40 \cdot 100 = 4000$ (см) $= 40$ (м). Теперь выясним, какими будут длины сторон площадки на плане с масштабом 1 : 80. Для этого разделим реальные размеры на 80, получим: $\frac{3000}{80} = 37{,}5$ (см), $\frac{4000}{80} = 50$ (см).

Способ 2. При замене масштаба 1 : 100 на 1 : 80 размеры объекта меняются в отношении, обратном отношению 100 : 80, т. е. в отношении 80 : 100. Найдём новые размеры, составив пропорции: $\frac{30}{a} = \frac{80}{100}$, $a = \frac{100 \cdot 30}{80}$, $a = 37{,}5$ (см); $\frac{40}{b} = \frac{80}{100}$, $b = \frac{100 \cdot 40}{80}$, $b = 50$ (см).

Деление в данном отношении

Если мы делим ту или иную величину на части, отношение которых равно заданному отношению, то говорят, что мы *делим её в данном отношении*.

Пример 3. В танцевальной студии число мальчиков относится к числу девочек, как 7 : 8. Выясним, сколько пар, каждая из которых составлена из мальчика и девочки, могут танцевать одновременно, если в студии занимается 60 человек.

Понятно, что танцевальных пар будет столько, сколько в студии мальчиков (так как их меньше). Найдём, сколько в студии мальчиков. Для этого решим простую арифметическую задачу на части. Число всех участников студии состоит из $7 + 8 = 15$ равных частей. На каждую часть приходится $60 : 15 = 4$ человека. Поэтому мальчиков в студии $4 \cdot 7 = 28$. Таким образом, одновременно могут танцевать 28 пар.

Пропорциональность

Определение. ***Две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз, другая увеличивается во столько же раз.***

Вот несколько примеров прямо пропорциональных зависимостей: при равномерном движении пройденное расстояние прямо пропорционально скорости при постоянном времени; стоимость товара при постоянной цене прямо пропорциональна его количеству; объём выполненной работы при постоянной производительности прямо пропорционален времени работы. Прямо пропорциональная зависимость между переменными выражается формулой вида $y = kx$, в которой буквами x и y обозначены переменные величины (так, в первом из приведённых примеров это скорость v и расстояние s), а k — это та величина, которая принята за постоянную (в данном случае — время t). Коэффициент k называется коэффициентом пропорциональности.

Определение. ***Две величины называют обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз, другая уменьшается во столько же раз.***

Приведём несколько примеров обратно пропорциональных зависимостей: время движения обратно пропорционально скорости при постоянном расстоянии (в случае равномерного движения); количество товара при его постоянной стоимости обратно пропорционально цене; время работы при постоянном её объёме обратно пропорционально производительности. Обратно пропорциональная зависимость между переменными выражается формулой вида $y=\frac{k}{x}$ (или в другом виде $xy = k$), где x и y — переменные величины (например, время движения t и скорость v), а k — постоянная (расстояние s).

Пример 4. Среди следующих утверждений найдём верные:

1) Площадь круга прямо пропорциональна его радиусу.
2) Величина одного из смежных углов обратно пропорциональна величине другого угла.
3) Стоимость междугороднего телефонного разговора при одной и той же его продолжительности прямо пропорциональна стоимости одной минуты разговора.
4) Скорость движения обратно пропорциональна времени движения при одном и том же расстоянии.

Верными являются утверждения 3 и 4. Действительно, опишем каждую из зависимостей формулой.

1) Формула площади круга $S = \pi R^2$. При увеличении радиуса в 2 раза площадь увеличится в 4 раза. Такая зависимость не является прямой пропорциональностью.

2) Обозначим величину одного из смежных углов (в градусах) буквой x, другой — буквой y. Зависимость y от x выражается формулой $y = 180 - x$, которая не является формулой обратной пропорциональности.

3) Обозначим буквой C стоимость разговора, буквой c стоимость одной минуты, буквой t — время разговора. Тогда зависимость C от c при постоянном значении t выражается формулой $C = tc$, которая является формулой прямой пропорциональности (здесь C — это y, c — это x, t — это k).

4) Формула пути $s = vt$. При постоянном пути произведение соответственных значений v и t постоянно, значит, эти величины обратно пропорциональны.

Пример 5. Для класса купили одинаковые тетради, заплатив за них 1200 р. Сколько пришлось бы заплатить за такое же количество тетрадей, цена которых в 1,5 раза меньше?

Так как стоимость тетрадей при постоянном их количестве пропорциональна цене одной тетради, то чтобы ответить на вопрос, надо 1200 разделить на 1,5, получим 800. Значит, за тетради придётся заплатить 800 р.

Пример 6. Велосипедист проехал расстояние между двумя пунктами за 3 ч. Скорость мотоциклиста в 6 раз больше скорости велосипедиста. За какое время мотоциклист сможет проехать это же расстояние?

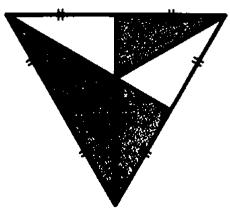
Р е ш е н и е: Найдём время, которое потребуется мотоциклисту, чтобы проехать то же расстояние, которое велосипедист проехал за 3 ч. Так как время движения обратно пропорционально скорости при одном и том же расстоянии, то мотоциклисту потребуется $\frac{3}{6}$ ч = 0,5 ч = 30 мин.

Тренировочные задания

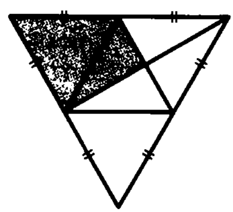
ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Соотнесите фигуру и отношение закрашенной части треугольника к незакрашенной его части.

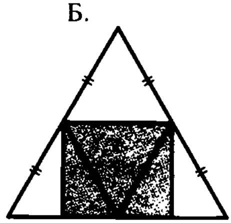
А.



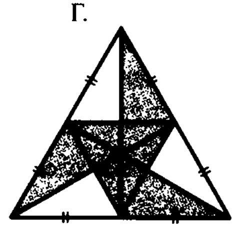
В.



Б.



Г.



1) 5 : 3 2) 3 : 5 3) 2 : 1 4) 1 : 1

2. Тест по математике содержит 30 заданий, из которых 18 заданий по алгебре, остальные — по геометрии. В каком отношении содержатся в тесте алгебраические и геометрические задания?

1) 3 : 2 2) 2 : 3 3) 3 : 5 4) 5 : 3

3. На пост председателя школьного совета претендовали два кандидата. В голосовании приняли участие 120 человек. Голоса между кандидатами распределились в отношении 3 : 5. Сколько голосов получил победитель?

1) 15 2) 24 3) 45 4) 75

4. Акции предприятия распределены между государством и частными лицами в отношении 3 : 5. Общая прибыль предприятия за год составила 32 млн р. Какая сумма из этой прибыли должна пойти на выплату частным акционерам?

1) 4 000 000 р.
2) 12 000 000 р.
3) 20 000 000 р.
4) 6 400 000 р.

5. После приёма студентов на первый курс колледжа оказалось, что число юношей относится к числу девушек, как 3 : 2. Сколько процентов первокурсников составляют девушки?

1) 20% 2) 40% 3) 50% 4) 60%

6. Для приготовления отвара из лекарственных трав взяли цветки ромашки и календулы в отношении 4 : 5. Примерно какой процент в этой смеси составляют цветки ромашки?

1) 40% 2) 44% 3) 56% 4) 80%

7. Расстояние между городами равно 600 км, а на карте — 12 см. Найдите масштаб карты.

8. Макет здания, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, выполнен в масштабе 1 : 350. Размеры макета здания: длина — 9 см, ширина — 5 см, высота — 25 см. Каковы размеры здания?

9. Среди следующих утверждений найдите верные.

1) Площадь квадрата прямо пропорциональна длине его стороны.
2) Периметр квадрата прямо пропорционален длине его стороны.
3) Длина одной из сторон прямоугольника данной площади обратно пропорциональна длине другой его стороны.
4) Величина одного из смежных углов обратно пропорциональна величине другого.

10. Коля от дома до озера идёт пешком 1 ч 40 мин. За какое время он преодолеет это расстояние на велосипеде, если его скорость при этом будет в 2,5 раза больше?

11. В каком случае величина f прямо пропорциональна величине k?

1) $f=\frac{m}{k}$ 2) $f=\frac{k}{m}$ 3) $f=m\sqrt{k}$ 4) $f=\frac{k^2}{m}$

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

12. Выразите: а) в м/мин скорость автомобиля, равную 120 км/ч; б) в м/с скорость вертолёта, равную 540 км/ч.

13. В зоопарке живут 110 чижей, ужей и ежей. Отношение числа чижей к числу ужей равно 5 : 4, а числа ужей к числу ежей равно 2 : 1. Сколько в зоопарке чижей, сколько ужей и сколько ежей?

14. Маша может набрать 10 страниц текста за 1 ч, Таня — 4 страницы за полчаса, а Оля — 3 страницы за 20 мин. Как девочкам распределить 54 страницы текста между собой, чтобы каждая работала в течение одного и того же времени?

15. Как известно, сила тока в электрической цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника (закон Ома). Напряжение увеличили на 20%. На сколько процентов надо уменьшить сопротивление, чтобы сила тока возросла на 100%?

Решения и ответы

1. А3, Б4, В2, Г1. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 1 : 5 000 000. **8.** Длина — 31,5 м, ширина — 17,5 м, высота — 87,5 м. **9.** 2 и 3. **10.** За 40 мин. *Решение.* Время обратно пропорционально скорости движения; время в пути пешком равно 100 мин, а на велосипеде в 2,5 раза меньше: 100 : 2,5 = 40 (мин). **11.** 2. **12.** а) 2000 м/мин; б) 150 м/с. *Решение.* а) 120 км/ч $=\frac{120\text{ км}}{1\text{ ч}}=\frac{120\cdot1000\text{ м}}{60\text{ мин}}=200$ м/мин. **13.** 50, 40 и 20. *Решение.* Пусть в зоопарке x ежей, тогда число ужей равно $2x$ (их в 2 раза больше, чем ежей), а чижей — $2{,}5x$ (их в 5 : 4 = 1,25 раз больше, чем ужей). Всего их 110, составим уравнение: $x + 2x + 2{,}5x = 100$, откуда $x = 20$. Это число ежей, соответственно ужей — $2\cdot20=40$, чижей — $2{,}5\cdot20=50$. **14.** Маше — 20 страниц, Тане — 16 страниц, Оле — 18 страниц. *Решение.* Сколько страниц набирает каждая из девочек за единицу времени — за 1 ч? Маша — 10, Таня — $4\cdot2=8$, Оля — $3\cdot3=9$. Составим отношение: 10 : 8 : 9. Всего за час они наберут $10 + 8 + 9 = 27$ страниц, значит, на одну часть приходится 54 : 27 = 2 страницы. Следовательно, распределить страницы они должны так: Маше — $10\cdot2=20$ страниц, Тане — $8\cdot2=16$ страниц, Оле — $9 \cdot 2 = 18$ страниц. **15.** На 40%. *Решение.* $I = \frac{U}{R}$. Напряжение увеличили в 1,2 раза, а сила тока, прямо пропорциональная напряжению, должна возрасти в 2 раза. Значит, в x раз надо изменить сопротивление: $\frac{1{,}2}{x} = 2$, $x = 0{,}6$. Это означает, что сопротивление надо уменьшить на 40%.

1.5. Степени и корни

Теоретические сведения

Степень с целым показателем

Степенью называют выражение вида a^n, где a и n — некоторые числа; a — называют *основанием степени*, n — *показателем степени*. Смысл выражения a^n для различных значений n раскрывает следующее определение:

- **если n — натуральное число, большее 1, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$;**
- **полагают $a^1 = a$; $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$);**
- **если n — целое отрицательное число и $a \neq 0$, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.**

Например: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$.

Обратите внимание: если показатель степени n — натуральное число, то основанием может быть любое число — положительное, отрицательное, 0; если показатель равен 0 или является целым отрицательным числом, то основанием степени может быть любое число, кроме 0. Такие выражения, как 0^{-5}, 0^0, смысла не имеют.

Значение степени с положительным основанием также есть число положительное. А при возведении в степень отрицательного числа в результате может получиться как положительное число, так и отрицательное. Это зависит от того, чётным или нечётным является показатель степени. Например: $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} > 0$; $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} < 0$.

Степень с отрицательным основанием положительна, если показатель степени — число чётное, и отрицательна, если показатель степени — число нечётное.

На рисунке 1.1 изображены графики функций $y = x$, $y = x^2$ и $y = x^3$ для $x \geqslant 0$. Этот рисунок иллюстрирует следующее свойство степени: *если* $x > 1$, то $x < x^2 < x^3$; если $0 < x < 1$, то $x > x^2 > x^3$.

Если основание степени больше 1, то с увеличением показателя степень увеличивается; если основание степени — положительное число, меньшее 1, то с увеличением показателя степень уменьшается.

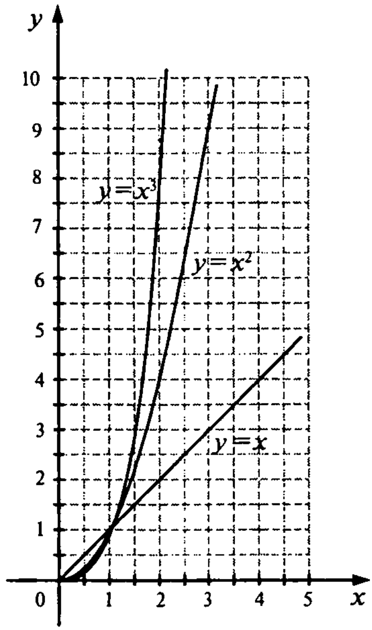


Рис. 1.1.

Пример 1. Расположим в порядке возрастания числа:

$1{,}2;\ -1{,}2;\ (-1{,}2)^2;\ (-1{,}2)^3;\ -1{,}2^2.$

Сначала в двух случаях избавимся от скобок: $(-1{,}2)^2 = 1{,}2^2$ и $(-1{,}2)^3 = -1{,}2^3$. Теперь упорядочим отрицательные числа $-1{,}2$, $-1{,}2^3$, $-1{,}2^2$. Так как $1{,}2 < 1{,}2^2 < 1{,}2^3$, то $-1{,}2 > -1{,}2^2 > -1{,}2^3$, т. е. $-1{,}2^3 < -1{,}2^2 < -1{,}2$. Далее сравним положительные числа $1{,}2$ и $1{,}2^2$. Имеем: $1{,}2 < 1{,}2^2$. Окончательно получим:

$$-1{,}2^3 < -1{,}2^2 < -1{,}2 < 1{,}2 < 1{,}2^2,\ \text{т. е. } (-1{,}2)^3 < -1{,}2^2 < -1{,}2 < 1{,}2 < (-1{,}2)^2.$$

Стандартный вид числа

Определение. **Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число.** Показатель степени n называют *порядком* числа.

Например, масса Земли и масса атома водорода, записанные в стандартном виде, соответственно равны $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг и $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Числа, записанные в стандартном виде, легко сравнивать: если порядки чисел различны, то большим является то из них, порядок которого выше; если же порядки одинаковы, то большим является то из них, у которого множитель a больше.

Пример 2. Известны расстояния до Солнца трёх планет Солнечной системы: Венеры — $1{,}082 \cdot 10^8$ км, Марса — $2{,}280 \cdot 10^8$ км, Меркурия — $5{,}790 \cdot 10^7$. Какая из этих планет ближе всех к Солнцу, а какая — дальше всех?

Р е ш е н и е: У числа $5{,}790 \cdot 10^7$ порядок самый низкий, значит, ближе всего к Солнцу находится Меркурий. У чисел $1{,}082 \cdot 10^8$ и $2{,}280 \cdot 10^8$ порядки одинаковы, однако множитель 2,280 больше 1,082. Значит, дальше всех от Солнца из этих планет находится Марс.

Квадратный корень

О п р е д е л е н и е. **Число b называют квадратным корнем из числа a, если $b^2 = a$.**

Если a — положительное число, то существуют два квадратных корня из a. Эти корни — числа противоположные. Так, для $a = 36$ квадратные корни — числа 6 и -6; в самом деле, $(-6)^2 = 36$ и $6^2 = 36$. Квадратный корень из нуля равен нулю. Квадратный корень из отрицательного числа не существует; так как нет такого числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.

Неотрицательный квадратный корень из числа a называют *арифметическим квадратным корнем из a*. Иными словами: **арифметический квадратный корень из числа a — это неотрицательное число, квадрат которого равен a**; обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называют *знаком квадратного корня* или *радикалом*; число a — *подкоренным числом*. Число, противоположное арифметическому квадратному корню из a, обозначают $-\sqrt{a}$. Таким образом, квадратные корни из положительного числа a записывают как $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$.

На рисунке 1.2 изображён график функции $y = x^2$ и проведена горизонтальная прямая $y = a$ ($a > 0$). Прямая пересекает параболу в двух точках. Абсциссы точек пересечения — это противоположные числа, квадраты которых равны a, т. е. $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$.

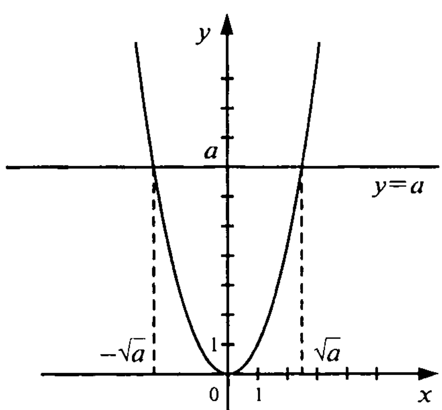


Рис. 1.2.

Из определения арифметического квадратного корня следует, что, например, $\sqrt{100} = 10$: число 10 — неотрицательное и $10^2 = 100$. А вот записать, что $\sqrt{100} = -10$ было бы неверно, так как одно из условий определения арифметического квадратного корня в этом случае нарушено. Очевидно, что $\sqrt{0} = 0$. Кроме того, необходимо помнить, что такие выражения, как $\sqrt{-100}$ смысла не имеют: квадратный корень из отрицательного числа не существует. Вообще, *выражение* $\sqrt{a}$ *имеет смысл при* $a \geqslant 0$.

Пример 3. Найдём значение выражения $\sqrt{23{,}04}$. Воспользовавшись таблицей квадратов, найдём, что $2304 = 48^2$. Значит, $\sqrt{23{,}04} = \sqrt{4{,}8^2} = 4{,}8$.

В рассмотренном примере мы заменили выражение $\sqrt{23{,}04}$ его значением — числом 4,8, или, как говорят, *извлекли квадратный корень* из 23,04. Однако извлечь точно квадратный корень удаётся далеко не всегда. Так, вам известно, что нет ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равен 2, т. е. выражение $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде рационального числа. Оно относится к множеству так называемых *иррациональных* чисел.

Чисел, обладающих таким же свойством, очень много даже среди натуральных. Все их можно получить, если из натурального ряда исключить квадраты целых чисел. Тогда останутся числа, при извлечении квадратных корней из которых получаются иррациональные числа:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \ldots.$$

Квадраты этих чисел соответственно равны 2, 3, 5, 6 и т. д.

$$(\sqrt{2})^2 = 2, (\sqrt{3})^2 = 3, (\sqrt{5})^2 = 5, (\sqrt{6})^2 = 6, \ldots.$$

И вообще, если положительное число a не является квадратом натурального или дробного числа, то $\sqrt{a}$ — число иррациональное.

На практике иррациональные квадратные корни заменяют их *десятичными приближениями*.

Пример 4. Квадрат, площадь которого равна 36 см^2, вписан в круг (рис. 1.3). Найдём радиус круга.

Сторона квадрата равна 6 см. По теореме Пифагора $(2r)^2 = 6^2 + 6^2$, т. е. $r^2 = 18$, $r = \sqrt{18}$.

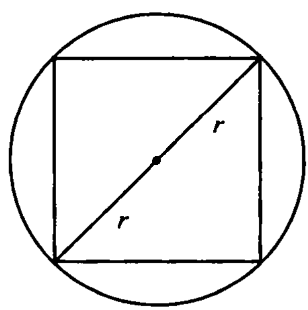


Рис. 1.3.

Мы нашли точное значение радиуса круга, он равен $\sqrt{18}$ см. Для наглядности выразим радиус приближённо десятичной дробью с одним знаком после запятой, т. е. найдём десятичное приближение $\sqrt{18}$ с точностью до десятых. Для этого сначала оценим $\sqrt{18}$ двумя последовательными целыми числами. Так как $4^2 < 18 < 5^2$, то $4 < \sqrt{18} < 5$. Числа 4 и 5 — приближённые значения соответственно с недостатком и с избытком с точностью до единицы.

Чтобы получить следующее приближение $\sqrt{18}$ будем последовательно возводить в квадрат числа: 4,1; 4,2; 4,3, ... , пока не получим число, большее 18: $4{,}1^2 = 16{,}81$; $4{,}2^2 = 17{,}64$; $4{,}3^2 = 18{,}49$. Так как $4{,}2^2 < 18 < 4{,}3^2$, то $4{,}2 < \sqrt{18} < 4{,}3$. Числа 4,2 и 4,3 — приближённые значения $\sqrt{18}$ соответственно с недостатком и с избытком с точностью до 0,1.

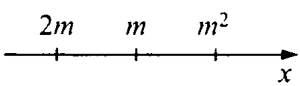
Чтобы узнать, какое из чисел 4,2 и 4,3 ближе к числу $\sqrt{18}$, сравним $\sqrt{18}$ и 4,25 — координату середины отрезка между числами 4,2 и 4,3. Имеем: $4{,}25^2 = 18{,}0625 > 18$, значит, число $\sqrt{18}$ ближе к 4,2. Таким образом, $\sqrt{18} \approx 4{,}2$, и с точностью до десятых $r \approx 4{,}2$ см.

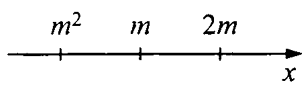
Важно уметь быстро оценивать иррациональные корни целыми числами. Полезно помнить приближённые значения некоторых часто встречающихся корней, например: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2$.

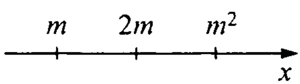
Тренировочные задания

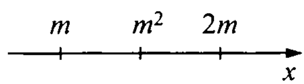
ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Известно, что число m — отрицательное. На каком из рисунков точки с координатами m, $2m$, m^2 расположены на координатной прямой в правильном порядке?

1) 

3) 

2) 

4) 

2. Расположите в порядке возрастания числа:

$-1{,}5$; $(-1{,}5)^2$; $(-1{,}5)^3$; $-1{,}5^4$.

3. Расположите в порядке убывания числа: $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

4. Вычислите:

а) $-10 \cdot (-0,3)^2$; б) $(-5)^2 \cdot (-0,2)^3$; в) $(-4)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5$.

5. Укажите число, равное 3 900 000 000.

1) $3,9 \cdot 10^{10}$ 2) $3,9 \cdot 10^9$ 3) $3,9 \cdot 10^8$ 4) $3,9 \cdot 10^7$

6. Укажите число, равное 0,00056.

1) $5,6 \cdot 10^{-3}$ 2) $5,6 \cdot 10^{-4}$ 3) $5,6 \cdot 10^{-5}$ 4) $5,6 \cdot 10^{-6}$

7. Площадь территории США составляет $9,6 \cdot 10^6$ км^2, а Руанды — $2,6 \cdot 10^4$ км^2. Во сколько раз площадь территории США больше, чем площадь Руанды?

1) Примерно в 370 раз
2) Примерно в 37 раз
3) Примерно в 3,7 раза
4) Примерно в 27 раз

8. Масса Луны равна $7,35 \cdot 10^{22}$ кг. Выразите массу Луны в млн тонн.

1) $7,35 \cdot 10^{10}$ млн т
2) $7,35 \cdot 10^{13}$ млн т
3) $7,35 \cdot 10^{16}$ млн т
4) $7,35 \cdot 10^{19}$ млн т

9. Размер молекулы белка альбумина составляет $4,3 \cdot 10^{-4}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

1) 0,0000043 мм 2) 0,000043 мм 3) 0,00043 мм 4) 0,0043 мм

10. Какое из данных чисел не входит в область определения выражения $\sqrt{6-x}$?

1) -2 2) 0 3) 6 4) 8

11. Вычислите: а) $\sqrt{1,69}$; б) $\sqrt{0,0009}$; в) $\sqrt{0,0256}$.

12. Какому из промежутков принадлежит число $\sqrt{7}$?

1) [1,5; 2] 2) [2; 2,5] 3) [2,5; 3] 4) [3; 3,5]

13. Какое из чисел является лучшим приближением числа $\sqrt{11}$?

1) 3,1 2) 3,2 3) 3,3 4) 3,4

14. Какие целые числа заключены между числами $\sqrt{40}$ и $\sqrt{70}$?

1) 41, 42..., 69 2) 6, 7, 8, 9 3) 6, 7 и 8 4) 7 и 8

15. Какое из чисел $\sqrt{121000}$, $\sqrt{0,9}$, $\sqrt{4\frac{1}{25}}$ не является иррациональным?

1) $\sqrt{121000}$ 2) $\sqrt{0,9}$ 3) $\sqrt{4\frac{1}{25}}$ 4) Таких чисел здесь нет

16. Какое из чисел $\sqrt{14,4}$, $\sqrt{0,4}$, $\sqrt{11\frac{1}{9}}$ является рациональным?

1) $\sqrt{14,4}$ 2) $\sqrt{0,4}$ 3) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$ 4) Таких чисел здесь нет

17. Площадь прямоугольного равнобедренного треугольника равна 5. Чему равна его сторона?

Решения и ответы

1. 1. **2.** $-1,5^4$; $(-1,5)^3$; $-1,5$; $(-1,5)^2$. **3.** $\frac{1}{2}; \left(-\frac{1}{2}\right)^2; \left(-\frac{1}{2}\right)^3; -\frac{1}{2}$. **4.** а) $-0,9$; б) $-0,2$; в) 2. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 1. *Решение.* $\frac{9,6\cdot 10^6}{2,6\cdot 10^4} = \frac{9600}{26} \approx 370$. **8.** 2. *Решение.* $7,35\cdot 10^{22}$ кг $= 7,35\cdot 10^{19}$ т $= 7,35\cdot 10^{13}\cdot 10^6$ т $= 7,35\cdot 10^{13}$ млн т. **9.** 4. **10.** 4. **11.** а) 1,3; б) 0,03; в) 0,16. **12.** 3. **13.** 3. **14.** 4. **15.** 4. **16.** 3. **17.** $\sqrt{10}$.

1.6. Действительные числа

Теоретические сведении

Множество действительных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, ... , употребляемые при счёте предметов, называют *натуральными числами*; множество натуральных чисел обозначают буквой N. Сумма и произведение двух натуральных чисел также являются числами натуральными. Однако, оставаясь в пределах множества натуральных чисел, вычитание и деление удаётся выполнить не всегда.

Натуральные числа 1,2, 3, 4, ... , противоположные им отрицательные числа -1, -2, -3, -4, ... и число 0 составляют множество *целых чисел*, его обозначают буквой Z. В множестве целых чисел выполнимы уже три действия — сложение, вычитание, умножение. Однако частное двух целых чисел чаще всего целым числом не является.

Дробные числа, как и целые, могут быть и положительными, и отрицательными. Вместе целые и дробные числа составляют *множество рациональных чисел*; его обозначают буквой Q. *Всякое рациональное число* *можно представить в виде отношения двух целых чисел.* Например, $0{,}4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$; $15=\frac{15}{1}$; $-3\frac{1}{3}=\frac{-10}{3}$.

В множестве рациональных чисел выполняются все четыре арифметических действия: сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел (кроме деления на 0) есть число рациональное.

Существуют числа, не являющиеся рациональными. Так, длину диагонали квадрата, сторона которого равна 1, нельзя точно выразить ни целым, ни дробным числом, она является числом *иррациональным* и обозначается символом $\sqrt{2}$. Иррациональными, например, являются все квадратные корни из натуральных чисел, не являющихся точными квадратами ($\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ и т. д.); их многие арифметические комбинации ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$ и т. д.); число π, выражающее отношение длины окружности к её диаметру.

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют *множество действительных чисел*: рациональные числа — это такие действительные числа, которые можно записать в виде отношения $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, а иррациональные — это действительные числа, которые в таком виде представить нельзя. Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$.

Вся практическая деятельность человека, связанная с измерениями, обеспечивается действительными числами. Именно они используются для измерения реальных, прежде всего геометрических и физических величин — длин, площадей, объёмов, скоростей, масс, сил и т. д. Благодаря введению иррациональных чисел можно говорить не только о точной длине любого отрезка, но и о точной массе любого тела, точной скорости движения и т.п.

Используя обозначения числовых множеств, а также знаки *принадлежности* $\in$ и *включения* $\subset$, можно кратко записывать некоторые часто употребляемые выражения математического языка. Например, запись $2 \in \boldsymbol{N}$ означает: «Число 2 принадлежит множеству натуральных чисел» или «2 — число натуральное». А запись $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$ читается так: «число $\sqrt{2}$ не является рациональным». Тот факт, что множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ включается в множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$, на символическом языке записывается следующим образом: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$. Прочитать это можно ещё и так: «всякое натуральное число является числом целым». Указанное соотношение между множествами натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ и целых чисел $\boldsymbol{Z}$ проиллюстрировано на рисунке 1.4. Вы видите, что круг $\boldsymbol{N}$ целиком расположен внутри круга $\boldsymbol{Z}$.

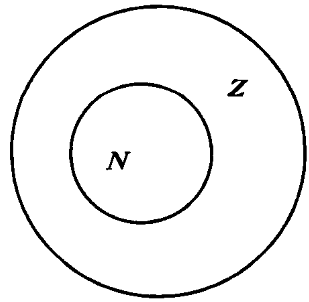


Рис. 1.4.

Десятичные представления действительных чисел

Общим обозначением для всех рациональных чисел является дробь $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Существует общий способ представления и для действительных чисел, и связан он с десятичной записью.

Некоторые дробные числа могут быть записаны в виде конечных десятичных дробей. Например: $\frac{9}{20}=0{,}45$; $-2\frac{13}{40}=-2{,}325$; $11\frac{7}{16}=11{,}4375$. Чтобы получить эти десятичные дроби, достаточно в каждом случае разделить числитель дроби на знаменатель. Если же возьмём, например, дробь $\frac{5}{11}$, которую нельзя представить в виде конечной десятичной дроби, и будем делить её числитель на знаменатель, то этот процесс никогда не закончится и в частном возникнет запись 0,454545... , т.е. $\frac{5}{11}=0{,}454545...$ Такую запись называют *бесконечной десятичной дробью*. Многоточие здесь означает, что, продолжая деление, мы можем, в принципе, узнать любую цифру частного.

Всякое дробное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной десятичной дроби. Однако к любой конечной десятичной дроби и к любому целому числу можно приписать справа «хвост» из бесконечной последовательности нулей (например: 0,38 = 0,380000..., 54 = 54,00000), поэтому можно считать, что *любое рациональное число изображается бесконечной десятичной дробью.*

Всякое иррациональное число также изображается бесконечной десятичной дробью. Возьмём, например, число $\sqrt{2}$. Находя приближённые значения $\sqrt{2}$ с недостатком с точностью до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001 и т. д., будем получать последовательность десятичных дробей, которую можно продолжать бесконечно: 1; 1,4; 1,414; 1,4142; ... . В результате мы будем находить всё новые и новые цифры бесконечной десятичной дроби, которую и считают десятичной записью числа $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}=1{,}4142...$.

Любое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби. Верно и обратное: ***всякая бесконечная десятичная дробь представляет некоторое действительное число***.

Положительные действительные числа, записанные в виде бесконечных десятичных дробей, как и конечные десятичные дроби, сравнивают поразрядно. Например: $1{,}023023... < 1{,}023024$.

(Заметим, что распространение этого правила на бесконечные десятичные дроби приводит к тому, что из рассмотрения приходится исключить дроби, в которых, начиная с некоторого разряда, содержится только цифра 9: например, такие, как 0,59999... .)

Пример 1. Сравним числа $\frac{3}{7}$ и 0,428.

Представим с помощью деления уголком число $\frac{3}{7}$ в виде бесконечной десятичной дроби, вычислив столько её знаков, сколько необходимо для получения ответа. Так как $\frac{3}{7}=0{,}428...$, то $\frac{3}{7}>0{,}428$. (Цифру разряда десятитысячных вычислять необходимости нет, так как само наличие разрядов, следующих за тысячными, говорит о том, что бесконечная десятичная дробь 0,428... больше конечной десятичной дроби 0,428.)

Изображение действительных чисел точками на координатной прямой

Каждое рациональное число можно изобразить геометрически — точкой на координатной прямой, при этом число называют *координатой* соответствующей точки. Если представить себе, что все рациональные числа нанесены на координатную прямую, то некоторые точки прямой окажутся свободными, не имеющими координат. Отложим, например, от начальной точки O на координатной прямой отрезок OA — диагональ квадрата со стороной 1 (рис. 1.5). Как вы знаете, длина этого отрезка не выражается рациональным числом, поэтому точки A не будет среди отмеченных.

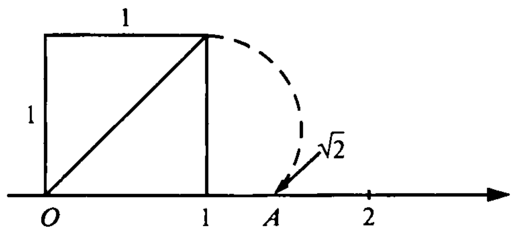


Рис. 1.5.

А действительных чисел уже достаточно, чтобы заполнить всю координатную прямую. ***Каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число***, и наоборот: ***каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой***. Как говорят, между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Пример 2. На координатной прямой точками A, B, C и D (рис. 1.6) отмечены числа: $\frac{3}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ и $\sqrt{18}$. Установим соответствие между данными числами и отмеченными точками.

Очевидно, что точке A соответствует дробь $\frac{3}{2}$, равная 1,5, а точке B — число π, которое примерно равно 3,14. Зная, что $\pi \approx 3{,}14$, можно подсчитать, что $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7$, т. е. $\frac{3\pi}{2} > 4{,}5$, значит, числу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка D, которая расположена в правой части отрезка между числами 4 и 5. Убедимся, что числу $\sqrt{18}$ соответствует точка, расположенная в левой части этого отрезка. Для этого сравним $\sqrt{18}$ и 4,5. Так как $\left(\sqrt{18}\right)^2 = 18$, а $4{,}5^2 = 20{,}25$, то $\sqrt{18} < 4{,}5$. Значит, числу $\sqrt{18}$ соответствует точка C.

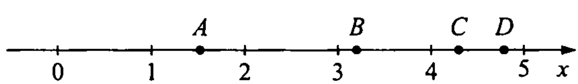


Рис. 1.6.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Выберите верные утверждения.

1) Всякое натуральное число является целым.
2) Всякое рациональное число является дробным.
3) Не всякое иррациональное число является действительным.
4) Не всякое рациональное число является целым.

2. Какое из данных утверждений является верным?

1) Из чисел $\frac{4}{7}$ и 0,4 большим является 0,4.
2) Дробь $\frac{7}{30}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби.
3) Дробь $\frac{4}{3}$ принадлежит промежутку [3; 4].
4) При обращении дроби $\frac{5}{8}$ в десятичную получается 0,625.

3. В каком случае числа 0,0303; 0,03333 и 0,3 записаны в порядке убывания?

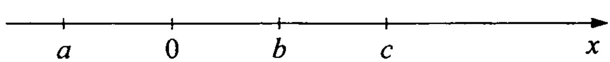
1) 0,0303; 0,03333; 0,3
2) 0,03333; 0,0303; 0,3
3) 0,3; 0,0303; 0,03333
4) 0,3; 0,03333; 0,0303

4. Сравните числа: а) $\frac{5}{7}$ и 0,713; б) $\frac{2}{9}$ и 0,2229.

5. Какую из данных дробей нельзя представить в виде конечной десятичной дроби?

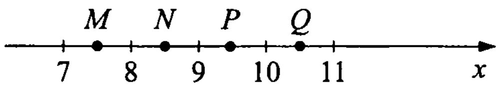
1) $\frac{11}{25}$ 2) $\frac{15}{8}$ 3) $\frac{39}{40}$ 4) $\frac{4}{15}$

6. На координатной прямой отмечены числа a, b и c. Какое из утверждений **не**верно?



1) $ab < 0$
2) $b - c < 0$
3) $b - a < 0$
4) $abc < 0$

7. Одна из отмеченных на координатной прямой точек M, N, P, Q соответствует числу $\sqrt{91}$. Какая это точка?



1) точка M
2) точка N
3) точка P
4) точка Q

8. При каком значении m значение выражения $\sqrt{12-m}$ является числом иррациональным?

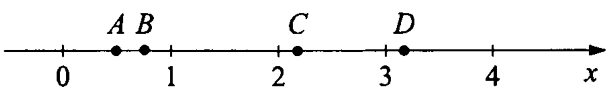
1) 16 2) 12 3) 9 4) –4

9. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{2}{9}$?

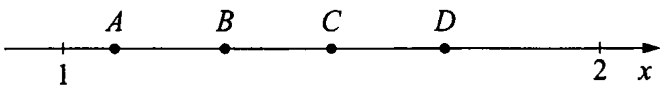
1) $[0{,}1; 0{,}2]$ 2) $[0{,}2; 0{,}3]$ 3) $[0{,}3; 0{,}4]$ 4) $[0{,}4; 0{,}5]$

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

10. Установите соответствие между данными числами и точками, отмеченными на координатной прямой:



а) $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}$, π, $\frac{\sqrt{2}}{3}$.



б) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt{1{,}69}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$.

11. Найдите приближённое значение $\sqrt{19}$ с точностью до десятых.

12. Сравните числа: $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ и 5.

13. Найдите какое-нибудь рациональное число, заключённое между числами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2{,}5}$.

Решения и ответы

1. 1 и 4. **2.** 4. **3.** 4. **4.** а) $\frac{5}{7} > 0{,}713$; б) $\frac{2}{9} < 0{,}2229$. **5.** 4. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 3. **9.** 2. **10.** а) $A\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, $B\left(\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{2}{3}\pi\right)$, $D(\pi)$; б) $A\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $B\left(\sqrt{1{,}69}\right)$, $C\left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)$, $D\left(\sqrt{3}\right)$. **11.** 4,4. **12.** $\sqrt{5}+\sqrt{7}<5$. *Решение.* Запишем какое-либо неравенство, связывающее эти числа, например: $\sqrt{5}+\sqrt{7} > 5$. Возведём обе части неравенства в квадрат, получим: $\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2 = 5+2\sqrt{35}+7 = 12+2\sqrt{35}$; $12+2\sqrt{35} > 25$. «Уединим» радикал, перенеся число 12 с противоположным знаком в правую часть: $2\sqrt{35} > 13$. Возведём обе части неравенства в квадрат, получим: $140 > 169$. Так как полученное неравенство неверно, то неверно и исходное. Следовательно, $\sqrt{5}+\sqrt{7} < 5$. **13.** Например, 1,5. *Решение.* $\sqrt{2} < \sqrt{2{,}25} < \sqrt{2{,}5}$; $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$.

§ 2. Алгебраические выражения и их преобразования

Что надо знать и уметь:

- понимать и использовать термины «выражение», «значение выражения», «область определения выражения»; распознавать целые и дробные выражения, рациональные и не являющиеся рациональными; находить область определения рационального выражения и выражения, содержащего переменную под знаком корня; вычислять значение выражения с переменными (рационального, простейшего иррационального) при указанных значениях переменных;
- выполнять работу с формулами: вычислять по формулам; выражать из формулы одну величину через другие; составлять формулы (или буквенные выражения) по условиям, описанным в задаче, заданным рисунком;
- понимать и использовать термины «тождество», «тождественно равные выражения»; распознавать тождественно равные выражения, опираясь на основные тождества и правила преобразования выражений; доказывать тождества;
- выполнять преобразования выражений, содержащих степени с натуральными и отрицательными целыми показателями;
- выполнять преобразования целых и дробных выражений, применяя правила действий над многочленами и дробями;
- выполнять разложение многочленов на множители, используя вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращённого умножения, а также комбинацию указанных приёмов; раскладывать на множители квадратный трёхчлен;
- выполнять преобразования числовых выражений, содержащих квадратные корни.

2.1. Алгебраические выражения

Теоретические сведения

Виды алгебраических выражений

Алгебраические выражения составляют из чисел и букв (переменных) с помощью скобок и знаков действий. (Числа и буквы — это исходные простейшие алгебраические выражения.) Если в алгебраическом выражении содержатся только арифметические действия — сложение, вычитание, умножение и деление, то его называют **рациональным выражением**. (Рациональное выражение может, в частности, содержать и степень с натуральным или целым отрицательным показателем.) Если же в алгебраическом выражении хотя бы одна буква (переменная) находится под знаком квадратного корня, то его относят к так называемым **иррациональным выражениям**. В курсе алгебры вы изучали рациональные выражения, а иррациональные выражения будут подробно рассматриваться в старших классах. Но тем не менее уже сейчас следует различать такие выражения, как, например, $\sqrt{10}+x$ и $10+\sqrt{x}$. Первое из них — рациональное, а второе рациональным не является.

Рациональное выражение, в котором отсутствует деление на буквенное выражение, называют **целым выражением**. В противном случае такое рациональное выражение называют **дробным**. Например: $\frac{3ab}{4}$, $(a^3b^2)^5$, $2a^4 - 5a^2b$, $(a + b - c)(a - b + c)$ — целые выражения, $\frac{3b}{4a}$, $a^{-2}+10b$, $\frac{ab}{a^2-b^2}$, $\frac{1}{a}+ac$ — дробные выражения.

Область определения алгебраического выражения

В выражение вместо переменных можно подставлять числа. При этом необходимо следить за тем, чтобы не прийти к невыполнимой операции — к делению на нуль или к извлечению квадратного корня из отрицательного числа. Так, выражение $\frac{2}{a-1}$ становится бессмысленным при $a = 1$, а выражение $\sqrt{c}$ теряет смысл при любом отрицательном c.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми*. ***Множество всех допустимых значений переменных называют областью определения выражений.***

Следует помнить:

- целое выражение определено при любых значениях входящих в него переменных;
- чтобы найти область определения дробного выражения, надо из множества всех действительных чисел исключить те значения переменных, при которых обращаются в нуль содержащиеся в выражении делители;
- если переменная содержится под знаком квадратного корня, то следует учитывать, что квадратного корня из отрицательного числа не существует.

Пример 1. Найдём область определения дроби $\frac{x-1}{(2x-1)(x+3)}$.

Чтобы найти значения переменной, при которых обращается в нуль знаменатель данной дроби, нужно решить уравнение $(2x - 1)(x + 3) = 0$. Этому уравнению удовлетворяют те значения x, при которых $2x - 1 = 0$ или $x + 3 = 0$. Получаем: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = -3$. Таким образом, знаменатель дроби $\frac{x-1}{(2x-1)(x+3)}$ обращается в нуль при $x = 0{,}5$ и $x = -3$. Эти значения переменной и надо исключить из множества всех действительных чисел.

Ответ: $x \neq 0{,}5$ и $x \neq -3$. (Ответ можно записать с использованием теоретико-множественной символики: $(-\infty; -3) \cup (-3; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$).

Пример 2. Найдём область определения дроби $\frac{2x}{x^2+x+1}$.

Уравнение $x^2+x+1=0$ корней не имеет, значит, у дроби $\frac{2x}{x^2+x+1}$ недопустимых значений x нет. Иными словами, допустимыми являются любые значения переменной x.

Ответ: x — любое число. (Или иначе: $(-\infty;\ +\infty)$).

Пример 3. Найдём область определения выражения $\frac{x+y}{x-y}$.

Знаменатель дроби $\frac{x+y}{x-y}$ обращается в нуль при $x=y$. Значит, областью определения выражения $\frac{x+y}{x-y}$ служит множество всех пар значений x и y таких, что $x \neq y$.

Ответ: $x \neq y$.

Обратите внимание: находя область определения рационального выражения, мы сначала выясняли, какие значения переменных ***не являются*** допустимыми, а затем все остальные значения объявляли допустимыми. Для записи допустимых значений переменных использовался знак $\neq$ (не равно). А если бы в примере 1 была поставлена задача нахождения значений переменных, при которых выражение ***не определено***, то решение выглядело бы так же, но в ответе нужно было бы записать равенства $x=0{,}5$ и $x=-3$.

Пример 4. Найдём область определения выражения $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}$.

Данное выражение имеет смысл в том и только в том случае, когда имеют смысл оба слагаемых, т. е. когда выполняются сразу два неравенства $x-2 \geqslant 0$ и $x+2 \geqslant 0$. Решив систему неравенств $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ x+2 \geqslant 0, \end{cases}$ найдём, что $x \geqslant 2$.

Ответ: $x \geqslant 2$. (Или иначе: $[2;\ +\infty)$).

Числовое значение алгебраического выражения

Если в алгебраическое выражение вместо переменных подставить числа из области определения этого выражения и выполнить все указанные в нём действия, то получится число, которое называют **значением выражения при данных значениях входящих в него переменных**. Важно аккуратно и правильно выполнять числовые подстановки, а именно:

- одинаковые буквы заменять одним и тем же числом;
- при подстановке отрицательного числа при необходимости заключать это число в скобки;
- в получившемся числовом выражении «восстанавливать», где это необходимо, знак умножения.

Пример 5. Найдём значение выражения $\frac{xyz}{x+y-z}$ при $x=4$, $y=-2$, $z=-8$. Выполнив подстановку, получим:

$$\frac{xyz}{x+y-z}=\frac{4\cdot(-2)\cdot(-8)}{4+(-2)-(-8)}=\frac{64}{4-2+8}=\frac{64}{10}=6{,}4.$$

Часто приходится решать и обратную задачу: находить значения переменных, при которых выражение принимает указанное значение. Такая задача в общем случае сводится к решению уравнения.

Пример 6. Выясним, может ли выражение $\frac{2x}{x-4}$ принимать значение: а) равное 10; б) равное 2.

Задача а) сводится к решению уравнения $\frac{2x}{x-4}=10$. Получим: $2x=10x-40$, $x=5$. В задаче б) имеем уравнение $\frac{2x}{x-4}=2$, откуда $2x = 2x - 8$. Очевидно, что значения переменной x, при котором выражения $2x$ и $2x - 8$ принимают одно и тоже значение, не существует. Таким образом, уравнение $\frac{2x}{x-4}=2$ корней не имеет.

Ответ: а) да; при $x = 5$; б) нет.

Пример 7. Дано выражение $\frac{7}{n+4}$. При каких значениях переменной n это выражение принимает целые значения?

Решение: Значение дроби $\frac{7}{n+4}$ будет целым числом при тех и только тех значениях n, при которых числитель дроби кратен её знаменателю. Число 7 имеет четыре делителя: 1, -1, 7, -7. Решив уравнения $n + 4 = 1$, $n + 4 = -1$, $n + 4 = 7$, $n + 4 = -7$, найдём четыре значения n, а именно: $n = -3$, $n = -5$, $n = 3$, $n = -11$.

Ответ: при $n = \pm 3$, $n = -5$, $n = -11$.

Пример 8. Найдём наименьшее значение выражения $(a - 6)^2 + (b + 4)^2 + 10$ и определим, при каких значениях a и b оно достигается.

Решение: Каждое из выражений $(a - 6)^2$ и $(b + 4)^2$ принимает только неотрицательные значения. Значит, сумма $(a - 6)^2 + (b + 4)^2 + 10$ принимает наименьшее значение в том и только в том случае, когда первые два слагаемых одновременно обращаются в нуль.

Ответ: 10; при $a = 6$ и $b = -4$.

Пример 9. Известно, что выражение $\frac{7a+5c}{a}$ при некоторых значениях переменных a и c принимает значение, равное 8. Найдём значение выражения $\frac{5a+7c}{c}$ при тех же значениях a и c.

Решение: Дано, что $\frac{7a+5c}{a}=8$. По определению частного, $7a + 5c = 8a$; отсюда $a = 5c$. Подставим в дробь $\frac{5a+7c}{c}$ вместо a выражение $5c$:

$$\frac{5\cdot 5c+7c}{c}=\frac{32c}{c}=32.$$

Формулы

Когда мы говорим о формулах, то обычно имеем в виду равенства, описывающие зависимость одной величины от другой (или нескольких других). Правая часть такого равенства — это алгебраическое выражение, позволяющее вычислять значения одной величины при различных значениях других величин. Например: зависимость между периметром прямоугольника P и длинами его сторон a и b выражается формулой $P = 2(a + b)$; зависимость пути s при равноускоренном движении от ускорения a и времени движения t выражается формулой $s = \frac{at^2}{2}$.

Каждая переменная в формуле имеет своё множество допустимых значений. Так, в формуле пути при равномерном движении $s = vt$ переменные могут принимать только положительные значения, причём эти значения находятся в ограниченном промежутке. Например, если речь идёт о движении пешехода, то значения скорости v не превосходят 6–7 км/ч.

При вычислениях по формулам необходимо следить за тем, чтобы единицы, в которых выражены входящие в них величины, были согласованы между собой.

Пример 10. Автомобиль едет со скоростью 80 км/ч. Какое расстояние он проедет за 15 мин?

Чтобы воспользоваться формулой $s = vt$, следует выразить время в часах. Получим: 15 мин = $\frac{15}{60}$ ч = $\frac{1}{4}$ ч; $s = 80$ км/ч $\cdot \frac{1}{4}$ ч = 20 км.

Ответ: 20 км.

Опираясь на формулу $s = vt$, можно найти не только пройденный путь, но и значение двух других входящих в неё величин, например времени t. Для этого следует выразить t через s и v: $t = \frac{s}{v}$. В данном случае выразить одну из величин, содержащихся в правой части формулы, через другие несложно; достаточно вспомнить, что один из множителей равен произведению, делённому на другой множитель. Однако часто это требует процедуры в несколько шагов.

Пример 11. Известна формула пути при равноускоренном движении $s = \frac{at^2}{2}$. Но для решения задач, относящихся к падению тел, полезна также формула, позволяющая вычислить время падения t. Выразим из формулы время t:

- так как делимое равно делителю, умноженному на частное, то $at^2 = 2s$;
- так как множитель равен произведению, делённому на другой множитель, то $t^2 = \frac{2s}{a}$;
- так как время t — величина положительная, то $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Найдите значение выражения $\sqrt{2x+1}$ при $x=-\frac{4}{9}$.

1) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ 3) 1

2) $\frac{1}{3}$ 4) При $x=-\frac{4}{9}$ выражение не имеет смысла

Найдите значение выражения (№ 2—7):

2. $\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x = 0{,}25$; $y = 0{,}09$.

3. $\frac{4a^3}{\sqrt{2}}$ при $a = -\sqrt{2}$.

4. $1 + 3y - 10y^2$ при $y = -0{,}1$.

5. $\frac{a-x}{a+x}$ при $a = -0{,}4$ и $x = -0{,}5$.

6. $1{,}5x^3 - 0{,}8x$ при $x = -1$.

7. $\frac{a}{b-c}$ при $a = 2{,}4$; $b = -0{,}9$; $c = 0{,}7$.

8. Какое из выражений не имеет смысла при $x = 2$ и $x = -5$?

1) $\frac{x+5}{x-2}$ 3) $\frac{(x+5)(x-2)}{2}$

2) $\frac{x-2}{x+5}$ 4) $\frac{2}{(x+5)(x-2)}$

9. Какое из данных чисел принадлежит области определения выражения $\sqrt{x-2}$?

1) 0 2) 2 3) −2 4) −1

10. Какое из чисел не входит в область определения выражения $\sqrt{4-x}$?

1) −6 2) 0 3) 4 4) 8

11. Соотнесите каждое выражение с множеством значений переменной x, при которых оно имеет смысл.

Выражение	*Значение переменной*
А. $(x+1)(x-1)$	1) $x \neq -1$
Б. $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$	2) $x \neq 1$
В. $\frac{x+1}{x-1}$	3) $x \neq 1$ и $x \neq -1$
Г. $\frac{x-1}{x+1}$	4) x — любое число

12. Из формулы удельной теплоёмкости $c = \frac{C}{M}$ выразите массу M.

1) $M = cC$
3) $M = \frac{C}{c}$
2) $M = \frac{c}{C}$
4) $M = \frac{Cc}{c}$

13. Из формулы $Q = cm(t_2 - t_1)$ выразите t_1.

14. Из формулы $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ выразите переменную b.

1) $b = \frac{ac}{a+c}$
3) $b = \frac{c-a}{ac}$
2) $b = \frac{ac}{a-c}$
4) $b = \frac{ac}{c-a}$

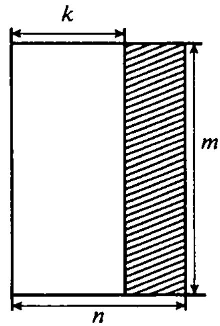
15. а) Расстояние s (в м), которое пролетает тело, не имеющее начальной скорости, за t секунд при свободном падении, можно приближённо вычислить по формуле $s = 5t^2$. За какое время камень, упавший с высоты 125 м, достигнет земли?

б) Высоту h (в м), на которой через t с окажется тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v м/с, можно приближённо вычислить по формуле $h = vt^2 - 5t^2$. На сколько выше взлетит за 1 с тело, подброшенное вертикально вверх, при начальной скорости 15 м/с, чем при начальной скорости 10 м/с?

16. В баке автомобиля 60 л бензина. На каждый километр пути по шоссе автомобиль в среднем расходует 0,07 л бензина. Составьте выражение для вычисления количества бензина, остающегося в баке после n км пути.

1) $0{,}07n$
3) $60 - \frac{0{,}07}{n}$
2) $60 - 0{,}07n$
4) $60 - \frac{n}{0{,}07}$

17. Составьте выражение для вычисления площади заштрихованной части прямоугольника.



ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

18. Для размеров обуви, принятых в некоторых англоязычных странах, существуют формулы, позволяющие определить нужный размер по длине стопы. Например, для мужской обуви это формула $s = 3l - 26$, где s — размер, l — длина стопы в дюймах. Какой размер подойдёт Николаю, если у него длина стопы 38 см? (1 дюйм ≈ 2,5 см.)

19. За время t человек, длина шага которого равна l, сделал n шагов. Составьте формулу, выражающую зависимость его скорости v от переменных t, l и n. Найдите по этой формуле скорость пешехода, выразив её в километрах в час, если длина его шага 60 см и за 5 мин он сделал 700 шагов.

20. Найдите область определения выражения $\dfrac{\frac{1}{x+y}+1}{x^2+y^2+1}$.

Решения и ответы

1. 2. **2.** –1,7. **3.** –8. **4.** 0,6. **5.** $-\frac{1}{9}$. **6.** –0,7. **7.** –1,5. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 4. **11.** А4, Б3, В2, Г1. **12.** 3. **13.** $t_1 = t_2 - \frac{Q}{cm}$. **14.** 4. **15.** а) за 5 с; б) на 5 м. **16.** 2. **17.** $m(n - k)$, или $mn - mk$. **18.** Размер 20. **19.** $v = \frac{ln}{t}$; примерно 5 км/ч; **20.** $x \neq -y$.

2.2. Преобразование целых выражений

Теоретические сведения

Действия со степенями с натуральными показателями

Напомним, что определение степени с натуральным показателем включает следующие случаи:

- если $n > 1$, то a^n — это произведение n множителей, каждый из которых равен a;
- если $n = 1$, то $a^n = a$.

Правила, которыми пользуются при выполнении действий со степенями с натуральными показателями, можно разбить на две группы.

Действия со степенями с одинаковыми основаниями:

- при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складывают, а основание оставляют прежним; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, а основание оставляют прежним; $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(m > n)$
- при возведении степени в степень показатели степеней перемножают, а основание оставляют прежними $(a^m)^n = a^{mn}$

Например: $x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^6$; $(x^2)^4 = x^8$; $x^{10} : x^5 = x^5$; $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$.

Обратите внимание: при умножении степеней и при возведении степени в степень важно не путать, когда показатели складывают, а когда перемножают. Например: $x^2 \cdot x^3 = x^{3+2} = x^5$, но $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$.

Действия со степенями с одинаковыми показателями:

- при умножении степеней с одинаковыми показателями их основания перемножают, а показатель степени оставляют прежним; $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- при делении степеней с одинаковыми показателями их основания делят, а показатель степени оставляют прежним $a^n : b^n = (a : b)^n$

Например: $x^3 \cdot y^3 = (xy)^3$; $\frac{x^5}{y^5} = \left(\frac{x}{y}\right)^5$.

Равенствами, выражающими правила действий со степенями, можно пользоваться, читая их «справа налево»: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$; $a^{m-n} = a^m : a^n$ $(m > n)$; $a^{mn} = (a^m)^n$; $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Воспользуемся, например, правилом $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, чтобы вычислить устно значение степени 2^8: $2^8 = 2^5 \cdot 2^3 = 32 \cdot 8 = 256$.

Правило $a^{mn} = (a^m)^n$ полезно тем, что позволяет представлять степени в виде квадратов и кубов, что важно при разложении на множители; например: $a^6 = (a^3)^2 = (a^2)^3$.

Действия с одночленами

Определение. ***Выражение, составленное из чисел и букв с помощью только действия умножения, называется одночленом.*** Одночлен может содержать и степень с натуральным показателем, так как степень — это краткая запись произведения. Одно число или одна буква тоже считаются одночленами.

Выражение $2{,}5a^2b \cdot (-3)b^2c \cdot 10c^2$ — это одночлен. Его можно записать в более простом виде, воспользовавшись переместительным и сочетательным свойствами умножения, а также правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями:

$$2{,}5a^2b \cdot (-3)b^2c \cdot 10c^2 = -75a^2b^3c^3.$$

В получившемся произведении только один числовой множитель, и он записан на первом месте. Каждая переменная в соответствующей степени содержится в произведении тоже только один раз. Такой одночлен называют **одночленом стандартного вида**, а его числовой множитель называют **коэффициентом**.

Одночлены можно перемножать и возводить в степень. В результате снова получается одночлен; его принято записывать в стандартном виде.

Пример 1. Представим выражение $(-yz)^2 \cdot (-2yz)^3 \cdot 0{,}5z$ в виде одночлена стандартного вида.

Решение: $(-yz)^2 \cdot (-2yz)^3 \cdot 0{,}5z = y^2z^2 \cdot (-8y^3z^3) \cdot 0{,}5z =$ $= -8 \cdot 0{,}5 \cdot y^{2+3}z^{2+3+1} = -4y^5z^6$. (Объясните каждый шаг в цепочке преобразований.)

Одночлены стандартного вида, имеющие одну и ту же буквенную часть, называют **подобными**. Например, одночлены a^2b, $-a^2b$, $\frac{1}{6}a^2b$ — подобны, а одночлены $3a^2b$ и $3ab^2$ подобными не являются.

Подобные одночлены можно складывать и вычитать, в результате опять получится одночлен. ***Чтобы найти сумму (разность) подобных одночленов, нужно сложить (вычесть) их коэффициенты и приписать общую буквенную часть.***

Пример 2. Упростим выражение $3{,}5ab - 2ab + ab$.

Данное выражение составлено из подобных одночленов с помощью действий сложения и вычитания. Выполним указанные действия над коэффициентами одночленов: $3{,}5 - 2 + 1 = 2{,}5$. Значит, $3{,}5ab - 2ab + ab = 2{,}5ab$.

Действия с многочленами

Определение. ***Выражение, составленное из одночленов с помощью только действий сложения и вычитания, называется многочленом.*** Коротко говорят так: *многочлен — это алгебраическая сумма одночленов*.

Если все члены многочлена являются одночленами стандартного вида и среди них нет подобных, то такой многочлен называют **многочленом стандартного вида**.

Чтобы сложить два многочлена (или чтобы из одного многочлена вычесть другой) нужно записать их сумму (разность), раскрыть скобки и если есть подобные слагаемые, то привести их. Результатом сложения и вычитания многочленов опять является многочлен.

Пример 3. Преобразуем в многочлен алгебраическую сумму $P - Q + R$, где $P = 2x^2 - x - 1$, $Q = x^2 - 2x$, $R = x - 1$.

Р е ш е н и е: Подставим в выражение $P - Q + R$ соответствующие многочлены и выполним указанные действия:

$$P - Q + R = (2x^2 - x - 1) - (x^2 - 2x) + (x - 1) =$$
$$= 2x^2 - x - 1 - x^2 + 2x + x - 1 = x^2 + 2x - 2.$$

Если перед алгебраическим выражением поставить знак «–», то получится выражение, ему противоположное. Например, выражение, противоположное $a - b$, есть $-(a - b)$. Так как $-(a - b) = -a + b = b - a$, то понятно, что противоположное выражение получается из исходного заменой знаков у всех членов на противоположные.

Чтобы доказать, что два многочлена противоположны, достаточно убедиться, что их сумма равна 0.

Пример 4. Докажем, что многочлены $2x - 3y + 5z$ и $3y - 2x - 5z$ противоположны.

Найдём их сумму:

$(2x - 3y + 5z) + (3y - 2x - 5z) = 2x - 3y + 5z + 3y - 2x - 5z = 0.$

Действие умножения одночлена на многочлен выполнятся на основе распределительного свойства: **чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.**

Схематически это правило для случая умножения одночлена на трёхчлен можно представить так:

$$X \cdot (A + B + C) = X \cdot A + X \cdot B + X \cdot C.$$

Обратите внимание: если многочлен не содержал подобных членов, то при умножении его на любой одночлен подобные члены не появятся.

Пример 5. Преобразуем в многочлен произведение $-2a^2 \cdot (5a^3 - 3a + 4)$.

В соответствии с сформулированным правилом получим:

$$-2a^2 \cdot (5a^3 - 3a + 4) = -2a^2 \cdot 5a^3 - 2a^2 \cdot (-3a) - 2a^2 \cdot 4 = -10a^5 + 6a^3 - 8a^2.$$

При умножении многочленов пользуются следующим правилом: **чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.** После применения правила получившийся многочлен следует привести к стандартному виду. Схематически это правило для случая умножения двучлена на двучлен можно представить так:

$$(A + B) \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y + B \cdot X + B \cdot Y.$$

Один совет, позволяющий предупредить появление ошибок при умножении многочленов: чтобы убедиться, что никакой член произведения не пропущен, можно до приведения подобных слагаемых сосчитать число получившихся одночленов. Например, при умножении двучлена на двучлен их должно быть $2 \cdot 2 = 4$, а при умножении двучлена на трёхчлен их должно получиться $2 \cdot 3 = 6$. Вообще, если в одном многочлене m членов, а в другом n членов, то произведение должно содержать mn членов.

Пример 6. Преобразуем в многочлен произведение

$$(a-2b)(a^3-2a^2b-3ab^2).$$

Сначала каждый член многочлена $a^3-2a^2b-3ab^2$ умножим на a, а затем на $-2b$ (всего должно получиться 6 слагаемых):

$$(a-2b)(a^3-2a^2b-3ab^2)=$$
$$=a^4-2a^3b-3a^2b^2-2a^3b+4a^2b^2+6ab^3=a^4-4a^3b+a^2b^2+6ab^3.$$

Формулы сокращённого умножения

При умножении многочленов встречаются некоторые особые случаи, знание которых позволяет выполнять преобразования короче. Ниже приведены правила выполнения этих действий, представленные в буквенном виде и в словесной формулировке.

1) *Формула квадрата суммы*: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$.

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

2) *Формула квадрата разности*: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$.

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

3) *Формула разности квадратов*: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

Произведение разности двух чисел на их сумму равно разности квадратов этих чисел.

Пример 7. Преобразуем в многочлен выражение $(3x+y)(y-3x)$.

Решение: Данное выражение — это произведение разности выражений y и $3x$ и их суммы, поэтому воспользуемся формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Получим:

$$(3x+y)(y-3x)=(y-3x)(y+3x)=y^2-(3x)^2=y^2-9x^2.$$

Конечно, приведённые рассуждения выполняются «в уме». Однако важно помнить, что порядок записи выражений в результате должен быть таким же, как и в множителе вида $a-b$.

Пример 8. Докажем, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

Решение: Обозначим первое натуральное число через n, запишем сумму квадратов пяти последовательных натуральных чисел и воспользуемся формулой квадрата суммы:

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2=$$
$$=5n^2+(2n+4n+6n+8n)+(1+4+9+16)=5n^2+20n+30.$$

Каждое слагаемое в сумме $5n^2+20n+30$ делится на 5, значит, и сама сумма делится на 5.

Заметим, что если первое число обозначить через $(n+2)$, то решение будет проще:

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10.$$

Укажем ещё две формулы сокращённого умножения, которые хотя и не относятся к числу обязательных для запоминания, но могут оказаться полезными.

Формулы куба суммы и куба разности.

$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ — куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа;

$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$ — куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа.

Понятие тождества. Применение тождественных преобразований к решению задач

Если одно выражение может быть получено из другого с помощью алгебраических преобразований, то такие выражения называют тождественно равными (или просто *равными*). Равенство, в левой и правой части которого записаны тождественно равные выражения, называют **тождеством**.

Например, равенство $2c(x-3y-5z)=2cx-6cy-10cz$ — это тождество, так как второе выражение получено из первого на основе правила умножения одночлена на многочлен. Тождеством также является равенство $(a-b)^2=(b-a)^2$, так как в правой его части выражение под знаком квадрата заменено на противоположное. (Как известно, квадраты противоположных чисел равны.) А вот такое равенство, как $(c-1)(c-3)=(1-c)(c-3)$, тождеством не является. Если бы мы хотели заменить выражение $(c-1)(c-3)$ равным ему произведением, то следовало бы воспользоваться, правилом: $a\cdot b=-(-a)\cdot b$ (или $ab=-a\cdot(-b)$, или $ab=(-a)(-b)$) и записать: $(c-1)(c-3)=-(1-c)(c-3)$.

Записывая цепочку преобразований, мы последовательно заменяем одно выражением другим, равным ему выражением. Всякое преобразование выполняется в соответствии с заранее поставленной целью. Вы часто получали такое задание: «упростите выражение». Если речь идёт о целом выражении, то это означает, что данное выражение нужно представить в виде многочлена стандартного вида.

Пример 9. Упростим выражение $(4+a)^2-a(8+2a)$.

Решение: $(4+a)^2-a(8+2a)=(16+8a+a^2)-(8a+2a^2)=$ $=16+8a+a^2-8a-2a^2=16-a^2$.

Некоторые типичные ошибки, которые встречаются при выполнении такого преобразования:

1) при преобразовании выражения $a(8 + 2a)$ умножают на a только первое слагаемое, а второе забывают, и пишут: $8a + 2a$;

2) при возведении в квадрат двучлена $4 + a$ пишут: $16 + a^2$ (т. е. забывают об удвоенном произведении) или $16 + 4a + a^2$ (т. е. не умножают произведение членов двучлена на 2);

3) при раскрытии скобок в выражении $-(8a + 2a^2)$ у второго слагаемого оставляют знак «+», т. е. пишут: $-(8a + 2a^2) = -8a + 2a^2$.

Часто в алгебре ставится задача: «докажите тождество». Это требование можно сформулировать в развёрнутом виде: «докажите, что равенство является тождеством» или «докажите, что левые и правые части равенства — тождественно равные выражения». Вспомнив сформулированные выше определения, вы поймёте: в таком случае требуется показать, что одну часть равенства можно получить из другой с помощью алгебраических преобразований.

Пример 10. Докажем тождество

$$(x - y)^2 + (x + y)^2 - 2(x - y)(x + y) = 4y^2.$$

Естественно левую часть преобразовать в правую. Это можно сделать «в лоб», раскрыв скобки. Но есть более красивое решение. Выражение в левой части можно преобразовать по формуле $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; здесь $a = x - y$ и $b = x + y$. Имеем:

$$(x - y)^2 + (x + y)^2 - 2(x - y)(x + y) =$$
$$= ((x - y) - (x + y))^2 = (x - y - x - y)^2 = (-2y)^2 = 4y^2.$$

Пример 11. Докажем, что трёхчлен $x^2 - 4x + 5$ не может принимать отрицательные значения.

Решение: Выделим в трёхчлене квадрат двучлена: $x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 2x \cdot 2 + 4) + 1 = (x - 2)^2 + 1$. Так как при любом значении x выполняется неравенство $(x - 2)^2 \geqslant 0$, то сумма $(x - 2)^2 + 1$ при любом x положительна.

Пример 12. Сумма двух чисел равна 10, а их произведение равно 4. Требуется найти сумму квадратов этих чисел.

Задача кажется простой: можно обозначить числа буквами x и y, решить систему двух уравнений $x + y = 10$ и $xy = 4$, а дальше вычислить сумму квадратов найдённых чисел. Однако такое решение будет очень трудоёмким. (Дело в том, что числа x и y — иррациональные.)

Другой путь — это тождественные преобразования. Чтобы найти значение выражения $x^2 + y^2$, преобразуем его, воспользовавшись формулой квадрата суммы:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 10^2 - 2 \cdot 4 = 100 - 8 = 92.$$

Разложение многочленов на множители

Разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения двух или более многочленов (среди которых могут быть и одночлены). В курсе алгебры рассматривались несколько приёмов выполнения этого преобразования.

Вынесение общего множителя за скобки. Выполняется на основе распределительного свойства, которое применяется справа налево. Схематически этот способ разложения на множители для случая трёхчлена можно представить так:

$$X \cdot A + X \cdot B + X \cdot C = X \cdot (A + B + C).$$

Пример 13. Разложим на множители двучлен $15ab^2 - 12a^2b$:

$$15ab^2 - 12a^2b = 3ab\,(5b - 4a).$$

После вынесения общего множителя за скобки полезно для самопроверки устно выполнить обратное действие. Обратите внимание: в скобках остался многочлен, члены которого уже не имеют общих буквенных множителей, а их коэффициенты — взаимно простые числа. Такой ответ, как $3a(5b^2 - 4ab)$, считался бы неверным. Заметим, что за скобки можно было бы вынести и множитель $-3ab$; тогда получили бы: $15ab^2 - 12a^2b = -3ab(4a - 5b)$.

Общий множитель, который выносится за скобки, необязательно должен быть одночленом. Он может быть и двучленом, и трёхчленом.

Пример 14. $a^2(a - b) - 2ab(a - b) + b^2(a - b) = (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2) =$ $= (a - b)\,(a - b)^2 = (a - b)^3$.

Способ группировки. Члены многочлена группируют с таким расчётом, чтобы в этих группах можно было выделить общий множитель. А потом этот общий множитель выносят за скобки.

Пример 15. $ax - bx - ay + by = (ax - bx) - (ay - by) =$ $= x(a - b) - y(a - b) = (a - b)\,(x - y)$.

Распространённая ошибка: применяя способ группировки, останавливаются на предпоследнем шаге, т. е. на выражении $x\,(a - b) - y\,(a - b)$. Надо понимать, что цель разложения на множители — это представление выражения в виде произведения, в то время как на предпоследнем шаге получилась разность.

Пример 16. Разложим на множители многочлен $2a^2 + 5ab + 2b^2$.

Чтобы применить группировку, разобьём слагаемое $5ab$ на два одночлена: $5ab = ab + 4ab$. Тогда $2a^2 + 5ab + 2b^2 = (2a^2 + ab) + (4ab + 2b^2) =$ $= a(2a + b) + 2b(2a + b) = (2a + b)\,(a + 2b)$.

Применение формул сокращённого умножения. Формулы $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, записанные справа налево, дают нам правила разложения многочленов на множители.

Пример 17. $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$
$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

Кроме формул квадрата суммы (разности) и разности квадратов, часто применяются формулы суммы и разности кубов:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Первая из них словами читается так: сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и неполного квадрата их разности. (Неполным квадратом разности называют выражение $a^2 - ab + b^2$.) Прочитайте самостоятельно словами формулу разности кубов.

Пример 18. Разложим на множители выражение $27a^6 - 8b^3$.

Данное выражение можно представить в виде разности кубов и далее воспользоваться соответствующей формулой:

$$27a^6 - 8b^3 = (3a^2)^3 - (2b)^3 = (3a^2 - 2b)(9a^4 + 6a^2b + 4b^2).$$

Часто для разложения многочлена на множители приходится последовательно применять несколько приёмов. Никаких общих правил, помогающих установить, какие способы и в каком порядке следует применять, не существует. Однако некоторых рекомендаций всё же следует придерживаться:

1) если можно вынести за скобки общий множитель, сделайте это;

2) посмотрите, нельзя ли воспользоваться какой-либо формулой:

— если имеется двучлен, то проверьте, нельзя ли применить формулу разности квадратов или же формулу разности (суммы) кубов;

— если имеется трёхчлен, то проверьте, нельзя ли свернуть его в квадрат двучлена;

3) если не удаётся применить формулы сокращённого умножения, то попытайтесь воспользоваться способом группировки;

4) когда вы закончили разложение на множители, полезно проверить с помощью умножения, получен ли вами верный результат.

Пример 19. Разложим на множители многочлен $3a^2b - 12b$. Начнём с вынесения за скобки общего множителя $3b$:

$$3a^2b - 12b = 3b(a^2 - 4).$$

Далее применим формулу разности квадратов:

$$3b(a^2 - 4) = 3b(a - 2)(a + 2).$$

Таким образом,

$$3a^2b - 12b = 3b(a - 2)(a + 2).$$

Пример 20. Разложим на множители многочлен $25 - a^2 + 2ab - b^2$. Естественно сгруппировать последние три слагаемых:

$$25 - a^2 + 2ab - b^2 = 25 - (a^2 - 2ab + b^2) = 25 - (a - b)^2.$$

Теперь можно воспользоваться формулой разности квадратов:

$$25 - (a - b)^2 = 5^2 - (a - b)^2 = (5 - (a - b))\,(5 + (a - b)) =$$
$$= (5 - a + b)\,(5 + a - b).$$

Итак, $25 - a^2 + 2ab - b^2 = (5 - a + b)\,(5 + a - b)$.

Разложение на множители квадратного трёхчлена. Разложить на множители можно только тот квадратный трёхчлен, который имеет корни: если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Квадратный трёхчлен, не имеющий корней, на линейные множители разложить нельзя.

Пример 21. Разложим на множители квадратный трёхчлен $-4x^2 + 11x + 3$.

Найдём корни трёхчлена; для этого решим уравнение $-4x^2 + 11x + 3 = 0$; $4x^2 - 11x - 3 = 0$; $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 3$. По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\,(x - x_2)$ получим:

$$-4x^2 + 11x + 3 = -4(x + \tfrac{1}{4})\,(x - 3) = -(4x + 1)\,(x - 3) = (4x + 1)\,(3 - x).$$

Пример 22. Разложим на множители трёхчлен $x^4 - 5x^2 + 4$.

Введём замену $x^2 = y$, тогда $x^4 - 5x^2 + 4 = y^2 - 5y + 4$.

По формуле разложения на множители квадратного трёхчлена получим: $y^2 - 5y + 4 = (y - 1)\,(y - 4)$.

Вернувшись к переменной x, будем иметь:
$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)\,(x^2 - 4) = (x - 1)\,(x + 1)\,(x - 2)\,(x + 2)$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Какие из данных равенств являются тождественными?

1) $a^3 \cdot a^3 = a^9$	4) $(2a)^{5n} = 2^5 a^n$
2) $16a^2c^4 = (4ac^2)^2$	5) $2^5 \cdot 5^2 = 10^2$
3) $(a^2b^4)^3 = (a^3b^6)^2$	6) $a^4b^8 = \left(ab^2\right)^4$

2. В каком случае преобразование выполнено неверно?

1) $a^{n-1} \cdot a^{n+1} = a^{2n}$
3) $a^{n+1} : a^{n-1} = a^2$
2) $a \cdot (2a)^2 \cdot (3a)^3 = 108a^6$
4) $64b^8 : (2b^2)^3 = 8b^3$

3. Укажите выражение, не равное произведению $2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 8^3 \cdot 9^3$.

1) $2^{18} \cdot 3^9$
3) $(4 \cdot 8)^3 \cdot (3 \cdot 9)^3$
2) $6^9 \cdot 2^9$
4) 12^9

4. Какому из выражений равно произведение $4 \cdot 2^n$?

1) 4^{n-2} 2) 2^{n+2} 3) 2^{2n} 4) 8^n

5. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида:

а) $(-2x)^5 (3y)^2 \left(-\frac{y}{3x}\right)^4$; б) $(-ab)^3 \cdot (-2ac)^2 \cdot 0{,}5c$

6. Какой многочлен надо прибавить к многочлену $-3a+4b-c$, чтобы их сумма была равна нулю?

1) $3a - 4b - c$
3) $3a + 4b - c$
2) $-3a - 4b - c$
4) $3a - 4b + c$

7. В каком случае преобразование выполнено верно?

1) $2(a - b) = 2a - b$
3) $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$
2) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$
4) $(2 + a)(a - 2) = 4 - a^2$

8. В каком случае преобразование выполнено неверно?

1) $xy - 3y = (x - 3)y$
3) $y^2 - x^2 = (x + y)(y - x)$
2) $9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$
4) $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

9. В выражении $6x^2 - 9xy$ вынесли за скобки общий множитель $-3x$. Какой двучлен остался в скобках?

1) $-2x - 3y$ 2) $3y - 2x$ 3) $2x - 3y$ 4) $3y + 2x$

10. Укажите произведение, тождественно равное многочлену $6a - 8ab$.

1) $-2a(3 - 4b)$
3) $-2a(4b - 3)$
2) $-2a(3 + 4b)$
4) $-2a(-3 - 4b)$

11. Укажите выражение, тождественно равное произведению $(x-4)(1-2x)$.

1) $(4-x)(1-2x)$
2) $(4-x)(2x-1)$
3) $(x-4)(2x-1)$
4) $-(4-x)(2x-1)$

12. Какое из выражений нельзя преобразовать в произведение $(4-y)^2(2-y)$?

1) $-(y-4)^2(y-2)$
2) $-(4-y)^2(y-2)$
3) $(y-4)^2(2-y)$
4) $(y-4)^2(y-2)$

13. Упростите выражение:

а) $(c+5)^2-c(10-3c)$;
б) $(a-3)^2-3a(a-2)$;
в) $2c(c-3)-(c+4)^2$;
г) $3a(a-3)-(a-2)^2$;
д) $(m+3)^2-(m-2)(m+2)$;
е) $(y-4)(y+4)-(y-3)^2$;
ж) $(a-3)(a-7)-2a(3a-5)$;
з) $2a(3a-1)-(a-2)(a+3)$.

14. Разложите на множители:

а) $25x^2-9y^2$;
б) $16-b^4$;
в) $a-ab+3-3b$;
г) $(a-2)^2-5a(a-2)$.

15. Разложите на множители многочлен $2x^3-8x$.

16. Разложите на множители квадратный трёхчлен $2x^2+4x-6$.

1) $2(x+1)(x-3)$
2) $2(x-1)(x-3)$
3) $2(x-1)(x+3)$
4) $2(x+1)(x+3)$

17. Какое выражение надо подставить вместо многоточия в равенство $4x^2-11x-3=4(x-3)\cdot(\ldots)$?

18. Какой из следующих квадратных трёхчленов нельзя разложить на множители?

1) x^2+4x+4
2) $x^2-6x+10$
3) x^2-2x-3
4) x^2+4x+2

Разложите на множители (№ 19—21):

19. а) $x^2y - xy - x^2 + x$;
б) $x^2y - y - x^2 + 1$.

20. а) $a^2b - ab^2 - ac + ab + bc - c$;
б) $9x^4 - 13x^2 + 4$;
в) $x^2y^2 - 5x^2y + 4x^2 - y^2 + 5y - 4$.

21. а) $4c^2 - 20ac + 25a^2 + 5a - 2c$;
б) $a^2 - 4b^2 + 4b - 1$;
в) $2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2$.

22. Докажите тождество: $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) = a^8 - 1$.

Решения и ответы

1. 2, 3 и 6. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 2. **5.** а) $-\frac{32}{9}xy^6$; б) $-2a^5b^3c^3$. **6.** 4. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 3. **11.** 2. **12.** 4. **13.** а) $4c^2 + 25$; б) $-2a^2 + 9$; в) $c^2 - 14c - 16$; г) $2a^2 - 5a - 4$; д) $6m + 13$; е) $6y - 25$; ж) $21 - 5a^2$; з) $5a^2 - 3a + 6$. **14.** а) $(5x-3y)(5x+3y)$; б) $(2 - b)(2 + b)(4 + b^2)$; в) $(1-b)(a+3)$; г) $-2(a - 2)(2a + 1)$. **15.** $2x(x-2)(x+2)$. **16.** 3. **17.** $x + \frac{1}{4}$. **18.** 2. **19.** а) $(x-1)x(y-1)$. *Решение.* $x^2y - xy - x^2 + x = xy(x-1) - x(x-1) = (x-1)x(y-1)$; б) $(x-1)(x+1)(y-1)$. **20.** а) $(a-b+1)(ab-c)$. *Указание.* Сгруппируйте слагаемые так: первое, второе и четвёртое (эти слагаемые не содержат c), третье, пятое и шестое (содержат c); б) $(3x-2)(3x+2)(x-1)(x+1)$. *Указание.* Начните с замены $x^2 = y$; в) $(x-1)(x+1)(y-4)(y-1)$. *Решение.* $x^2y^2 - 5x^2y + 4x^2 - y^2 + 5y - 4 = y^2(x^2-1) - 5y(x^2-1) + 4(x^2-1) = (x^2-1)(y^2-5y+4)$; первый множитель разложите по формуле разности квадратов, второй — по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. **21.** а) $(2c-5a)(2c-5a-1)$. *Указание.* Сгруппируйте первые три слагаемых; б) $(a-1+2b)(a+1-2b)$. *Указание.* Сгруппируйте три последних слагаемых; в) $2(x-5y-1)(x-5y+1)$. **22.** *Решение.* $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) = (a^2-1)(a^2+1)(a^4+1) = (a^4-1)(a^4+1) = a^8 - 1$.

2.3. Преобразование дробных выражений

Теоретические сведения

Преобразование алгебраических дробей с помощью основного свойства дроби

Алгебраической дробью называют выражение вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены ($Q \neq 0$, т. е. не является нулевым многочленом).

Основное свойство алгебраической дроби: **если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится дробь, равная данной.**

В буквенном виде основное свойство можно записать так:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \text{ где } C \neq 0.$$

Следствия основного свойства:

- если и числитель, и знаменатель алгебраической дроби заменить на противоположные выражение, то получится дробь, равная данной: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$;
- если числитель или знаменатель алгебраической дроби заменить на противоположное выражение и при этом поменять знак перед дробью, то получится дробь, равная данной: $\frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$.

Основное свойство используется для приведения дроби к новому знаменателю и для сокращения дробей. *Чтобы выяснить, можно ли дробь сократить, необходимо прежде всего разложить и числитель, и знаменатель на множители. Если разложение на множители числителя или знаменателя невозможно, то дробь сократить нельзя.*

Пример 1. Сократим дробь $\frac{a^2+3a}{9-a^2}$.

Решение: $\frac{a^2+3a}{9-a^2} = \frac{a(a+3)}{(3+a)(3-a)} = \frac{a}{3-a}$.

Обратите внимание: двучлены $a + 3$ и $3 + a$ равны; эти суммы отличаются только порядком слагаемых. Таким образом, после разложения на множители оказалось, что у числителя и знаменателя есть общий множитель, на который мы дробь и сократили.

Пример 2. Сократим дробь: $\frac{2x-3x^2}{3x^2+7x-6}$.

Разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби:

1) $2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$;

2) $3x^2 + 7x - 6 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{2}{3}$;

$3x^2 + 7x - 6 = 3(x + 3)(x - \frac{2}{3}) = (x + 3)(3x - 2)$.

Далее получим:

$$\frac{2x - 3x^2}{3x^2 + 7x - 6} = \frac{x(2 - 3x)}{(x+3)(3x-2)} = -\frac{x(3x-2)}{(x+3)(3x-2)} = -\frac{x}{x+3}.$$

Множители $2 - 3x$ и $3x - 2$ не равны, это противоположные выражения. Но легко было сделать так, чтобы у числителя и знаменателя оказался общий множитель: достаточно было заменить в числителе двучлен $2 - 3x$ на противоположный, т. е. на $3x - 2$, и поставить знак «–» перед дробью.

Пример 3. Сократим дробь $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2 - 4}{(2 - a + 3b)(a + 3b + 2)}$.

Для разложения на множители числителя воспользуемся способом группировки:

$$a^2 - 6ab + 9b^2 - 4 = (a^2 - 6ab + 9b^2) - 4 =$$
$$= (a - 3b)^2 - 2^2 = (a - 3b - 2)(a - 3b + 2).$$

И далее: $\frac{(a-3b-2)(a-3b+2)}{(2-a+3b)(a+3b+2)} = -\frac{(a-3b-2)(a-3b+2)}{(a-3b-2)(a+3b+2)} = -\frac{a-3b+2}{a+3b+2}$.

(Объясните, каким образом был выделен общий множитель в числителе и знаменателе дроби.)

Действия с алгебраическими дробями

Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями выполняется по правилам:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}; \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}.$$

Если знаменатели дробей различны, то сначала их нужно привести к общему знаменателю, при этом желательно, чтобы этот общий знаменатель был простейшим из возможных.

Пример 4. Выполним сложение дробей $\frac{1}{3ac}$ и $\frac{1}{4a^2c}$.

Общий знаменатель дробей должен делиться и на $3ac$, и на $4a^2c$. Этому условию отвечает одночлен $12a^2c$, причём он является простейшим из возможных общих знаменателей (обратите внимание: его коэффициент является наименьшим общим кратным чисел 3 и 4).

Найдём дополнительный множитель для каждой дроби: $12a^2c : 3ac = 4a$ и $12a^2c : 4a^2c = 3$. Таким образом:

$$\frac{1}{3ac} + \frac{1}{4a^2c} = \frac{4a}{3ac \cdot 4a} + \frac{3}{4a^2c \cdot 3} = \frac{4a+3}{12a^2c}.$$

Пример 5. Преобразуем в дробь разность $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

Решение:

$$\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{(m-n)(m+n)}=\frac{(m+n)^2-(m^2+n^2)}{(m-n)(m+n)}=\frac{2mn}{m^2-n^2}.$$

(Прокомментируйте каждый шаг в цепочке преобразований.)

Пример 6. Выполним действие: $\frac{15a^2}{3a-2}-5a$.

Выполнить вычитание можно по правилу вычитания дробей. Для этого нужно, чтобы выражение $5a$ тоже было записано в виде дроби. Это можно сделать так:

$$\frac{15a^2}{3a-2}-\frac{5a}{1}=\frac{15a^2}{3a-2}-\frac{5a(3a-2)}{3a-2}=\frac{15a^2-5a(3a-2)}{3a-2}=\frac{10a}{3a-2}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей выполняется по правилам:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},\qquad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}.$$

Вы видите, что деление дробей сводится к умножению на дробь, обратную делителю.

Пример 7. Найдём частное дробей $\frac{a^2-ac}{c}$ и $\frac{a-c}{c^2}$.

Решение:

$$\frac{a^2-ac}{c}:\frac{a-c}{c^2}=\frac{a(a-c)}{c}\cdot\frac{c^2}{a-c}=\frac{a(a-c)\cdot c^2}{c\cdot(a-c)}=ac.$$

Пример 8. Выполним деление: $(x-3):\frac{x^2-6x+9}{x+3}$.

Решение: Представим делимое в виде дроби и воспользуемся правилом деления дробей:

$$(x-3):\frac{x^2-6x+9}{x+3}=\frac{x-3}{1}\cdot\frac{x+3}{(x-3)^2}=\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}.$$

Рассмотренные правила действий с алгебраическими дробями позволяют преобразовывать любое рациональное выражение. Каким бы сложным ни было это выражение, его всегда можно упростить, т. е. представить в виде несократимой алгебраической дроби (в частном случае — в виде целого выражения). Запись преобразования рационального выражения можно вести как цепочкой, выполняя при необходимости в стороне вспомогательные вычисления, так и по действиям.

Пример 9. Упростим выражение $\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2\right):\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)$.

1) $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2=\frac{a^2+c^2+2ac}{ac}=\frac{(a+c)^2}{ac}$;

2) $\frac{a}{c}-\frac{c}{a}=\frac{a^2-c^2}{ac}$;

3) $\frac{(a+c)^2}{ac}:\frac{a^2-c^2}{ac}=\frac{(a+c)^2}{ac}\cdot\frac{ac}{(a-c)(a+c)}=\frac{(a+c)^2\cdot ac}{ac\cdot(a-c)(a+c)}=\frac{a+c}{a-c}$.

Ответ: $\frac{a+c}{a-c}$.

Пример 10. Упростим выражение $\left(\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-3a+2}\right)\cdot(3a-6)^2$.

Можно действовать стандартно: упростить разность в скобках, а потом выполнить умножение. Однако есть другой путь решения, основанный на применении распределительного свойства. Умножив каждую дробь на $(3a-6)^2$, получим:

$$\left(\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-3a+2}\right)\cdot(3a-6)^2=$$

$$=\frac{a\cdot 9(a-2)^2}{(a-2)^2}-\frac{(a-1)\cdot 9(a-2)^2}{(a-1)(a-2)}=9a-9(a-2)=9a-9a+18=18.$$

Обращаем внимание на возможную ошибку: в выражении $(3a-6)^2$ за скобки надо выносить не 3, а 3^2, так как $(3a-6)^2=(3a-6)(3a-6)=$ $=3(a-2)\cdot 3(a-2)=9(a-2)^2$.

Действия со степенями с целыми показателями

Определение степени с целым показателем дополняет определение степени с натуральным показателем разъяснением смысла выражения a^n для $n=0$ и для целого отрицательного n:

1) если $n=0$ и $a\neq 0$, то $a^n=1$;

2) если n — целое отрицательное число и $a\neq 0$, то $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$.

Эти определения позволяют распространить правила действий со степенями с натуральными показателями на степени с любыми целыми показателями. А именно:

- если $a\neq 0$ и m и n — любые целые числа, то
$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\qquad a^m:a^n=a^{m-n};\qquad (a^m)^n=a^{mn};$$
- если а $\neq 0$ и $b\neq 0$ и n — любое целое число, то
$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n;\qquad a^n:b^n=(a:b)^n.$$

Пример 11. Найдём значение выражения $(c^{-2})^{-6}c^{-15}$ при $c = \frac{1}{2}$.

Решение: Упростим выражение $(c^{-2})^{-6}c^{-15}$:

$$(c^{-2})^{-6}c^{-15} = c^{12} \cdot c^{-15} = c^{-3}.$$

Найдём значение c^{-3} при $c = \frac{1}{2}$, получим: $c^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^{3} = 2^3 = 8.$

Пример 12. Сократим дробь $\frac{a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}}{a^3+a^2+a}$.

Попробуем числитель и знаменатель дроби разложить на множители так, чтобы получившиеся произведения содержали общий множитель. В знаменателе дроби естественно вынести за скобки a, получим: $a^3 + a^2 + a = a\ (a^2 + a + 1)$. Этот результат подсказывает, что в числителе нужно вынести за скобки a^{-3} и получить $a^{-1} + a^{-2} + a^{-3} = a^{-3}\,(a^2 + a + 1)$. (Сделайте проверку, выполнив устно обратное действие.) Таким образом,

$$\frac{a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}}{a^3+a^2+a} = \frac{a^{-3}(a^2+a+1)}{a(a^2+a+1)} = \frac{a^{-3}}{a} = a^{-3-1} = a^{-4}.$$

Пример 13. Сократим дробь $\frac{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}}{4 \cdot 36^n}$.

Решение:

Способ 1.

$$\frac{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}}{4 \cdot 36^n} = \frac{3^{2n} \cdot 3^{-3} \cdot 2^{2n} \cdot 2^2}{4 \cdot 36^n} = \frac{(3 \cdot 2)^{2n} \cdot 3^{-3}}{36^n} = \frac{(6^2)^n \cdot 3^{-3}}{36^n} = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Способ 2.

$$\frac{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}}{4 \cdot 36^n} = \frac{(3^2)^n \cdot 3^{-3} \cdot (2^2)^n \cdot 2^2}{4 \cdot 36^n} = \frac{9^n \cdot 3^{-3} \cdot 4^n}{36^n} = \frac{(9 \cdot 4)^n \cdot 3^{-3}}{36^n} = 3^{-3} = \frac{1}{27}.$$

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

Сократите дробь (№ 1—2):

1. а) $\frac{4-b^2}{8b-4b^2}$; б) $\frac{b^2+6b}{b^2-36}$.

2. а) $\frac{q^2-6q+9}{q^2-3q}$; б) $\frac{p^2-2p}{p^2-4p+4}$.

3. Укажите выражение, тождественно равное дроби $\frac{y-b}{a-x}$.

1) $-\frac{b-y}{a-x}$ 2) $-\frac{b-y}{x-a}$ 3) $\frac{y-b}{x-a}$ 4) $\frac{b-y}{a-x}$

4. Выполните умножение: $\frac{x^2-y^2}{2x}\cdot\frac{2xy}{xy-y^2}$.

5. Выполните деление: $\frac{x}{y^2-xy}:\frac{x^2}{y^2-x^2}$.

1) $\frac{xy}{x+y}$ 2) $\frac{y}{y-1}$ 3) $\frac{y-x}{xy}$ 4) $\frac{x+y}{xy}$

6. Выполните действие:

а) $\frac{3}{4x}+\frac{1}{x}$; в) $\frac{1}{a^2-c^2}\cdot(a-c)^2$;

б) $\frac{16}{4a-a^2}-\frac{4}{a}$; г) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):(a-b)$.

7. Представьте выражение в виде дроби:

а) $6m+\frac{3-7m^2}{m}$; б) $\frac{15a^2}{3a-2}-5a$.

Упростите выражение (№ 8—15):

8. $\frac{b}{c}-\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{1}{b}$.

9. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\frac{1}{a+b}$.

10. $\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}\right)\cdot\frac{y}{x}$.

11. $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}\right)\cdot\frac{ab+b^2}{a}$.

12. $\frac{a^2-b^2}{5a^2}\cdot\frac{a}{3a+3b}$.

13. $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

14. $\frac{y^2}{xy+x^2}:\frac{y}{x^2-y^2}$.

15. $(a+3)\cdot\frac{a^2-9}{a^2+6a+9}$.

16. Дана дробь $\frac{a}{b}$. Выполните подстановку $a=\frac{xy}{x-y}$, $b=\frac{xy}{x^2-y^2}$ и упростите полученное выражение.

1) $\frac{1}{x+y}$ 2) $\frac{1}{x-y}$ 3) $x+y$ 4) $x-y$

17. Подставьте $a = \frac{x+y}{x-y}$ и $b = \frac{x-y}{x+y}$ в выражение $a - b$ и упростите его.

18. Вычислите $(3^{-4})^2 \cdot 3^5$.

1) -27 2) -9 3) $\frac{1}{27}$ 4) $-\frac{1}{27}$

19. В каком виде можно представить выражение 2^{k-3}?

1) $2^k - 2^3$ 2) $\frac{2^k}{2^3}$ 3) $\frac{2^k}{2^{-3}}$ 4) $(2^k)^{-3}$

20. Найдите значение выражения:

а) $(c^6c^{-3})^{-1}$ при $c = \frac{1}{3}$;

б) $\frac{1}{x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^{-4}}$ при $x = -2$.

21. Упростите дробь $\frac{a^{-4}}{a^{-8} \cdot a^6}$.

22. Представьте выражение $\frac{x^{-8} \cdot x^{10}}{x^4}$ в виде степени с основанием x.

1) x^{-2} 2) x^8 3) x^{-6} 4) x^6

23. Представьте значение выражения $(2{,}1 \cdot 10^{-1}) \cdot (4 \cdot 10^{-2})$ в виде десятичной дроби.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

24. Сократите дробь: а) $\frac{5x^2-3x-2}{5x^2+2x}$; б) $\frac{6a^2-a-1}{8a+b-2ab-4}$.

Упростите выражение (№ 25—27):

25. $(2n-6)^2 \cdot \left(\frac{n+2}{n^2-n-6} - \frac{n}{n^2-6n+9}\right)$.

26. $\frac{36-y^2}{y-8} \cdot \left(\frac{y}{y-6} - \frac{2y}{y^2-12y+36}\right) + \frac{12y}{y-6}$.

27. $\frac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+1} \cdot 25}$.

28. Средний радиус Земли равен примерно $6{,}37 \cdot 10^3$ км. Найдите площадь поверхности Земли, выразив её в млн км^2. (Формула площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2$, воспользуйтесь калькулятором.)

Решения и ответы

1. а) $\frac{2+b}{4b}$; б) $\frac{b}{b-6}$. **2.** а) $\frac{q-3}{q}$; б) $\frac{p}{p-2}$. **3.** 1. **4.** $x+y$. **5.** 4. **6.** а) $\frac{7}{4x}$; б) $\frac{4}{4-a}$; в) $\frac{a-c}{a+c}$; г) $\frac{a+b}{ab}$. **7.** а) $\frac{3-m^2}{m}$; б) $\frac{10a}{3a-2}$. **8.** $\frac{1-c}{b}$. **9.** $\frac{a+b}{ab}$. **10.** $\frac{1}{x+y}$. **11.** $\frac{2b^2}{a-b}$. **12.** $\frac{a-b}{15a}$. **13.** $\frac{2mn}{n^2-m^2}$. **14.** $\frac{xy-y^2}{x}$. **15.** $a-3$. **16.** 3. **17.** $\frac{4xy}{x^2-y^2}$. **18.** 3. **19.** 2. **20.** а) 27; б) -32. *Решение.* $\frac{1}{x^{-1}} \cdot \frac{1}{x^{-4}} = x \cdot x^4 = x^5$; $(-2)^5 = -32$. **21.** a^{-2}. **22.** 1. **23.** 0,0084. **24.** а) $\frac{x-1}{x}$; б) $\frac{3a+1}{4-b}$. *Решение.* $\frac{6a^2-a-1}{8a+b-2ab-4} = \frac{(2a-1)(3a+1)}{4(2a-1)+b(1-2a)} = \frac{(2a-1)(3a+1)}{(2a-1)(4-b)} = \frac{3a+1}{4-b}$. **25.** -12. **26.** $-y$. **27.** $4 \cdot 5^{2n-2}$.

Решение. $\frac{8 \cdot 100^n}{2^{2n+1} \cdot 25} = \frac{2^3\left(2^2 \cdot 5^2\right)^n}{2^{2n+1} \cdot 5^2} = \frac{2^3 \cdot 2^{2n} \cdot 5^{2n}}{2^{2n+1} \cdot 5^2} = 2^{2n+3-2n-1} \cdot 5^{2n-2} = 4 \cdot 5^{2n-2}$.

28. 510 млн км^2.

2.4. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Теоретические сведения

Преобразование выражений, содержащих квадратные корни, основано на следующих *правилах*:

• квадратный корень из произведения равен произведению квадратных корней из сомножителей;	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$
• квадратный корень из частного двух чисел равен частному квадратных корней из этих чисел;	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $(a \geqslant 0,\ b > 0)$
• при извлечении квадратного корня из степени показатель степени делится на 2.	$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$ ($a \geqslant 0$, m — чётное натуральное число)

Например: $\sqrt{81\cdot 16}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{16}=9\cdot 4=36$; $\sqrt{5\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$; $\sqrt{1024}=\sqrt{2^{10}}=2^5=32$.

Буквенные равенства, с помощью которых записаны указанные правила, можно применять справа налево; тогда они будут выражать правила умножения и деления корней:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab} \text{ и } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Например: $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}=\sqrt{5\cdot 45}=\sqrt{5^2\cdot 9}=5\cdot 3=15$.

Кроме того, важно знать и уметь применять ещё две формулы, непосредственно вытекающие из определения арифметического квадратного корня:

$$(\sqrt{a})^2=a \ (a\geqslant 0) \text{ и } \sqrt{a^2}=|a| \ (a \text{ — любое число}).$$

Например: $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2(\sqrt{3})^2=2\cdot 3=6$; $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. (Заметим, что последнюю формулу вам придётся использовать только при выполнении заданий повышенного уровня.)

Рассмотрим основные виды преобразований выражений, содержащих квадратные корни.

Вынесение множителя из-под знака корня

Пример 1. Упростим выражение $4\sqrt{5}+\sqrt{45}$.

Второе слагаемое в этой сумме можно преобразовать с помощью правила о корне из произведения: $\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

Такие выражения, как $4\sqrt{5}$ и $3\sqrt{5}$ называют *подобными радикалами* (у них одинаковые подкоренные выражения). К ним применимо правило приведения подобных слагаемых: $4\sqrt{5}+3\sqrt{5}=7\sqrt{5}$. Значит, $4\sqrt{5}+\sqrt{45}=7\sqrt{5}$.

Внесение множителя под знак корня

Пример 2. Сравним числа $2\sqrt{10}$ и $\sqrt{41}$.

Представим в виде квадратного корня число $2\sqrt{10}$. Это можно сделать, внеся множитель 2 под знак корня и воспользовавшись правилом умножения корней: $2\sqrt{10}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{4\cdot 10}=\sqrt{40}$. Так как $\sqrt{40}<\sqrt{41}$, то $2\sqrt{10}<\sqrt{41}$.

Под корень можно вносить только положительный множитель, а если перед корнем стоит отрицательное число, то знак «–» там и должен остаться. Например:

$$-2\sqrt{10}=-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{10}=-\sqrt{4\cdot 10}=-\sqrt{40}.$$

Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби. Такое задание часто ставится, если в знаменателе дроби содержатся квадратные корни и эту дробь нужно преобразовать в равную ей дробь с рациональным знаменателем.

Пример 3. Освободимся от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

Квадратный корень «исчезает» при возведении в квадрат. Поэтому умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{7}$. Получим:

$$\frac{3}{2\sqrt{7}}=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2\cdot(\sqrt{7})^2}=\frac{3\sqrt{7}}{2\cdot 7}=\frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

Пример 4. Освободимся от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3-2}=3-\sqrt{6}.$$

Прокомментируйте каждый шаг в этой цепочке преобразований.

Использование формул сокращённого умножения. Пример применения формулы разности квадратов рассмотрен выше (см. Пример 4).

Пример 5. Найдем значение выражения $a^2-6\sqrt{5}a-1$ при $a=\sqrt{5}+4$.

Р е ш е н и е: Выполним числовую подстановку и упростим получившееся выражение:

$$a^2-6\sqrt{5}a-1=(\sqrt{5}+4)^2-6\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}+4)-1=$$

$$=(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}\cdot 4+4^2-6(\sqrt{5})^2-24\sqrt{5}-1=$$

$$=5+8\sqrt{5}+16-30-24\sqrt{5}-1=-10-16\sqrt{5}.$$

Пример 6. Докажем, что $\sqrt{17-12\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$.

Р е ш е н и е: *Способ 1.* Воспользуемся определением арифметического квадратного корня: $(\sqrt{a}=b)\Leftrightarrow b\geq 0$ и $b^2=a$.

1) $3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}\geqslant 0$;
2) $(3-2\sqrt{2})^2=9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}$.

Способ 2. Выделим в выражении $17-12\sqrt{2}$ квадрат двучлена и воспользуемся формулой $\sqrt{a^2}=|a|$:

$$17-12\sqrt{2}=3^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=(3-2\sqrt{2})^2;$$

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=|3-2\sqrt{2}|=3-2\sqrt{2}.$$

Второй способ, конечно, труднее, так как потребовалось определённое искусство преобразования и догадка.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Сравните числа: а) $5\sqrt{2}$ и $\sqrt{52}$; б) 12 и $6\sqrt{5}$; в) $3\sqrt{4}$ и $4\sqrt{3}$.

2. Расположите в порядке возрастания числа:

а) 5,5; $\sqrt{30}$; $3\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}$ и 7.

Найдите значение выражения (№ 3—5):

3. $\frac{1}{9}xy$ при $x = \sqrt{12}$, $y = \sqrt{3}$.

4. $4\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{26}$.

5. $\sqrt{\frac{3}{10}}\cdot\sqrt{\frac{10}{9}}\cdot\sqrt{21}$.

6. Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{27\cdot 50\cdot 72}$.

7. Упростите выражение $\frac{(2\sqrt{6})^2}{36}$.

1) $\frac{2}{3}$ 2) 2 3) $\frac{1}{3}$ 4) 4

8. Какое из данных выражений не равно $\sqrt{\frac{3}{20}}$?

1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}$ 2) $\frac{\sqrt{15}}{10}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{10}$

9. Выберите выражение, значение которого — иррациональное число.

1) $(2\sqrt{3})^2$ 2) $3\sqrt{2^6}$ 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

10. Упростите выражение:

а) $\sqrt{12}+5\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{21}}$;

б) $\sqrt{18}-5\sqrt{2}+\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{27}-5\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

11. а) Найдите площадь квадрата со стороной $\sqrt{5}-1$.

б) Найдите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны $(7-\sqrt{5})$ см и $(7+\sqrt{5})$ см.

12. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

13. Найдите значение выражения a^2+4a-7 при $a = 5-\sqrt{2}$.

14. Упростите выражение $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

15. Какое из чисел больше: $3+\sqrt{5}$ или $\sqrt{8}+\sqrt{6}$?

16. Докажите, что $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$.

17. Сократите дробь: $\frac{a-\sqrt{a}-2}{2-\sqrt{a}}$.

Решения и ответы

1. а) $5\sqrt{2}<\sqrt{52}$. *Решение.* $5\sqrt{2}=\sqrt{50}<\sqrt{52}$; б) $12 < 6\sqrt{5}$. *Решение.* $6\sqrt{5}=\sqrt{180}$; $12=\sqrt{144}<\sqrt{180}$; в) $3\sqrt{4} < 4\sqrt{3}$. *Решение.* $3\sqrt{4}=\sqrt{36}$; $4\sqrt{3}=\sqrt{48}$; $\sqrt{36}<\sqrt{48}$. **2.** а) $3\sqrt{3}$; $\sqrt{30}$; 5,5; б) $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$, 7. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** 520. **5.** $\sqrt{7}$. **6.** $180\sqrt{3}$. **7.** 1. **8.** 4. **9.** 3. **10.** а) $7\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $-\sqrt{2}$. **11.** а) $6-2\sqrt{5}$; б) 22. **12.** а) $\sqrt{6}+2$. *Решение.* $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{3-2}=$ $=\sqrt{6}+2$; б) $4-\sqrt{15}$. *Указание.* Умножьте и числитель, и знаменатель дроби на $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. **13.** $40-14\sqrt{2}$. *Решение.* $\left(5-\sqrt{2}\right)^2+4\left(5-\sqrt{2}\right)-7=$ $=25-10\sqrt{2}+2+20-4\sqrt{2}-7=40-14\sqrt{2}$. Решить можно и иначе, выделив полный квадрат в исходном выражении: $a^2+4a-7=(a+2)^2-11$ и уже в него подставить значение *а*. **14.** $-2\sqrt{15}$. *Решение.* $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$ $=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}{5-3}=\frac{\left(5-2\sqrt{15}+3\right)-\left(5+2\sqrt{15}+3\right)}{2}=\frac{-4\sqrt{15}}{2}=-2\sqrt{15}$. **15.** $\sqrt{8}+\sqrt{6}$. *Решение.* $\left(3+\sqrt{5}\right)^2=14+6\sqrt{5}$; $\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)^2=14+8\sqrt{3}$; так как $6\sqrt{5}=\sqrt{180}<\sqrt{192}=8\sqrt{3}$, то $3+\sqrt{5} < \sqrt{8}+\sqrt{6}$. **16.** *Указание.* Проверьте, что правая часть равенства больше нуля, и возведите её в квадрат. **17.** $-\sqrt{a}-1$. *Указание.* Разложите выражение в числителе на множители, сделав замену $\sqrt{a}=x$.

§ 3. Уравнения с одной переменной

Что надо знать и уметь:

- знать и понимать термины «уравнение», «корень уравнения», смысл требования «решить уравнение»;
- знать и применять алгоритмы решения основных видов уравнений с одной переменной: решать линейные уравнения; полные и неполные квадратные уравнения; уравнения вида $(ax + b)(cx + d) = 0$; дробно-рациональные уравнения; решать целые и дробные уравнения, применяя алгебраические преобразования;
- проводить исследование линейных и квадратных уравнений, в том числе содержащих буквенные коэффициенты;
- использовать в несложных случаях графики функций для исследования уравнений, для приближённого нахождения корней;
- решать текстовые задачи алгебраическим методом, составляя уравнение с одной переменной.

3.1. Целые уравнения

Теоретические сведения

Основные понятия

Определение. ***Значение переменной, при подстановке которой в уравнение получается верное числовое равенство, называется корнем уравнения.***

Например, число 1 является корнем уравнения $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, а число 2 корнем этого уравнения не является. (Убедитесь в этом, подставив каждое из указанных чисел в левую часть уравнения и выполнив соответствующие вычисления.)

Уравнение с одной переменной может иметь один корень, два корня, несколько корней, бесконечно много корней или вообще не иметь корней. Так, уравнение $x^2 = 25$ имеет два корня: числа 5 и -5. А уравнение $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 0$ корней не имеет. В самом деле, сумма квадратов двух выражений равняется нулю в том и только в том случае, когда оба слагаемых обращаются в нуль; однако таких значений x, при которых одновременно равны нулю и выражение $(x + 1)^2$, и выражение $(x - 2)^2$, не существует.

Определение. ***Уравнение с одной переменной называют целым уравнением, если обе его части являются целыми выражениями.***

Примеры целых уравнений:

$(x + 1)(1 + 3x) = 3x(x - 2)$; $\quad \frac{x^2 - x}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$, $\quad \frac{1}{3}x^2 = \sqrt{2}x$.

Уравнения $\frac{x}{x-1}+\frac{6}{x+1}=4$ и $2\sqrt{x}=x-1$ целыми не являются. У первого из них левая часть — дробное выражение, а второе уравнение вообще не является рациональным.

Всякое целое уравнение с одной переменной можно преобразовать в равносильное ему уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Напомним, что ***равносильными называют уравнения, имеющие одно и то же множество корней***. Уравнение можно преобразовать в равносильное, пользуясь следующими правилами:

- *члены уравнения можно переносить из одной его части в другую, меняя при этом их знаки на противоположные;*
- *обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, отличное от нуля.*

Пример 1. Преобразуем уравнение $2x(x^3 - 8) = x^2 - 16x - 4$ в уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида. Для этого перенесём члены уравнения из правой части в левую и затем преобразуем в многочлен целое выражение, записанное в левой части получившегося уравнения. Будем иметь:

$$2x(x^3-8)-x^2+16x+4=0,$$

$$2x^4-16x-x^2+16x+4=0,$$

$$2x^4-x^2+4=0.$$

Наибольший показатель степени, в которой переменная содержится в многочлене $2x^4 - x^2 + 4$, равен 4, это многочлен четвёртой степени. Поэтому и уравнение $2x^4 - x^2 + 4 = 0$ — это *уравнение четвёртой степени*. А для уравнений четвёртой степени такого вида есть специальный алгоритм решения.

Один из основных приёмов решения целых уравнений с одной переменной заключается в следующем:

- уравнение преобразовывают в равносильное уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида;
- распознают вид получившегося уравнения и применяют соответствующий алгоритм решения.

Решение уравнений первой степени

Определение. ***Уравнением первой степени называется уравнение $ax + b = 0$, где a и b — произвольные числа, причём $a \neq 0$.***

Уравнение первой степени с одной переменной всегда имеет единственный корень $x=-\frac{b}{a}$.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{x}{4}=1+\frac{2x}{3}$.

Прежде всего избавимся от дробных коэффициентов. (Ведь оперировать с целыми числами проще, чем с дробными!) Для этого умножим обе части уравнения на наименьшее общее кратное знаменателей дробей, т. е. на 12, получим:

$$\frac{x}{4}\cdot 12=(1+\frac{2x}{3})\cdot 12,$$

$$3x = 12 + 8x,$$

$$-5x = 12,$$

$$x = -2{,}4.$$

(Объясните каждый шаг в цепочке преобразований уравнения.)

Пример 3. Дано уравнение $x\sqrt{3} + 4 = x + m$, где x — переменная, m — некоторое число. При каких значениях m уравнение имеет положительный корень?

Сгруппируем члены, содержащие переменную x, в левой части уравнения, а свободные члены перенесём в правую часть. Получим:

$$x\sqrt{3} - x = m - 4,$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = m - 4,$$

$$x = \frac{m-4}{\sqrt{3}-1}.$$

Так как $\sqrt{3} > 1$, то знаменатель дроби $\frac{m-4}{\sqrt{3}-1}$ положителен. А значит, дробь $\frac{m-4}{\sqrt{3}-1}$ будет положительна в том и только в том случае, когда выполняется условие $m - 4 > 0$, т. е. при $m > 4$.

О т в е т: уравнение имеет положительный корень при любом $m > 4$.

Уравнение первой степени относится к так называемым *линейным уравнениям*. ***Линейным уравнением с одной переменной называют уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — любые числа.***

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то линейное уравнение не имеет корней. Например, не имеет корней уравнение $0x + 6 = 0$. В самом деле, при любом x левая часть равна 6, а в правой части стоит 0.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем линейного уравнения является любое число.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень, равный $-\frac{b}{a}$.

Решение квадратных уравнений

Определение. ***Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c$, где a, b и c — произвольные числа, причём $a \neq 0$.***

Числа a, b и c — это коэффициенты квадратного уравнения; число a называют первым (или старшим) коэффициентом, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом. Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют *приведённым*. Приведённое квадратное уравнение в общем виде принято записывать так: $x^2 + px + q = 0$.

Для квадратного уравнения существует *формула корней*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Существование корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и их число зависит от знака выражения $D = b^2 - 4ac$ (его называют *дискриминантом* квадратного уравнения):

если $D > 0$, то уравнение имеет два корня;

если $D = 0$, то уравнение имеет один корень;

если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

При решении квадратного уравнения обычно сначала вычисляют дискриминант и сравнивают его с нулём. После этого либо находят корни, либо делают вывод об их отсутствии.

Пример 4. Решим уравнение $0{,}2(2x - 1) = 0{,}3x^2 - 0{,}1x$.

Преобразуем данное уравнение в равносильное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$:

$$2(2x - 1) = 3x^2 - x,$$
$$4x - 2 - 3x^2 + x = 0,$$
$$-3x^2 + 5x - 2 = 0,$$
$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Найдём дискриминант: $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$. По формуле корней получим:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

Обратите внимание: чтобы избавиться от дробей, мы умножили обе части уравнения на 10 (помните, что вычисления с целыми числами проще, чем с дробными). Кроме того, получив уравнение $-3x^2 + 5x - 2 = 0$, мы поменяли знаки всех его членов на противоположные. Советуем поступать так всегда, если приходится решать уравнение с отрицательным первым коэффициентом.

Если второй коэффициент квадратного уравнения является чётным числом, а также в других случаях, когда коэффициент b удобно представить в виде $2k$, удобно пользоваться формулой:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}; \text{ где } D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Выражение D_1 — это *сокращённый дискриминант*. Понятно, что уравнение имеет корни, если $D_1 \geqslant 0$, и не имеет корней, если $D_1 < 0$.

Пример 5. Выясним, имеет ли корни уравнение $x^2 + 2x\sqrt{3} + 14 = -4x$.

Приведя уравнение к стандартному виду, получим:
$x^2 + 2x(\sqrt{3} + 2) + 14 = 0,$
$D_1 = (\sqrt{3} + 2)^2 - 14 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 - 14 = 4\sqrt{3} - 7.$

Определим знак разности $4\sqrt{3} - 7$:

$$4\sqrt{3} - 7 = \sqrt{48} - \sqrt{49} < 0 .$$

Ответ: уравнение корней не имеет.

Любое квадратное уравнение можно решить, воспользовавшись формулой корней. Однако в ряде случаев это удаётся сделать с помощью более простых приёмов. Это прежде всего относится к так называемым *неполным квадратным уравнениям*.

Определение. ***Квадратное уравнение называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю.***

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решают путём разложения его левой части на множители. Оно всегда имеет два корня, причём один из корней равен нулю.

Пример 6. Решим уравнение $5x^2 + 2x = 0$.

Вынесем в левой части уравнения x за скобки, получим: $x(5x + 2) = 0$. Равенство нулю произведения $x(5x + 2)$ означает, что $x = 0$ или $5x + 2 = 0$, т. е $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}4$.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ либо не имеет корней, либо имеет два корня, которые являются противоположными числами.

Пример 7. Решим уравнения $2x^2 - 10 = 0$ и $2x^2 + 10 = 0$. Преобразуем первое уравнение следующим образом: $2x^2 = 10$, $x^2 = 5$; оно имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5}$. Выполнив аналогичные преобразования второго уравнения, получим уравнение $x^2 = -5$, которое корней не имеет.

Между коэффициентом приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ и его корнями существуют связи, которые выражаются *теоремой Виета*:

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Это записывается так: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Формулы Виета позволяют, не решая уравнение, получить некоторую информацию о его корнях. Возьмём, например, уравнение $x^2 - 3x - 1 = 0$. Так как $c < 0$, то $D > 0$, а значит, уравнение имеет два корня. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 \cdot x_2 = -1$. Так как произведение корней отрицательно, то они имеют разные знаки. А из того, что сумма корней положительна, следует, что у положительного корня модуль больше. Рассуждая таким образом, важно не ошибиться, так, к квадратному уравнению $x^2 - 5x + 14 = 0$ подобное рассуждение не применимо. Дело в том, что у этого уравнения отрицательный дискриминант и корней оно не имеет.

Справедлива также теорема, обратная теореме Виета:
Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, а $mn = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Сформулированное утверждение позволяет в простых случаях находить корни квадратного уравнения подбором. Возьмём, например, уравнение $x^2 + x - 6 = 0$ и подберём его корни. Корнями должны быть числа, сумма которых равна -1, а произведение равно -6. Легко сообразить, что это -3 и 2. В самом деле, $-3 + 2 = -1$ и $-3 \cdot 2 = -6$.

Пример 8. При каких целых значениях коэффициента p уравнение $x^2 + px + 15 = 0$ имеет целые корни?

С помощью перебора найдём всевозможные пары таких целых чисел, произведение которых равно 15. Получим:

$$1 \text{ и } 15;\ 3 \text{ и } 5;\ -1 \text{ и } -15;\ -3 \text{ и } -5.$$

Для каждой пары найдём соответствующее значение коэффициента p. Так как $p = -(x_1 + x_2)$, то получаем числа: -16; -8; 16; 8.

О т в е т: уравнение $x^2 + px + 15 = 0$ имеет целые корни при $p = -16$; -8; 16; 8.

Решение целых уравнений методом введения новой переменной

Некоторые целые уравнения третьей и четвёртой степени удаётся решить с помощью подстановки, которая позволяет перейти к уравнению, степень которого ниже. Так обстоит дело с *биквадратным уравнением*.

О п р е д е л е н и е. ***Биквадратным уравнением называют уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где a, b и c — любые числа и $a \neq 0$.*** Приставка «би-» указывает на то, что такое уравнение является квадратным относительно x^2.

Пример 9. Решим уравнение $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$.

Обозначим x^2 буквой y, т. е. воспользуемся подстановкой $y = x^2$. Получим квадратное уравнение $2y^2 - 9y + 4 = 0$. Корни этого уравнения $y_1 = 4$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Теперь надо решить два квадратных уравнения $x^2 = 4$ и $x^2 = \frac{1}{2}$. Из уравнения $x^2 = 4$ находим $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$; из уравнения $x^2 = \frac{1}{2}$ находим $x_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_4 = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Итак, уравнение $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ имеет четыре корня: ± 2 и $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Для биквадратного уравнения подстановка $y = x^2$ подсказывается самим его видом. В других случаях найти подходящую подстановку бывает сложнее.

Пример 10. Решим уравнение $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) = 15$.

Чтобы свести уравнение к более простому, можно воспользоваться разными подстановками. Мы введём обозначение: $x^2 + x + 1 = y$. Тогда $x^2 + x + 3 = y + 2$. Получаем уравнение с переменной y: $y(y + 2) = 15$, $y^2 + 2y - 15 = 0$, $y_1 = -5$, $y_2 = 3$.

Далее надо решить два уравнения (с переменной x): $x^2 + x + 1 = 15$ и $x^2 + x + 1 = 3$. Первое уравнение корней не имеет; корнями второго уравнения являются числа -2 и 1. Исходное уравнение имеет два корня: -2 и 1.

Решение целых уравнений с помощью разложения на множители

Рассматриваемый приём основан на следующем утверждении: ***Произведение двух и более многочленов равно нулю при тех и только тех значениях переменной, при которых хотя бы один из множителей равен нулю.***

Пример 11. Решим уравнение $(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 6) = 0$.

Равенство нулю произведения $(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 6)$ означает, что $x^2 - 4 = 0$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$. Исходное уравнение распалось на два квадратных уравнения. Решим каждое из них:

1) $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$;
2) $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ответ: -2; 2; 3.

Пример 12. Решим уравнение $(3 - 2x)(6x - 1) = (2x - 3)^2$.

Если перенести выражение $(2x - 3)^2$ в левую часть уравнения, раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится квадратное уравнение; а далее можно будет воспользоваться известной формулой. Однако есть менее громоздкий путь решения, в основе которого — разложение на множители и условие равенства нулю произведения. Разберите приведённое ниже решение и прокомментируйте его шаги:

$$(3-2x)(6x-1)-(3-2x)^2=0,$$
$$(3-2x)(6x-1-(3-2x))=0,$$
$$(3-2x)(6x-1-3+2x)=0,$$
$$(3-2x)(8x-4)=0,$$
$$3-2x=0 \text{ или } 8x-4=0,$$
$$x_1=1{,}5 \text{ или } x_2=0{,}5.$$

Ответ: 1,5; 0,5.

Пример 13. Решим уравнение $2x^3-x^2-8x+4=0$.

Разложим на множители многочлен в левой части уравнения. Для этого воспользуемся способом группировки:

$$2x^3-x^2-8x+4=x^2(2x-1)-4(2x-1)=(2x-1)(x^2-4)=$$
$$=(2x-1)(x-2)(x+2).$$

Теперь нужно решить уравнение $(2x-1)(x-2)(x+2)=0$.

Доведите решение до конца самостоятельно.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 2; −2.

Пример 14. Решим уравнение $x^4-25x^2+60x-36=0$.

Левую часть уравнения можно разложить на множители, представив её в виде разности квадратов:

$x^4-(25x^2-60x+36)=0,$

$(x^2)^2-(5x-6)^2=0,$

$(x^2-5x+6)(x^2+5x-6)=0.$

Доведите решение до конца самостоятельно.

Ответ: −6; 1; 2; 3.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Какое из чисел **не** является корнем уравнения $x^3-4x^2+x+6=0$?

1) 3 2) 2 3) 1 4) −1

2. Решите уравнение:

а) $5-3(x+2)=4-5x$; б) $0,2(x-1)=6-0,4(x+2)$; в) $\frac{x}{5}-\frac{x}{2}=-3$.

3. Какое из уравнений не имеет корней?

1) $x^2+3x+1=0$
2) $x^2+2x+1=0$
3) $x^2+2x-3=0$
4) $x^2+x+3=0$

4. Установите соответствие между уравнением и числом его корней:

А. $x^2+2x+5=0$
Б. $25x^2-10x+1=0$
В. $12x^2+x-6=0$
Г. $x^2+14x+49=0$

1) один корень
2) два корня
3) корней нет

Решите уравнение (№ 5 – 6):

5. а) $5x^2-3x-2=0$;
б) $3x^2+8x-3=0$;
в) $2x^2-2x-1=0$;
г) $x^2-4x-12=0$;
д) $\frac{1}{3}x^2+x-6=0$.

6. а) $3x+x^2=0$;
б) $x^2-21=0$;
в) $2x^2-8=0$;
г) $\frac{1}{3}x^2-12=0$.

7. Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

Уравнение	*Множество корней уравнения*
А. $x^2=2x$	1) 0 и -2
Б. $x^2=-2x$	2) 0 и 2
В. $x^2-4=0$	3) 2 и -2

8. Какое из данных уравнений имеет корни, равные $x_1=-2\frac{1}{3}$, $x_2=1$?

1) $3x^2+4x+7=0$
2) $3x^2-4x-7=0$
3) $3x^2+4x-7=0$
4) $3x^2-4x+7=0$

9. Какое из следующих уравнений имеет иррациональные корни?

1) $x^2-3x-4=0$
2) $x^2-4x-3=0$
3) $x^2-4x+5=0$
4) $x^2-4x+4=0$

10. Найдите корни уравнения $(2x+9)(5-x)=0$.

11. Выясните, имеет ли корни уравнение $x^2+2x\sqrt{5}+4x=-18$.

12. При каких значениях p уравнение $x^2+px+4=0$ имеет два корня?

13. Запишите в общем виде уравнение, корнями которого являются: а) противоположные числа; б) взаимно обратные числа.

14. Найдите корни уравнения $2x^4-17x^2-9=0$.

Решите уравнение (№ 15—17):

15. $(3x-4)^2=(4-3x)(5x-2)$.

16. $x^3-6x^2-4x+24=0$.

17. $(4x^2-2x+1)(2x+1)=8(x^2-1)(x-2)$.

18. Выясните, имеет ли корни уравнение $x-6\sqrt{x}-27=0$, и если да, то найдите их.

19. Решите уравнение $(x^2-3x)(x^2-3x-8)=20$.

Решения и ответы

1. 3. **2.** а) 2,5; б) 9; в) 10. **3.** 4. **4.** А3, Б1, В2, Г1. **5.** а) –0,4; 1; б) -3; $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; г) 6; -2; д) 3; -6. **6.** а) 0; -3; б) $\sqrt{21}$; $-\sqrt{21}$; в) 2; -2; г) 6; -6. **7.** А2, Б1, В3. **8.** 3. **9.** 2. **10.** $x_1=5$, $x_2=-4{,}5$. **11.** Корней нет. **12.** $p\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$. *Решение.* Уравнение имеет два корня, если $D>0$; $D=p^2-4\cdot4=p^2-16>0$ при $p\geqslant4$ и $p\leqslant-4$. **13.** а) $x^2-m^2=0$; б) $x^2-\frac{m^2+1}{m}x+1=0$, $m\neq0$. **14.** $x_1=3$, $x_2=-3$. **15.** $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{3}$. **16.** -2; 2; 6. *Решение.* Разложим на множители левую часть уравнения, получим: $x^2(x-6)-4(x-6)=0$, т.е. $(x-6)(x^2-4)=0$, $x-6=0$ или $x^2-4=0$. Значит, уравнение имеет корни: -2; 2; 6. **17.** $\frac{3}{4}$; $-1\frac{1}{4}$. **18.** Имеет, $x=81$. *Указание.* Воспользуйтесь подстановкой $y=\sqrt{x}$. **19.** 1; 2; -2; 5. *Решение.* Введём замену $x^2-3x=y$, получим $y(y-8)=20$. Корни этого уравнения: $y_1=-2$, $y_2=10$. Вернувшись к переменной x, получим два уравнения: $x^2-3x=-2$, $x^2-3x=10$, или $x^2-3x+2=0$, $x^2-3x-10=0$. Корни первого 1 и 2, корни второго -2 и 5.

3.2. Дробно-рациональные уравнения

Теоретические сведения

Решение дробно-рационального уравнения путём приведения к целому виду

Если обе части уравнения — рациональные выражения и среди членов уравнения есть дроби с переменной в знаменателе, то такое уравнение называют *дробно-рациональным уравнением*. Например, уравнение $\frac{x}{x-1}+\frac{6}{x+1}=4$ — дробно-рациональное. Обратите внимание: уравнение $\frac{x^2-x}{2}-\frac{x+1}{3}=1$ тоже содержит дроби, но у этих дробей числовые знаменатели, поэтому это уравнение является целым.

Принципиальной особенностью дробно-рационального уравнения является то, что при его решении могут появиться так называемые *посторонние корни*. Поэтому решение дробно-рационального уравнения в качестве обязательного шага должно содержать проверку того, нет ли среди найденных чисел посторонних корней.

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения путём приведения уравнения к целому виду:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- умножают обе части уравнения на общий знаменатель;
- решают получившееся целое уравнение;
- подставляют каждый корень целого уравнения в общий знаменатель дробей; если знаменатель обращается в нуль, то корень отбрасывают.

Пример 1. Решим уравнение $\frac{x+2}{x-5}-\frac{3x}{(x-2)(x-5)}=\frac{2}{x-2}$. Общий знаменатель дробей — произведение $(x-5)(x-2)$. Умножим обе части уравнения на $(x-5)(x-2)$; получим уравнение: $(x+2)(x-2)-3x=2(x-5)$. После преобразований получим квадратное уравнение: $x^2-5x+6=0$. Его корни: $x_1=2$, $x_2=3$.

При $x=2$ знаменатель $(x-5)(x-2)=0$, т. е. число 2 — посторонний корень. При $x=3$ знаменатель не равен нулю, т. е. число 3 не является посторонним корнем.

Ответ: 3.

Решение дробно-рационального уравнения на основе условия равенства дроби нулю

Любое дробно-рациональное уравнение можно заменить равносильным уравнением вида $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — целые выражения.

А этому уравнению удовлетворяют те и только те значения переменной x, при которых $P(x) = 0$ и $Q(x) \neq 0$, т. е. оно равносильно системе $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Отсюда вытекает следующий алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

- переносят все члены уравнения в левую часть;
- преобразуют левую часть уравнения в дробь, т. е. представляют исходное уравнение в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — целые выражения;
- решают уравнение $P(x) = 0$;
- для каждого из найденных корней уравнения $P(x) = 0$ проверяют выполнение условия $Q(x) \neq 0$ и отбрасывают те числа, для которых это условие не выполняется.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{4}{4x^2-1} - \frac{x-1}{2x^2+x} = \frac{2}{2x-1}$. Представим уравнение в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$,

$$\frac{4}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x-1}{x(2x+1)} - \frac{2}{2x-1} = 0,$$

$$\frac{4x-(x-1)(2x-1)-2x(2x+1)}{x(2x-1)(2x+1)} = 0,$$

$$\frac{-6x^2+5x-1}{x(2x-1)(2x+1)} = 0,$$

$$\frac{6x^2-5x+1}{x(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Решив уравнение $6x^2 - 5x + 1 = 0$, найдём, что $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. При $x = \frac{1}{2}$ условие $x(2x-1)(2x+1) \neq 0$ не выполняется.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Заметим, что рассмотренные алгоритмы решения дробно-рациональных уравнений весьма сходны; выполняемая техническая работа практически одна и та же. Поэтому особых преимуществ какой-либо из них не имеет.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Какие из чисел -2; -1; 1; 2 не являются корнями уравнения $\frac{3(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+1)}=0$?

2. Для каждого уравнения из первой строки укажите множество его корней во второй строке.

А. $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-4}=0$ Б. $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-9}=0$ В. $\frac{(x-2)(x-3)}{x^2+9}=0$

1) -2; 2; 3 2) 2; -3; 3 3) 2; 3 4) 2 5) 3

Решите уравнение (№ 3—7):

3. а) $x+\frac{12}{x}=8$; б) $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$.

4. а) $\frac{x-1}{x+5}=\frac{3}{x-1}$; б) $\frac{x}{2x-3}=\frac{3}{x}$.

5. а) $\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+1}=1$; б) $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}=1$.

6. а) $\frac{7x^2-16x+4}{2x-4}=0$; б) $\frac{x^2-6x-7}{x^2+12x+11}=0$.

7. а) $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+4=0$; б) $\frac{1}{x}-\frac{7}{x-1}=16$.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

Решите уравнение (№ 8—13):

8. а) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x(x+1)}$; б) $\frac{1}{x}-\frac{3}{x(x+1)}+\frac{x}{x+1}=0$.

9. а) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x}{x+5}=\frac{50}{x^2-25}$; б) $\frac{2}{3x^2+4x+1}-\frac{x}{x+1}=\frac{4}{3x+1}$.

10. а) $1-\frac{1}{2-x}=\frac{x+18}{5x^2-20}$; б) $\frac{2}{3-x}+\frac{11x-9}{2x^2-18}=1$.

11. $\frac{6}{x^2-2x}-\frac{12}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$.

12. $\frac{5}{x^2+1}+x^2=5$.

Решения и ответы

1. -1; 2. **2.** А5, Б4, В3. **3.** а) 2; 6; б) $-\frac{1}{2}$; 2. **4.** а) -2; 7; б) 3. **5.** а) 3; -3; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** а) $\frac{2}{7}$; б) 7. **7.** а) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$. **8.** а) $\frac{2}{3}$; б) 1; -2. **9.** а) 2,5; б) $-\frac{2}{3}$. **10.** а) $-2{,}8$; б) $\frac{1}{2}$. **11.** 4; -10. *Решение.* Умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей $x(x-2)(x+2)$, получим уравнение $6(x+2)-12(x-2)=x^2-4$. После преобразований уравнение примет вид $x^2+6x-40=0$. Корни уравнения 4 и -10. Ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель $x(x-2)(x+2)$, значит, посторонних корней нет. **12.** -2; 0; 2. *Указание.* Нужно сделать замену, например, $x^2=t$.

3.3. Графический способ решения уравнений с одной переменной

Теоретические сведения

Графические представления часто позволяют сделать некоторые качественные заключения о корнях уравнения: проверить наличие корней; определить их число; указать промежуток, которому принадлежат корни; найти с невысокой точностью приближённые значения корней, а иногда даже найти точное значение корня.

Для того чтобы графическим способом найти корни уравнения вида $f(x)=g(x)$, нужно:

- в одной и той же системе координат построить графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$;
- найти абсциссы точек пересечения графиков.

Пример 1. Решим приближённо графически уравнение $x^3 + 0{,}5x - 4 = 0$.

Запишем данное уравнение в виде $x^3 = -0{,}5x + 4$. Построим в одной и той же системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = -0{,}5x + 4$ (рис. 3.1).

Графики пересекаются в одной точке, значит, уравнение имеет единственный корень. Абсцисса точки пересечения, т. е. корень уравнения, находится в промежутке между числами 1 и 2. А по графику видно, что он приближённо равен 1,5.

О т в е т: $x \approx 1{,}5$.

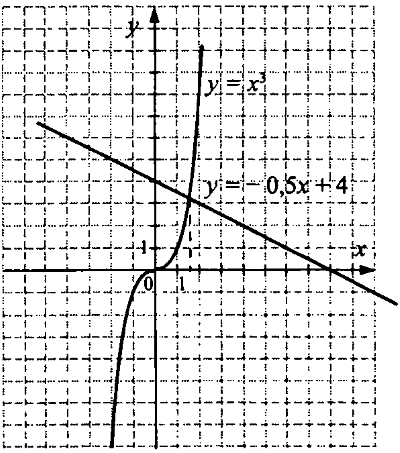


Рис. 3.1.

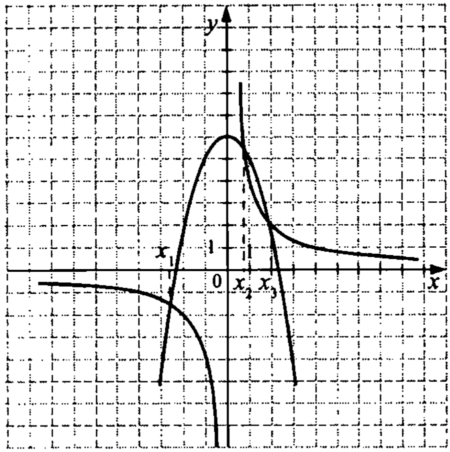


Рис. 3.2.

Пример 2. Выясним, сколько корней имеет уравнение $\frac{4}{x} = 6 - x^2$.

Построим в одной и той же системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = 6 - x^2$ (рис. 3.2). Из рисунка видно, что графики пересекаются в трёх точках. Следовательно, уравнение имеет 3 корня.

О т в е т: три корня.

Рисунок из примера 2 позволяет сделать и другие выводы о корнях уравнения. Например: один корень отрицательный, а два корня положительные; отрицательный корень заключён в промежутке между −3 и −2; больший положительный корней в точности равен 2 (в этом легко убедиться с помощью подстановки).

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Соотнесите уравнение и рисунок, на котором приведено его графическое решение.

А. $\frac{1}{x}=-x^2$ Б. $x^2=-\frac{1}{x}$ В. $\frac{1}{x}=2x$ Г. $2x=-\frac{1}{x}$

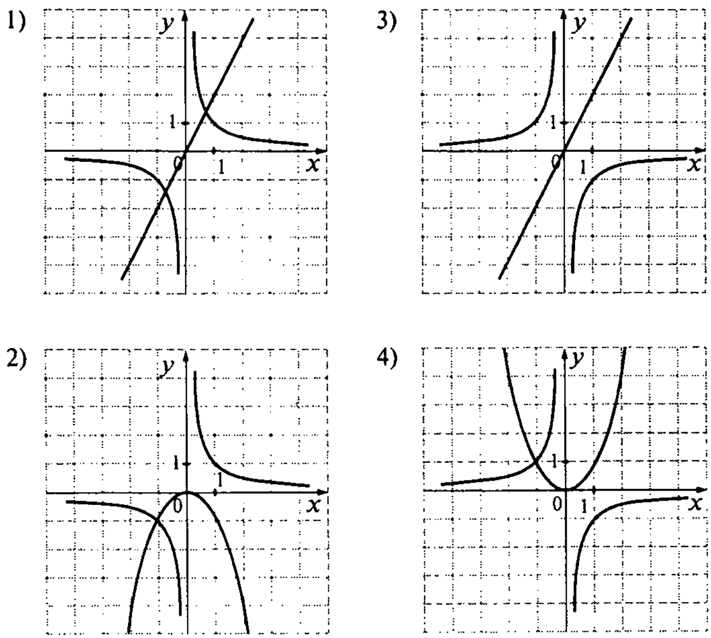


Рис. 3.3.

2. Используя графики функций $y=x^3$ и $y=2x+4$, решите уравнение $x^3-2x-4=0$ (рис. 3.4).

3. С помощью графиков определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $x^3-x-1=0$; б) $x^2+\frac{3}{x}-5=0$.

4. На рисунке 3.5 изображены графики функций $y=8x$ и $y=-x^2+9$. Какое утверждение о корнях уравнения $8x=-x^2+9$ является неверным?

1) Уравнение имеет два корня.
2) Корни уравнения имеют разные знаки.
3) Корни уравнения — противоположные числа.
4) Положительный корень меньше 3.

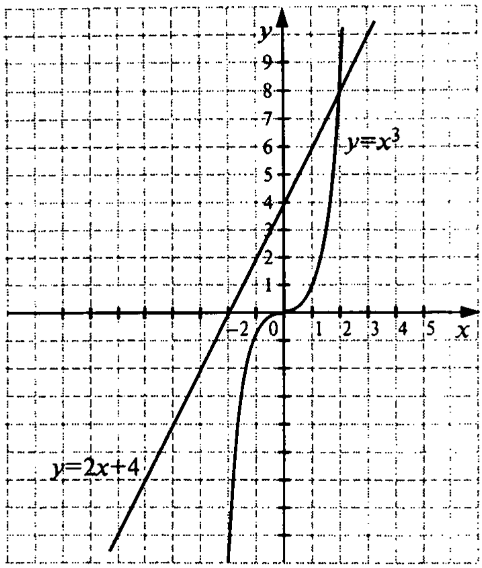


Рис. 3.4.

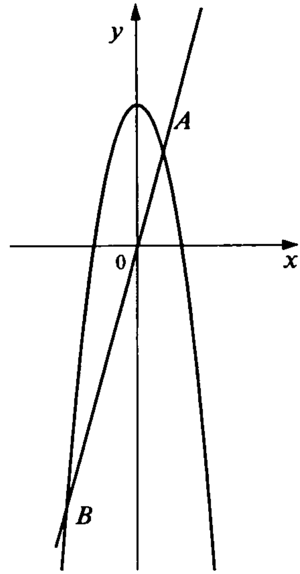


Рис. 3.5.

5. Сделав схематический рисунок, соотнесите уравнение с числом его корней.

А. $x^3 = -\frac{2}{x}$	1) один корень
Б. $\sqrt{x} = x^3$	2) два корня
В. $x^3 = 3x$	3) три корня
Г. $\frac{1}{x} = 4 - x^2$	4) нет корней

6. Какое из уравнений имеет единственный корень и этот корень положительный?

1) $\sqrt{x} = x^2 + 1$ 2) $\sqrt{x} = -x$ 3) $\frac{1}{x} = 10 - x$ 4) $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$

7. В каком из данных промежутков нет корня уравнения $x^2 - 4 = \frac{1}{x}$?

1) $[-2;-1]$ 2) $[-1;0]$ 3) $[1;2]$ 4) $[2;3]$

8. Какое из данных уравнений не имеет отрицательных корней?

1) $\frac{1}{x} = x^3$

2) $x^3 + x^2 - 1 = 0$

3) $x^3 + x^2 + 1 = 0$

4) $-\frac{2}{x} = x^2 - 8$

9. Найдите приближённо с помощью графиков корень уравнения $x^3 + x - 5 = 0$.

10. В каком промежутке находится корень уравнения $\sqrt{x} = -\frac{2}{15}x + 5$?

1) $[10;11]$ 2) $[11;12]$ 3) $[12;13]$ 4) $[13;14]$

11. Выберите промежуток, в котором лежит корень уравнения $x^3 = 1 - x^2$.

1) $[0{,}6;0{,}7]$ 2) $[0{,}7;0{,}8]$ 3) $[0{,}8;0{,}9]$ 4) $[0{,}9;1]$

12. Решите графически уравнение $x^2 - 2x = \sqrt{x} - 2$.

Решения и ответы

1. А2, Б4, В1, Г3. **2.** $x = 2$. **3.** а) Один корень; б) три корня. *Указание.* а) Представьте уравнение в виде $x^3 = x + 1$ и затем изобразите графики функций $y = x^3$ и $y = x + 1$; б) представьте уравнение в виде $x^2 - 5 = \frac{3}{x}$. **4.** 3. **5.** А4, Б1, В2, Г3. **6.** 4. **7.** 3. **8.** 2. *Указание.* Для решения сделайте схематические графики. При этом уравнение в ответе 2 надо преобразовать к виду $x^3 = -x^2 + 1$, а уравнение в ответе 3 — к виду $x^3 = -x^2 - 1$. **9.** $x \approx 1{,}5$. **10.** 2. *Указание.* Определите искомый промежуток, построив графики. **11.** 2. **12.** $x_1 = 1$, $x_2 \approx 1{,}5$. *Указание.* Приведите уравнение к виду $x^2 - 2x + 2 = \sqrt{x}$. Убедитесь с помощью подстановки, что корень, равный 1, точный.

3.4. Решение текстовых задач алгебраическим методом

Теоретические сведения

В целом процесс решения задачи алгебраическим способом состоит в переводе условия задачи на математический язык (в результате может быть получено уравнение или система уравнений, неравенство, выражение), последующем решении полученного уравнения (системы уравнений и пр.) и исследовании полученных решений на их соответствие условию задачи. В этом разделе рассмотрим решение задач с помощью уравнений.

Вообще, не существует общего способа составления уравнения по условию задачи. Каждый раз требуется найти этот способ, проанализировав данные условия и установив зависимости между ними. Рассмотрим примеры.

Задача 1. Автобус выехал из пункта A в пункт B. Через 1,5 ч вслед за ним из пункта A выехал автомобиль, который приехал в пункт B одновременно с автобусом. Чему равно расстояние между пунктами A и B, если известно, что автобус ехал со скоростью 60 км/ч, а автомобиль – со скоростью 80 км/ч?

Решение: Эту задачу можно решить арифметически, но проще решить её, составив уравнение. Обозначим расстояние (в километрах) между пунктами A и B буквой x. Тогда время движения автобуса будет равно $\frac{x}{60}$ км/ч, а время движения автомобиля $\frac{x}{80}$ км/ч. Уравнение легко составить, если *переформулировать условие задачи*: автобус затратил на путь из A в B на 1,5 ч больше, чем автомобиль. Теперь можно составить уравнение, при этом удобно число 1,5 представить в виде обыкновенной дроби:

$$\frac{x}{60}-\frac{x}{80}=\frac{3}{2}.$$

Решив уравнение, получим $x = 360$.

Ответ: 360 км.

Следует помнить, что при решении одной и той же задачи *могут быть составлены разные уравнения*, например, при описанном ходе решения можно было записать уравнение и по-другому: $\frac{x}{80}+\frac{3}{2}=\frac{x}{60}$ или $\frac{x}{60}-\frac{3}{2}=\frac{x}{80}$. Очевидно, что они равносильны уравнению, составленному сначала.

Можно составить и «непохожее» уравнение, если сначала выяснить, какое расстояние будет пройдено автобусом к тому моменту, когда из пункта A отправляется автомобиль. В этом случае удобно начертить схематический рисунок (рис. 3.6). Вообще, *рисунок часто помогает составить уравнение.*

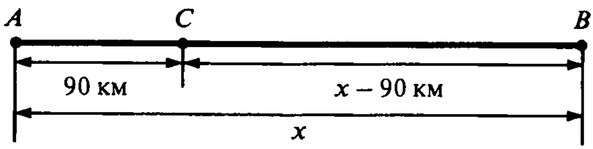


Рис. 3.6.

К моменту выезда автомобиля автобус пройдёт расстояние AC, равное $60 \cdot 1{,}5 = 90$ (км). И если, как и в предыдущем решении, буквой x обозначить расстояние AB (в км), то автобусу останется проехать $(x - 90)$ км. На это расстояние у него уйдёт столько же времени, сколько на весь путь у автомобиля. Составьте самостоятельно уравнение на основе этого условия. Понятно, что при его решении должен быть получен тот же ответ.

Совсем *не обязательно обозначать буквой величину, о которой говорится в вопросе задачи.* Если, например, в данной задаче обозначить буквой x время движения автомобиля (в ч), то получим более простое уравнение: $80x = 60(x + 1{,}5)$. Решите его. Важно не забыть, что, используя найденное значение x, надо ещё найти расстояние между городами.

Задача 2. Морская вода содержит 5% соли. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составила 1,5%?

Р е ш е н и е: Это так называемая «задача на концентрацию». При составлении уравнения в этой задаче используется условие, что масса соли в растворе не изменяется при добавлении пресной воды.

Обозначим буквой x массу пресной воды (в кг), которую надо добавить. Имеем:

$$\underbrace{\text{масса морской воды}}_{30} \qquad \underbrace{\begin{array}{c}\text{масса полученного раствора}\\ \text{морской воды}\end{array}}_{30 + x}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c}\text{масса соли}\\ \text{в 30 кг морской воды}\end{array}}_{30 \cdot 0{,}05} = \underbrace{\begin{array}{c}\text{масса соли}\\ \text{в полученном растворе}\end{array}}_{(30 + x) \cdot 0{,}015}$$

Решим уравнение $(30 + x) \cdot 0{,}015 = 30 \cdot 0{,}05$. Упростим его, «избавившись» от дробей умножением обеих частей на 1000, а затем «сокращением» обеих частей на 15, получим:

$(30 + x) \cdot 15 = 30 \cdot 50,$

$30 + x = 2 \cdot 50,$

$x = 70.$

О т в е т: 70 кг.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Прочитайте задачу:

Скорость автобуса на 25 км/ч меньше скорости автомобиля. Расстояние от города до посёлка автобус проезжает за 3 ч, а автомобиль — за 2 ч. Каково расстояние между городом и посёлком?

Пусть расстояние между городом и посёлком равно x км. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $3x = 2x + 25$ 3) $\frac{x}{3} = \frac{x}{2} + 25$

2) $3x = 2x - 25$ 4) $\frac{x}{3} = \frac{x}{2} - 25$

2. Прочитайте задачу:

От турбазы до автостанции турист доехал на велосипеде за 2 ч. Чтобы пройти это расстояние пешком, ему понадобилось бы 6 ч. Известно, что идёт он со скоростью, на 4 км/ч меньшей, чем едет на велосипеде. Найдите пешеходную скорость туриста.

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена скорость (в км/ч), с которой турист идёт пешком.

1) $6x = 2(x - 4)$ 2) $6x = 2(x + 4)$ 3) $2x = 6(x - 4)$ 4) $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 4$

3. Прочитайте задачу:

Расстояние между двумя причалами по реке 14 км. На путь от одного причала до другого против течения моторная лодка затратила на 1 ч больше, чем на обратный путь по течению. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч.

Пусть буквой x обозначена собственная скорость лодки (в км/ч). Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $\frac{14}{x-2} = \frac{14}{x+2} = 1$ 3) $14(x + 2) - 14(x - 2) = 1$

2) $\frac{14}{x+2} - \frac{14}{x-2} = 1$ 4) $14(x - 2) - 1 = 14(x + 2)$

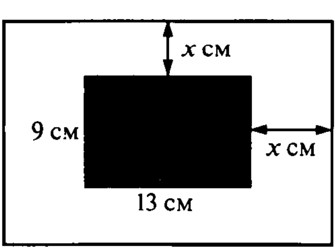
4. Все имеющиеся карандаши можно разложить в 3 большие коробки или в 5 маленьких. В маленькую коробку помещается на 6 карандашей меньше, чем в большую. Сколько всего имеется карандашей?

Пусть буквой x обозначено число карандашей в маленькой коробке. Выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 6$ 3) $5x = 3(x + 6)$

2) $3x = 5(x - 6)$ 4) $5x = 3(x - 6)$

5. Фотографию прямоугольной формы, размеры которой 9×13 см, наклеили на белую бумагу так, что вокруг всей фотографии получилась белая окантовка одной и той же ширины. Площадь, которую занимает фотография с окантовкой, равна 221 см^2. Какова ширина окантовки?



Выберите уравнение, которое соответствует условию задачи.

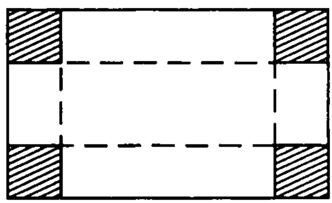
1) $117 + 9x \cdot 2 + 13x \cdot 2 = 221$
2) $(9 + x)(13 + x) = 221$
3) $(13 + 2x) \cdot 9 = 221$
4) $(9 + 2x)(13 + 2x) = 221$

6. Путь от посёлка до железнодорожной станции велосипедист проехал за 2 ч, а пешеход прошёл за 4,2 ч. Найдите длину пути от посёлка до станции, если известно, что скорость велосипедиста на 5 км/ч больше скорости пешехода.

Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой x: 1) скорость велосипедиста; 2) длину пути от посёлка до станции.

7. Из прямоугольного листа картона, размеры которого 56 см и 32 см, надо сделать коробку без крышки. Для этого по углам листа вырезают одинаковые квадраты и загибают края вверх. Чему должна быть равна сторона вырезаемого квадрата, чтобы дно коробки имело площадь 640 см^2?

Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой x длину стороны вырезаемого квадрата (в см).



Решите задачу (№ 8—13):

8. От города до посёлка автомобиль доехал за 3 ч. Если бы водитель увеличил скорость на 25 км/ч, то затратил бы на этот путь 2 ч. Чему равно расстояние от города до посёлка?

9. Лодка проплыла от одной пристани до другой по течению реки за 3 ч, а обратный путь против течения у неё занял 4 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

10. Лодка плыла 5 ч против течения реки и затем 2 ч по течению. Всего она проплыла 40 км. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Чему равна собственная скорость лодки?

11. Чему равны стороны прямоугольника, у которого одна из сторон на 6 см больше другой, а площадь равна 91 см^2?

12. Ковёр прямоугольной формы со сторонами 4 м и 2,5 м покрывает $\frac{5}{12}$ площади комнаты. Какова площадь комнаты?

13. В пакете 700 г смеси сухофруктов, состоящей из яблок, изюма и чернослива. Яблок в ней в 3 раза меньше, чем изюма, и на 100 г больше, чем чернослива. Сколько яблок в данной порции смеси?

14. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились в 9 км от пункта A. Найдите скорость каждого, если известно, что турист, вышедший из пункта A, шёл со скоростью, на 1 км/ч большей, чем другой турист, и сделал в пути 30-минутную остановку.

15. Группа туристов отправляется на лодке от лагеря по течению реки с намерением вернуться обратно через 5 ч. Скорость течения реки 2 км/ч, скорость лодки в стоячей воде 8 км/ч. На какое наибольшее расстояние по реке они могут отплыть, если перед возвращением они планируют пробыть на берегу 3 ч?

16. Для сада выделили прямоугольный участок земли. Длина изгороди окажется меньше, если участок при той же площади будет иметь квадратную форму. Для этого надо одну сторону участка увеличить на 48 м, а другую уменьшить на 60 м. Какова длина стороны квадратного участка?

17. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 80 км, одновременно выехали два автобуса. Во время пути один из автобусов сделал остановку на 15 мин, но в пункт B прибыл на 5 мин раньше второго. Известно, что его скорость в 1,5 раза больше скорости другого. Найдите скорость каждого автобуса.

18. За определённое время на автозаводе должны были собрать 160 автомобилей. Первые 2 ч выполнялась установленная почасовая норма, а затем стали каждый час собирать на 3 автомобиля больше. В результате за 1 ч до срока было собрано 155 автомобилей. Сколько автомобилей в час планировали собирать первоначально?

19. Сколько граммов сахарного сиропа, концентрация которого 25%, надо добавить к 200 г воды, чтобы в полученном растворе содержание сахара составило 5%?

20. Влажность свежих грибов 90%, а сухих – 15%. Сколько сухих грибов получится из 1,7 кг свежих?

Решения и ответы

При выполнении заданий 1—7 задачу решать не требуется, нужно только составить уравнение. При этом даже в заданиях с выбором ответа целесообразно непосредственно составить уравнение по условию задачи и затем уже искать это уравнение или равносильное ему среди предложенных.

1. 4. **2.** 2. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 4. Из рисунка видно, что стороны прямоугольного листа бумаги на $2x$ больше соответствующих сторон фотографии и равны $(13 + 2x)$ см и $(9 + 2x)$ см. Получаем уравнение: $(13 + 2x)(9 + 2x) = 221$. **6.** 1) $4{,}2(x - 5)\ 2x$. 2) $\frac{x}{2} - 5 = \frac{x}{4{,}2}$. **7.** $(56 - 2x)(32 - 2x) = 640$. При решении этой задачи часто допускают ошибку, при которой из площади всего листа картона вычитают $4x^2$. На самом деле для составления уравнения надо найти площадь маленького прямоугольника, изображающего дно коробки. Каждая из его сторон на $2x$ меньше соответствующей стороны большого прямоугольника, поэтому его площадь равна $(56 - 2x)(32 - 2x)$. **8.** 150 км. Решение. Пусть скорость автомобиля равна x км/ч. Получаем уравнение: $3x = 2(x + 25)$, откуда $x = 50$. Так как скорость автомобиля 50 км/ч, а путь от города до посёлка был проделан за 3 ч, то длина всего пути равна $50 \cdot 3 = 150$ (км). **9.** 14 км/ч. (Уравнение: $3(x + 2) = 4(x - 2)$, где x — собственная скорость лодки в км/ч.) **10.** 7 км/ч. (Уравнение: $5(x - 3) + 2(x + 3) = 40$, где x — собственная скорость лодки в км/ч). **11.** 7 см и 13 см. **12.** 24 м^2. Решение. Задачу можно решить арифметически, но легче найти ответ с помощью уравнения. Пусть площадь комнаты x м^2; так как площадь ковра составляет $\frac{5}{12}$ площади комнаты, то она равна $\frac{5}{12}x$ м^2. Получаем уравнение: $\frac{5}{12}x = 4 \cdot 2{,}5$. **13.** 160 г. (Уравнение: $x + 3x + (x - 100) = 700$.) **14.** 6 км/ч и 5 км/ч. *Подсказка:* из условия следует, что до встречи первый турист был в пути на 0,5 ч дольше, чем второй. **15.** На 7,5 км. *Подсказка:* надо определить сначала, сколько времени должно уйти собственно на движение по течению и обратно. **16.** 240 м. **17.** 80 км/ч и 120 км/ч. *Подсказка:* выясните, какой автобус был дольше в пути и на сколько минут. **18.** 20 автомобилей в час. **19.** 50 г. **20.** 200 г сухих грибов.

§ 4. Уравнения с двумя переменными и их системы

Что надо знать и уметь:

- знать и понимать термины «уравнение с двумя переменными», «решение уравнения с двумя переменными», «решение системы уравнений с двумя переменными», «график уравнения с двумя переменными»; понимать эквивалентность формулировок «пара чисел $(x;\ y)$ является решением уравнения» и «точка $(x;\ y)$ принадлежит графику уравнения»;
- находить решения уравнения с двумя переменными;
- решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными и системы, содержащие нелинейные уравнения;
- использовать графические представления для определения числа решений системы уравнений с двумя переменными;
- отвечать на вопросы, связанные с исследованием уравнений и систем уравнений, в том числе содержащих буквенные коэффициенты, используя при необходимости графические представления;
- решать задачи геометрического содержания на координатной плоскости с использованием алгебраического метода и с опорой на графические представления;
- строить графики уравнений с двумя переменными;
- решать текстовые задачи алгебраическим методом, составляя систему уравнений.

4.1. Уравнение с двумя переменными

Теоретические сведения

Решения уравнения с двумя переменными

Любое равенство, содержащее две переменные, например $2x - y = 8$, $xy = 12$, $x^2 + y^2 = 9$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10$, можно рассматривать как уравнение с двумя переменными.

Определение. ***Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.***

Например, решением уравнения $x(y - 4) = 6$ является пара $x = 2$, $y = 7$. В самом деле, $2 \cdot (7 - 4) = 6$ — верное равенство. Можно указать ещё сколько угодно решений этого уравнения. Для этого выразим из уравнения y через x: $y=\frac{6}{x}+4$. Выбирая x произвольно (вместо x можно подставлять любое число, кроме 0), будем находить соответствующие значения y. Каждая такая пара — это решение уравнения $x(y - 4) = 6$.

Вообще, уравнение с двумя переменными, как правило, имеет бесконечное множество решений. Но могут встретиться и исключения. Так, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ имеет единственное решение (0; 0), а уравнение $x^2 + y^2 = -1$ решений не имеет.

Пару чисел, являющихся решением уравнения с двумя переменными, можно записывать и в виде двух равенств $x = a$, $y = b$, и в виде $(a; b)$ как координаты точки на плоскости. При записи решения в круглых скобках на первом месте обязательно ставят значение той переменной, которая по алфавиту идёт первой. Запись значений переменных в другом порядке приводит к ошибке. Так, пара (–2; 1) является решением уравнения $x(y - 4) = 6$, а пара (1; –2) решением этого уравнения не является.

Пример 1. Можно ли 140 яиц разложить в коробки двух видов, по 10 штук и по 12 штук, так, чтобы свободных ячеек в использованных коробках не осталось?

Решение: Пусть для такой раскладки требуется x коробок для 10 яиц и y коробок для 12 яиц. Приходим к уравнению $10x + 12y = 140$. Если нам удастся найти решения этого уравнения (одно или несколько), которые составлены из натуральных чисел, то ответ на вопрос задачи будет утвердительным.

Разделим обе части уравнения на 2 и выразим одну переменную через другую, например, x через y:

$$x = \frac{70 - 6y}{5}.$$

Далее воспользуемся способом перебора: будем подставлять в формулу значения y и вычислять соответствующие значения x. Понятно, что надо брать такие значения y, при которых $70 - 6y > 0$ и $70 - 6y$ делится на 5. Получим две такие пары: если $y = 5$, то $x = 8$; если $y = 10$, то $x = 2$.

Ответ: можно; следует взять 8 коробок для 10 яиц и 5 коробок для 12 яиц или 2 коробки для 10 яиц и 10 коробок для 12 яиц.

График уравнения с двумя переменными

Любому уравнению, связывающему переменные x и y, соответствует некоторое множество точек координатной плоскости — *график этого уравнения*.

Точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с двумя переменными в том и только в том случае, когда пара чисел $(x; y)$ является решением этого уравнения.

Графиком линейного уравнения $ax + by = c$, где коэффициенты a и b не равны нулю одновременно, является прямая. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение принимает вид $by = c$, т. е. $y = \frac{c}{b}$, и прямая параллельна оси x. Если $a \neq 0$ и $b = 0$, то уравнение принимает вид $ax = c$, т. е. $x = \frac{c}{a}$, и прямая параллельна оси y.

На рисунке 4.1 изображены графики уравнений $2x + 3y = 6$, $2y = 5$ и $\frac{1}{2}x = -1$.

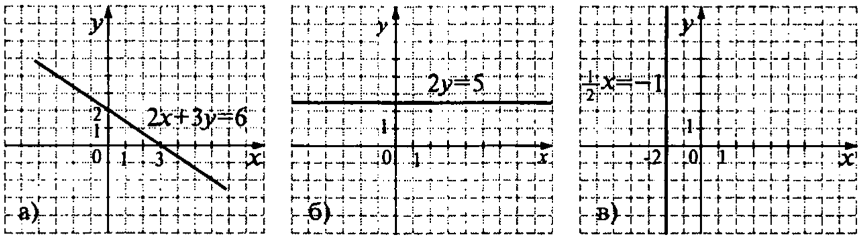


Рис. 4.1.

Любое уравнение вида $ax + by = c$, где $b \neq 0$, можно решить относительно переменной y. При этом получается уравнение вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа. Например, уравнение $2x + 3y = 6$ запишется как $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

От значения k зависит угол, который прямая – график уравнения $y = kx + l$ — образует с положительным направлением оси x. Поэтому k называют ***угловым коэффициентом прямой*** $y = kx + l$. Коэффициент l — это ордината пересечения прямой с осью y, поэтому его называют ***начальной ординатой***.

При $b = 0$ уравнение принимает вид $y = kx$. В этом случае график проходит через начало координат. При $k > 0$ прямая проходит через первый и третий координатные углы и «поднимается вверх»; при $k < 0$ прямая проходит через второй и четвёртый координатные углы и «опускается вниз» (рис. 4.2). Чем больше $|k|$, тем круче прямая (рис. 4.3).

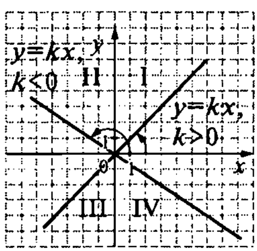


Рис. 4.2.

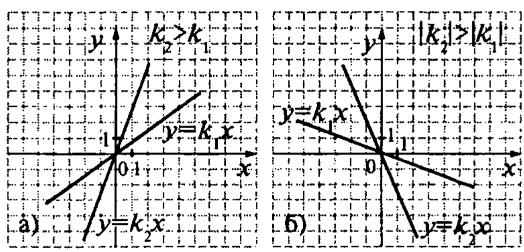


Рис. 4.3.

Если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны; если две прямые имеют разные угловые коэффициенты, то эти прямые пересекаются. Так, прямые $y = -2x + 1$ и $y = -2x + 5$ параллельны, а прямые $y = -2x + 1$ и $y = 2x - 1$ пересекаются.

Уравнение прямой в виде $y = kx + l$ удобно тем, что оно позволяет без построения графика представить положение прямой в координатной плоскости. В ряде случаев этого бывает достаточно для решения задачи.

Пример 2. Выясним, в каком координатном углу находится точка пересечения прямых $y = -7x + 6$ и $y = -\frac{1}{3}x$.

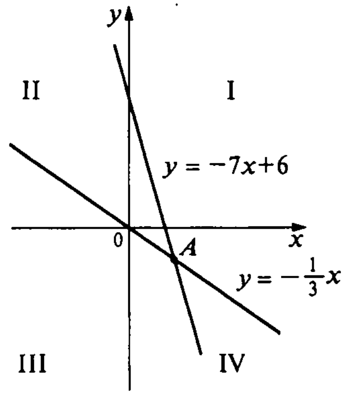


Рис. 4.4.

Ответ получаем с помощью схематического рисунка (рис. 4.4). Прямая $y = -7x + 6$ пересекает ось y в точке, расположенной в верхней полуплоскости, и «идёт» сверху вниз. Прямая $y = -\frac{1}{3}x$ проходит через начало координат и расположена во втором и четвёртом координатных углах. Значит, точка пересечения прямых находится в четвёртом координатном углу.

Пример 3. Запишем уравнение прямой, параллельной прямой $x + 2y = 5$ и проходящей через точку $A(1; 3{,}5)$.

Выразим из уравнения $x + 2y = 5$ переменную y черех x:

$$y = -0{,}5x + 2{,}5.$$

Значит, искомое уравнение имеет вид $y = -0{,}5x + l$. Подставим в это уравнение координаты точки A. Получим: $3{,}5 = -0{,}5 + l$, $l = 4$.

Ответ: $y = -0{,}5x + 4$, или $x + 2y = 8$.

Что представляют собой графики некоторых других уравнений?

- Графиком уравнения $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, является парабола.
- Графиком уравнения $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, служит гипербола.
- Графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где $r > 0$, является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным r.

Нужно уметь распознавать уравнения парабол и гипербол и в случаях, когда переменная y не выражена явно. Например, уравнением $x^2 - \frac{1}{2}y = 2x$ задаётся парабола. В самом деле, выразив y через x, получим уравнение $y = 2x^2 - 4x$ (рис. 4.5). А уравнением $xy = -4$ задаётся гипербола; её можно описать уравнением $y = -\frac{4}{x}$ (рис. 4.6).

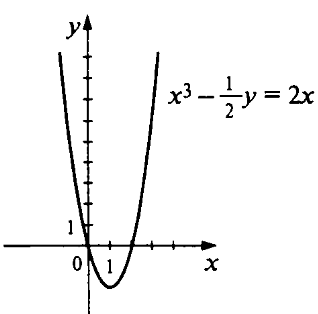


Рис. 4.5.

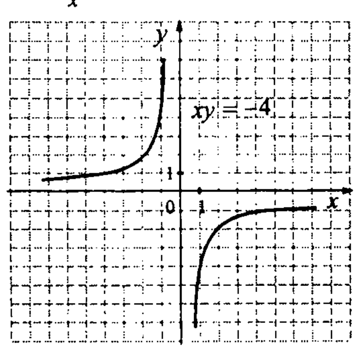


Рис. 4.6.

Пример 4. Построим график уравнения $y^2 - x^2 = 0$.

Р е ш е н и е: Разложим левую часть уравнения на множители и воспользуемся условием равенства нулю произведения:

$$(y - x)(y + x) = 0;$$

отсюда $y = x$ или $y = -x$.

Значит, графиком служит объединение прямых $y = x$ и $y = -x$ (рис. 4.7).

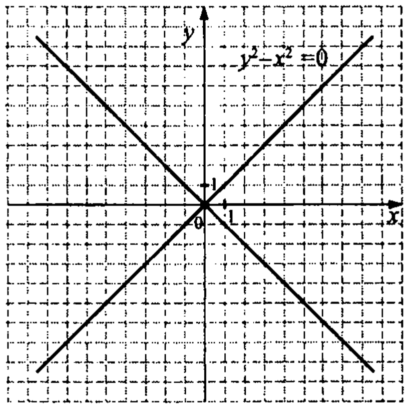


Рис. 4.7.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Какая из данных пар чисел является решением уравнения $x(y + 3) = 2$?

1) $x = 2, y = 3$ 3) $x = -2, y = -4$
2) $x = 2, y = -3$ 4) $x = -4, y = -2$

2. Графику какого из данных уравнений точка $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ **не** принадлежит?

1) $y = 2x - \frac{2}{3}$ 3) $6y - 12x^2 = -1$
2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$ 4) $x^2 + y^2 = 13$

3. Для каждого уравнения укажите название его графика.

А. $y = \frac{10}{x}$ 1) прямая
Б. $y = 1 - 10x$ 2) парабола
В. $x^2 + y^2 = 100$ 3) гипербола
Г. $y = 10x^2$ 4) окружность

4. Уравнения прямой, параболы и гиперболы записаны двумя способами. Укажите эти пары.

А. $3x + 2y = 7$ — 1) $y = -\frac{7}{x}$

Б. $x^2 - \frac{1}{2}y = 7 - x$ — 2) $y = -1{,}5x + 3{,}5$

В. $xy + 7 = 0$ — 3) $y = 2x^2 + 2x - 14$

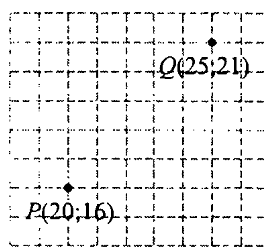
5. Какая из данных прямых пересечёт прямую $y = 100$ в точке с меньшей абсциссой?

1) $y = 0{,}1x$ 2) $y = \frac{1}{3}x$ 3) $y = 3x$ 4) $y = 10x$

6. Какое утверждение относительно прямых $y = 2x + 5$ и $y = 2x - 5$ верно?

1) Прямые пересекаются в точке (0; 5).
2) Прямые пересекаются в точкеп (0; −5).
3) Прямые параллельны друг другу.
4) Прямые параллельны прямой $y = 5x + 2$.

7. На координатной плоскости отмечены точки P и Q. Какое уравнение задаёт прямую, проходящую через эти точки?



1) $x + y = 36$
2) $x + y = 46$
3) $x - y = 4$
4) $x - y = 5$

8. Укажите уравнение прямой, которая имеет две общие точки с параболой $y = x^2 + 1$.

1) $y = -10$ 2) $y = 0$ 3) $y = 1$ 4) $y = 10$

9. Какая из данных парабол пересекает ось абсцисс?

1) $y = x^2 + 7$ 2) $y = -x^2 - 8$ 3) $y = x^2 - x + 7$ 4) $y = x^2 - 8x + 7$

10. Какая из прямых пересекает график уравнения $y = -\frac{6}{x}$ в двух точках?

1) $y = -3x$ 2) $y = 2x$ 3) $y = -5$ 4) $x = 4$

11. Можно ли разложить 132 карандаша в коробки по 12 штук и по 18 штук так, чтобы все коробки были заполнены?

12. Фирма предоставляет в аренду микроавтобусы вместимостью 9 и 12 пассажиров. Сколько автобусов каждого вида надо заказать для перевозки 117 человек, чтобы свободных мест в автобусах не было и количество автобусов было наименьшим?

13. Окружность с центром в начале координат проходит через точку $A(-1;\,3)$. Проходит ли эта окружность через точку $B(\sqrt{2};\,-2\sqrt{2})$?

14. Парабола $y=ax^2+bx+c$ с вершиной в точке $A(0;\,-3)$ проходит через точку $B(6;\,15)$. В каких точках эта парабола пересекает ось x?

15. Известно, что парабола $y=ax^2+bx+c$ проходит через точку $B\left(1;-\frac{1}{4}\right)$ и её вершина находится в начале координат. Запишите уравнение параболы и определите, в каких точках она пересекает прямую $y=-9$.

16. Постройте график уравнения $x^2-4xy+4y^2=1$.

Решения и ответы

1. 3. **2.** 4. **3.** А3, Б1, В4, Г3. **4.** А2, Б3, В1. **5.** 4. *Указание.* Изобразите схематические графики. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 4. **10.** 1. **11.** Можно; 2 коробки по 12 штук (маленькие) и 6 по 18 (большие), 5 маленьких коробок и 4 больших, 8 маленьких и 2 больших. **12.** *Ответ*: один девятиместный и 9 двенадцатиместных автобусов. *Решение:* Пусть x — количество девятиместных автобусов, y — количество двенадцатиместных автобусов. Составим уравнение: $9x + 12y = 117$ или после деления обеих его частей на 3: $3x + 4y = 39$. Выразим из него y: $y=\frac{3(13-x)}{4}$. Будем искать решения уравнений, в которых x и y — натуральные числа или одно из них равно нулю (в этом случае заказываются автобусы одного вида). Всего получим четыре пары: $x = 13$, $y = 0$; $x = 9$, $y = 3$; $x = 5$, $y = 6$; $x = 1$, $y = 9$. В первом случае имеем 13 автобусов, во втором $9 + 3 = 12$ автобусов, в третьем $5 + 6 = 11$ автобусов и в четвёртом $1 + 9 = 10$ автобусов. Выбираем последний случай. **13.** Проходит. *Указание.* Составьте уравнение окружности. **14.** $(0;\sqrt{6})$ и $(0;-\sqrt{6})$. *Решение.* Так как вершина параболы находится на оси y в точке с ординатой -3, её уравнение имеет вид: $y=ax^2-3$; найдём a, подставив в него координаты точки B: $a\cdot 36-3=15$, $a=\frac{1}{2}$. Решив уравнение $\frac{1}{2}x^2-3=0$, найдём, что парабола пересекает ось x в точках $x=\pm\sqrt{6}$. **15.** $y=-\frac{1}{4}x^2$, $(-6;-9)$, $(6;-9)$. *Решение.* Уравнение параболы имеет вид:

$y=ax^2$; найдём a, подставив в него координаты точки B: $a=-\frac{1}{4}$. Точки пересечения параболы $y=-\frac{1}{4}x^2$ с прямой $y=-9$ найдём из уравнения $-\frac{1}{4}x^2=-9$; $x=\pm 6$. **16.** Графиком уравнения являются две параллельные прямые $x-2y=1$ и $x-2y=-1$. *Решение.* Представим левую часть уравнения в виде $(x-2y)^2$, получим уравнение с двумя переменными $(x-2y)^2=1$. Отсюда $x-2y=1$ или $x-2y=-1$. Значит, графиком служит объединение прямых $x-2y=1$ и $x-2y=-1$.

4.2. Системы уравнений с двумя переменными

Теоретические сведения

Основные понятия

В тех случаях, когда нужно найти общие решения двух или более уравнений, говорят, что требуется *решить систему уравнений*.

Определение. ***Пару чисел, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство, называют решением системы.***

Например, пара (2; −3) является решением системы $\begin{cases} xy=-6, \\ x+y=-1, \end{cases}$ а пара (3; −2) её решением не является. (В последнем случае пара удовлетворяет только первому уравнению системы.)

Решить систему уравнений — это значит найти все её решения или убедиться, что их нет.

Графическая интерпретация системы двух уравнений с двумя переменными

Каждая точка пересечения графиков уравнений, входящих в систему, даёт нам пару чисел — решение системы. Сколько у графиков общих точек, столько решений имеет система.

На рис. 4.8 изображены графики уравнений $y=x^2-2x$, $y=5x$, $y=0{,}5x-4$. Из рисунка видно, что:

система уравнений $\begin{cases} y=5x, \\ y=0{,}5x-4 \end{cases}$ имеет единственное решение;

система уравнений $\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=0{,}5x-4 \end{cases}$ не имеет решений;

система уравнений $\begin{cases} y=x^2-2x, \\ y=5x \end{cases}$ имеет два решения (одна точка пересечения параболы и прямой просто не поместилась на рисунке, но парабола, которая «растёт» быстрее, обязательно «догонит» прямую).

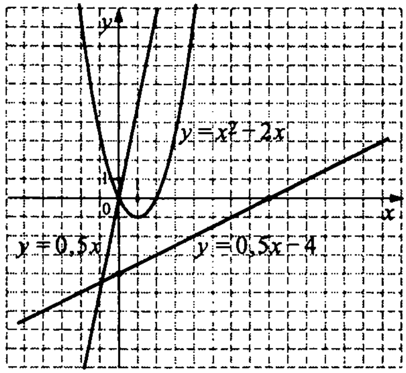


Рис. 4.8.

Графические соображения позволяют, в частности, исследовать вопрос о числе решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Возможны три случая:

- если прямые — графики уравнений системы — пересекаются, то система имеет единственное решение;
- если прямые параллельны, то система не имеет решений;
- если прямые совпадают, то система имеет бесконечное множество решений.

Все эти случаи проиллюстрированы примерами на рис. 4.9.

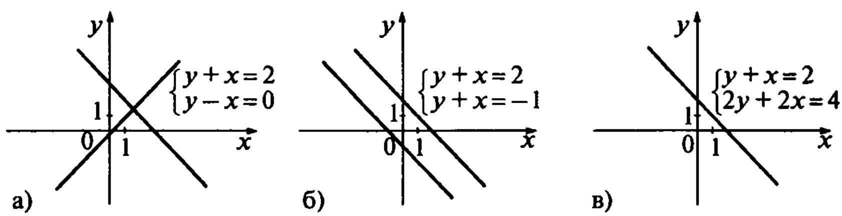


Рис. 4.9.

Алгебраическое решение систем двух уравнений с двумя переменными

Вам известны два основных способа решения систем уравнений: *способ сложения* и *способ подстановки*. Суть каждого из них состоит в том, чтобы исключить какую-либо переменную и получить уравнение, содержащее только одну переменную.

Систему двух линейных уравнений с двумя переменными можно, вообще говоря, решить любым из этих способов, но более удобным является способ сложения.

Чтобы решить систему двух уравнений с двумя переменными способом сложения нужно:

- преобразовать уравнения, подобрав соответствующие множители так, чтобы коэффициенты при какой-либо из переменных стали противоположными числами;

- сложить левые и правые части уравнений;
- решить получившееся уравнение с одной переменной;
- найти соответствующие значения второй переменной.

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x+5y=8. \end{cases}$ Исключим переменную x. Для этого умножим обе части первого уравнения на 3, а обе части второго уравнения на -2. Получим: $\begin{cases} 6x+9y=18, \\ -6x-10y=-16. \end{cases}$ и после сложения уравнений получим: $y=-2$. Значение x найдём из первого уравнения: $2x-6=6$, $x=6$.

Ответ: $x=6$, $y=-2$.

Способ подстановки используют, если из какого-либо уравнения системы можно выразить одну переменную через другую. В частности, он применим в тех случаях, когда одно из уравнений системы является линейным.

Чтобы решить систему двух уравнений с двумя переменными способом подстановки, нужно:

- выразить из какого-либо уравнения одну переменную через другую;
- подставить полученное выражение во второе уравнение;
- решить получившееся уравнение с одной переменной;
- найти соответствующие значения второй переменной.

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2+y^2=9-2xy. \end{cases}$

Выразим из уравнения $x-y=7$ переменную x и подставим вместо x выражение $7+y$ во второе уравнение системы, получим уравнение: $(7+y)^2+y^2=9-2y(7+y)$. (Доведите решение до конца.)

Ответ: $x_1=5, y_1=-2; x_2=2, y_2=-5$.

Пример 3. Решим систему уравнений $\begin{cases} 4x+3y=-1, \\ 2x^2-y=11. \end{cases}$

В данном случае целесообразно выразить переменную y из второго уравнения: $y=2x^2-11$. После подстановки вместо y выражения $2x^2-11$ в первое уравнение получим уравнение с одной переменной: $4x+3\cdot(2x^2-11)=-1$. Выполнив простые преобразования, придём к квадратному уравнению $3x^2+2x-16=0$. (Доведите решение до конца.)

Ответ: $x_1=2, y_1=-3; x_2=-2\frac{2}{3}, y_1=3\frac{2}{9}$.

Обратите внимание: если бы мы выражали какую-нибудь переменную из линейного уравнения, то дальше нам пришлось бы иметь дело с дробными коэффициентами и преобразования были бы более трудоёмкими.

Иногда способы сложения и подстановки применяют не для исключения какой-либо переменной, а для замены исходной системы более простой. В приведённых ниже примерах предлагается идея решения и даётся ответ, а довести решение до конца в каждом случае нужно самостоятельно.

Пример 4. Решим систему уравнений $\begin{cases} xy - y = 1, \\ xy + x = 4. \end{cases}$

Эту систему, в принципе, можно решить методом подстановки, выразив, например, переменную y из первого уравнения. Но тогда потом придётся решать дробное уравнение. Поэтому воспользуемся методом сложения и исключим произведение xy: $\begin{cases} -xy + y = -1, \\ xy + x = 4, \end{cases}$ получим: $x + y = 3$. Далее можно решить способом подстановки систему $\begin{cases} xy - y = 1, \\ x + y = 3, \end{cases}$ в которой одно из уравнений является линейным. (Выразите x через y.)

О т в е т: $x = 2, y = 1$.

Пример 5. Решим систему уравнений $\begin{cases} x + y = 7, \\ (x^2 - y^2)(x - y) = 175. \end{cases}$

Если сразу прибегнуть к подстановке, выразив какую-нибудь переменную из первого уравнения, то это приведёт к громоздким преобразованиям. Поэтому перепишем второе уравнение системы в виде $(x + y)(x - y)^2 = 175$. Подставив вместо суммы $x + y$ её значение — число 7, получим уравнение $7(x - y)^2 = 175$, т. е. $(x - y)^2 = 25$. Приходим к системе: $\begin{cases} x + y = 7, \\ (x - y)^2 = 25. \end{cases}$ Так как $(x - y)^2 = 25$, если $x - y = 5$ или $x - y = -5$, то эта система «распадается» на две системы линейных уравнений.

О т в е т: $x_1 = 6, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 6$.

При решении систем уравнений, так же как и при решении уравнений с одной переменной, бывает полезен *метод замены переменных.*

Пример 6. Решим систему уравнений $\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19, \\ x + 3xy + y = -35. \end{cases}$ Здесь удобно ввести такую замену: $x + y = a$, $xy = b$. Получим систему с переменными a и b: $\begin{cases} 5a + 2b = -19, \\ a + 3b = -35. \end{cases}$ Эта система линейных уравнений имеет одно решение: $a = 1$, $b = -12$. Далее возвращаемся к переменным x и y и решаем систему $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-12. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 4, y_1 = -3; x_2 = -3, y_2 = 4$.

Пример 7. Решим систему уравнений $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=4, \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=9. \end{cases}$

Введём замену $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$. Тогда получим $\begin{cases} 2a+b=4, \\ a-3b=9. \end{cases}$ Отсюда $a = 3$, $b = -2$. Поэтому $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{2}$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Укажите пару чисел, являющихся решением системы уравнений $\begin{cases} 2x+7y=4, \\ x+2y=-1. \end{cases}$

1) (9; –2) 2) (1; –1) 3) (–5; 2) 4) (2; –5)

2. Решением какой из данных систем уравнений является пара чисел (–1; 3)?

1) $\begin{cases} 3x-y=0, \\ x-y=-4 \end{cases}$

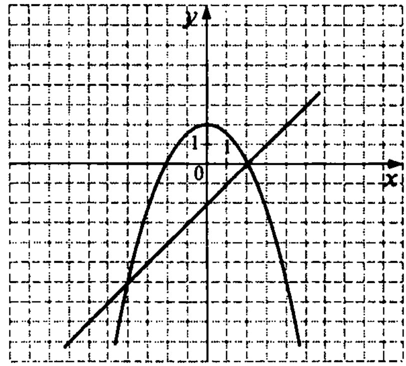
3) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x+2y=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+y=6, \\ -x+3y=10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 3x+2y=3 \end{cases}$

3. В координатной плоскости построены графики уравнений $2y + x^2 = 4$ и $x - y = 2$ (см. с. 111). Используя эти графики, решите систему уравнений $\begin{cases} 2y+x^2=4, \\ x-y=2. \end{cases}$

1) $(-6; -4), (2; 0)$
2) $(-6; -4), (0; 2)$
3) $(-4; -6), (0; 2)$
4) $(-4; -6), (2; 0)$



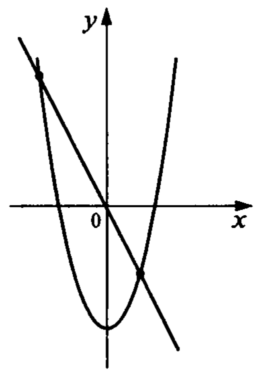
4. На рисунке изображена графическая иллюстрация к одной из данных систем уравнений. Укажите эту систему.

1) $\begin{cases} x^2 - y = 9, \\ y + 2x = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - y = 9, \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y = 9, \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y = 9, \\ y + 2x = 0 \end{cases}$



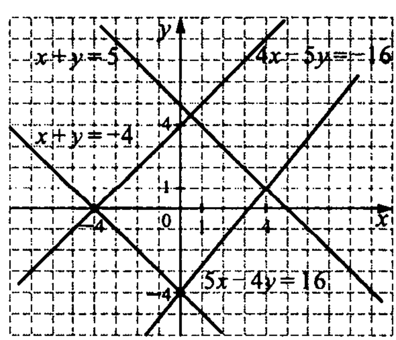
5. Используя рисунок, выберите систему двух уравнений с двумя переменными, решением которой является пара $(-4; 0)$.

1) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 5x - 4y = 16 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 4x - 5y = -16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 5x - 4y = 16 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 4x - 5y = -16 \end{cases}$



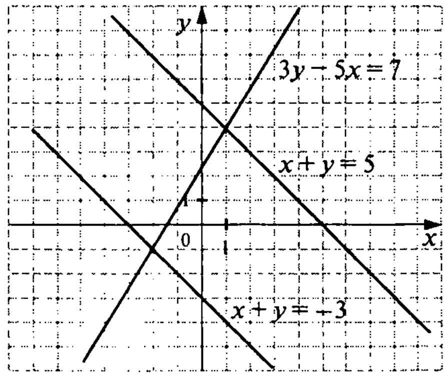
6. На рисунке изображены три прямые — графики уравнений $3y - 5x = 7$, $x + y = 5$, $x + y = -3$. Используя рисунок, укажите систему уравнений, которая не имеет решений.

1) $\begin{cases} 3y - 5x = 7, \\ x + y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 5x = 7, \\ x + y = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x + y = 5 \end{cases}$

4) Такой системы нет



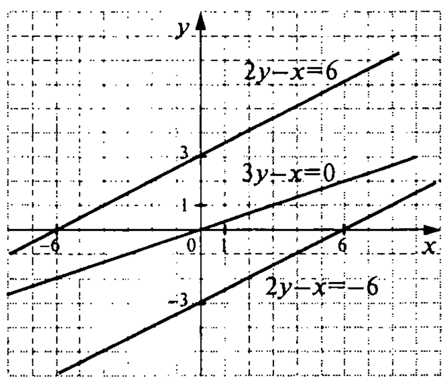
7. Используя рисунок, укажите систему двух уравнений с двумя переменными, решением которой является пара отрицательных чисел.

1) $\begin{cases} 3y - x = 0, \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - x = 0, \\ 2y - x = -6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y - x = 6, \\ 2y - x = -6 \end{cases}$

4) Такой системы нет



8. Для каждой системы уравнений определите число её решений (используйте графические изображения).

А. $\begin{cases} y = \frac{6}{x}, \\ y = -x^2 \end{cases}$ Б. $\begin{cases} y = \frac{6}{x}, \\ y = -3x \end{cases}$ В. $\begin{cases} y = \frac{6}{x}, \\ y = 3x \end{cases}$

1) Одно решение 2) Два решения 3) Нет решений

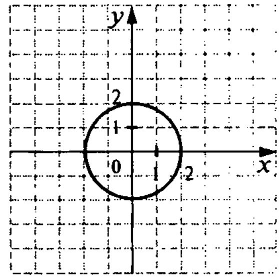
9. Каждую из данных систем уравнений соотнесите с числом её решений. (Для решения используйте графики; график уравнения $x^2 + y^2 = 4$ изображён на рисунке.)

A. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+1 \end{cases}$

Б. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2-2 \end{cases}$

В. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+4 \end{cases}$

1) Одно решение
2) Два решения
3) Три решения
4) Нет решений



Решите систему уравнений (№ 10—11):

10. а) $\begin{cases} 4x-3y=10, \\ x-2y=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 5x+2y=0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-y=8, \\ x-4y=-1 \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x^2-3y=-9, \\ x+y=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2y=4, \\ x-y=2 \end{cases}$

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

Решите систему уравнений (№ 12—13):

12. а) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y-2x}{5}=1\frac{1}{3}, \\ \frac{y}{2}+\frac{5}{6}=\frac{x+y}{3} \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=5, \\ x^2+2xy-y^2=-7 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{y}{x}=\frac{1}{2}, \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} (x-1)(2y+1)=0, \\ 2y^2+x-y=7 \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy=8, \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{2}{3}, \\ x-y=2 \end{cases}$

14. При каких положительных значениях числа a система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ y=-x+2 \end{cases}$ имеет два решения?

Решения и ответы

1. 3. **2.** 3. **3.** 4. **4.** 1. **5.** 2. **6.** 3. **7.** 1. **8.** А1, Б3, В2. **9.** А2, Б3, В4. **10.** а) (1;–2); б) (–2; 5); в) (3; 1). **11.** а) (0; 3), (–3; 6); б) (0; –2), (2; 0). **12.** а) (1; –3); б) (3; –2), (–3; –8); в) $\left(2\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right), \left(-2\sqrt{7};\ -\sqrt{7}\right)$. а) *Указание.* Чтобы избавиться от дробей, первое уравнение умножьте на 15, второе — на 6. **13.** а) (1; 2), (1; –1,5), (6;–0,5). *Решение.* $\begin{cases}(x-1)(2y+1)=0,\\ 2y^2+x-y=7.\end{cases}$ На основании условия равенства произведения нулю получим: $\begin{cases}x-1=0,\\ 2y^2+x-y=7\end{cases}$ или $\begin{cases}2y+1=0,\\ 2y^2+x-y=7.\end{cases}$ Решим первую систему. Из первого уравнения имеем: $x = 1$; подставив это значение x во второе уравнение, получим уравнение: $2y^2 - y - 6 = 0$. Его корни: $y_1 = 2$, $y_2 = -1{,}5$. Получили два решения системы уравнений: (1; 2) и (1; –1,5). Решим вторую систему. Из первого уравнения имеем: $y = -0{,}5$; подставив это значение y во второе уравнение, получим уравнение: $0{,}5 + x + 0{,}5 = 7$, $x = 6$. Получили ещё одно, третье решение системы уравнений: (6; –0,5); б) (4; 2), (–4; –2), (2; 4), (–2; –4); в) (3; 1), (–1; –3). **14.** $a>\sqrt{2}$. *Решение.* Подставим выражение для y в первое уравнение и получим квадратное уравнение: $2x^2 - 4x + 4 - a^2 = 0$. Уравнение имеет два решения, когда дискриминант положителен: $16 - 8(4 - a^2) > 0$, откуда $a>\sqrt{2}>0$. Тот же результат получится графическим методом.

4.3. Задачи на координатной плоскости

Теоретические сведения

Здесь рассматриваются задачи, в которых алгебраический аппарат применяется для ответа на вопросы геометрического содержания: для вычисления координат точек пересечения линий (прямых, прямой и параболы, двух парабол и т. д.), для определения взаимного положения линий в координатной плоскости, для составления уравнения линии (прямой, параболы) по заданным условиям и др.

Задача 1. В какой точке пересекаются прямые $2x - y = 3$ и $4x + 3y = -15$?

Р е ш е н и е: Задача сводится к решению системы линейных уравнений: $\begin{cases}2x-y=3,\\ 4x+3y=-15.\end{cases}$ В самом деле, точка пересечения прямых — это их общая точка. Значит, её координаты должны удовлетворять каждому из двух уравнений, т. е. являться решением указанной системы.

Воспользуемся способом сложения: умножим обе части первого уравнения на 3 и сложим левые и правые части уравнений. Получим:

$\begin{cases} 6x-3y=9, \\ 4x+3y=-15, \end{cases}$ $10x=-6$, $x=-0{,}6$. Найдём соответствующее значение y из уравнения $2x-y=3$:

$$y=2x-3=-1{,}2-3=-4{,}2.$$

Ответ: $x=-0{,}6$, $y=-4{,}2$.

Обратите внимание: графическое решение путём построения прямых в координатной плоскости было бы более трудоёмким, а главное, по чертежу координаты можно найти только приближённо.

Задача 2. Даны точки A (12; 3), B (14; 7) и C (−5; −28). Лежат ли они на одной прямой?

Решение: Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B. В общем виде уравнение прямой записывается как $y=kx+b$, значит, нужно найти коэффициенты k и b.

Прямая проходит через точку $A(12;\ 3)$, значит, верно равенство $3=12k+b$. Точно так же: прямая проходит через точку B (14; 7), поэтому верно равенство $7=14k+b$. Приходим к системе уравнений с переменными k и b: $\begin{cases} 12k+b=3, \\ 14k+b=7. \end{cases}$ Решив её, найдём, что $k=2$ и $b=-21$. Таким образом, прямая AB задаётся уравнением $y=2x-21$.

Выясним, принадлежит ли этой прямой точка C (−5; −28). Подставив её координаты в уравнение, получим неверное равенство: $-28=2\cdot(-5)-21$.

Ответ: точки A, B и C не лежат на одной прямой.

Задача 3. Парабола, полученная сдвигом вдоль оси y параболы $y=2x^2$, пересекает ось x в точке $(-\sqrt{5};\ 0)$. Пересекает ли эта парабола прямую $y=-9$?

Решение: Прежде всего составим уравнение параболы. Для этого учитываем следующие данные задачи:

1) Парабола получена сдвигом параболы $y=2x^2$ вдоль оси y. Значит, ось y — её ось симметрии, и парабола задаётся уравнением вида $y=ax^2+c$.

2) Так как смещалась парабола $y=2x^2$, то в уравнении $y=ax^2+c$ известен коэффициент $a=2$. Уравнение имеет вид $y=2x^2+c$.

3) Парабола проходит через точку $(-\sqrt{5};\ 0)$, а значит, координаты этой точки являются решением уравнения $y=2x^2+c$. Из равенства $0=2\cdot(-\sqrt{5})^2+c$ находим, что $c=-10$.

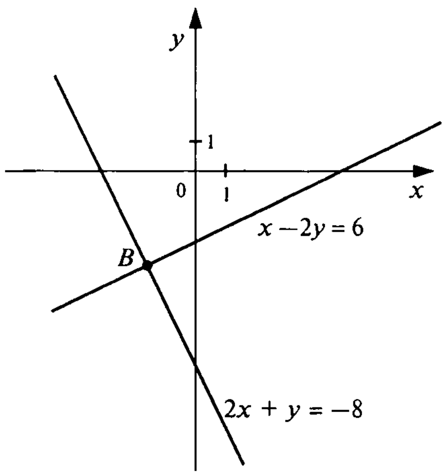
Таким образом, парабола задаётся уравнением $y=2x^2-10$. Ответ на вопрос задачи получаем из графических соображений: нижняя точка параболы — вершина $(0;\ -10)$; её ветви направлены вверх. Значит, парабола пересекает прямую $y=-9$. (Сделайте схематический рисунок.)

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Вычислите координаты точки пересечения прямых $4x + 3y = -11$ и $3x - 6y = 0$.

2. Вычислите координаты точки B.



3. В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $x + 7y = 5$ и $x + 2y = 0$?

4. Вычислите площадь треугольника, образованного прямыми $y = 0{,}5x$, $x = 6$ и осью абсцисс.

5. В каких точках прямая $y = 16 + x$ пересекает параболу $y = x^2 - 5x$?

1) (−2; 8) и (14; 24)	3) (8; −2) и (24; 14)
2) (8; 24) и (−2; 14)	4) (24; 8) и (14; −2)

6. Вычислите координаты точек пересечения парабол.

а) $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 4$

б) $y = x^2 - 2x$ и $y = x^2 + 2x$

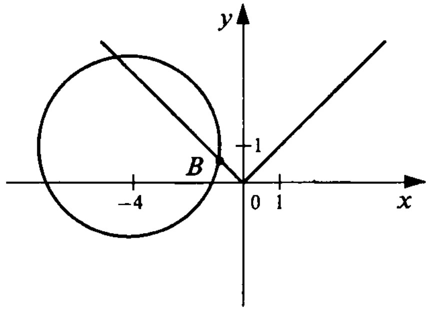
в) $y = x^2 - 2x$ и $y = -x^2 - 2x$

г) $y = x^2 - 3x$ и $y = -x^2 - 5x$

7. Дана прямая $y = 2x + 4$. Эту прямую отобразили относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат. Установите соответствие между отображениями и уравнениями получившихся прямых.

Отображение	*Уравнение прямой*
А. Относительно оси абсцисс	1) $y = 2x - 4$
Б. Относительно оси ординат	2) $y = -2x - 4$
В. Относительно начала координат	3) $y = -2x + 4$

8. На рисунке изображены окружность, заданная уравнением $(x + 4)^2 + y^2 = 10$, и график функции $y = |x|$. Вычислите координаты точки B.



9. Вычислите координаты точки пересечения параболы $y = x^2 + 3x - 1$ и гиперболы $y = \frac{3}{x}$.

10. Параллелограмм ограничен осью абсцисс, прямой $y = 4$, прямой $y = 2x + 4$ и прямой, пересекающей ось y в точке (0; 10). Найдите площадь параллелограмма.

11. При каких положительных значениях c окружность $x^2 + y^2 = 8$ и прямая $x + y = c$ имеют две общие точки?

12. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ с вершиной в точке $D\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ пересекает ось y в точке с ординатой -3. Запишите уравнение параболы.

Решения и ответы

1. (−2; −1). **2.** (−2; −4). **3.** Во II четверти. **4.** 9. *Подсказка.* Сделайте чертёж. Это прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 3. **5.** 2. **6.** а) (2; 0) и (−2; 0); б) (0; 0); в) (0; 0) и (2; 0); г) (0; 0) и (−1; 4). **7.** А2, Б3, В1. **8.** $B(-1; 1)$. **9.** (−1; −3), (−3; −1), (1; 3). **10.** 12. *Решение.* Сделайте чертёж. Четвёртая прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = 2x + 4$, значит, $k = 2$, и пересекает ось y в точке с ординатой 10; значит, $b = 10$.

Уравнение этой прямой $y = 2x + 10$. Прямая $y = 2x + 4$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $x = -2$; прямая $y = 2x + 10$ пересекает ось абсцисс в точке $x = -5$. Из чертежа видно, что высота параллелограмма равна 4, а основание, к которому проведена высота, равно 3. Площадь параллелограмма равна 12. **11.** $0 < c < 4$. ***Решение.*** Выразим y из уравнения $x + y = c$ и подставим его в уравнение окружности: $x^2 + (c - x)^2 = 8$, которое после преобразований примет вид $2x^2 - 2cx + (c^2 - 8) = 0$. Окружность и прямая имеют две общие точки в том и только в том случае, когда это уравнение имеет два корня, т. е. при $D > 0$. Таким образом, надо найти такие значения c, при которых дискриминант уравнения положителен. Имеем: $D_1 = c^2 - 2\ (c^2 - 8) = -c^2 + 16$; $-c^2 + 16 > 0$, $c^2 - 16 < 0$, $-4 < c < 4$. Условию задачи из этого множества удовлетворяют значения $0 < c < 4$. Возможно и геометрическое решение. Прямая $x + y = 0$ пересекает окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{8}$ в двух точках, а параллельная ей касательная $y = -x + c_0$ — в одной точке. Условию задачи удовлетворяют все c из интервала $0 < c < c_0$. Найдём c_0. Касательная $y = -x + c_0$ отсекает прямоугольный равнобедренный треугольник с вершиной в начале координат и боковыми сторонами, равными c_0. Радиус, проведённый в точку касания, является высотой и медианой этого треугольника, следовательно, его гипотенуза равна $2\sqrt{8}$, откуда катеты равны 4. **12.** $y = -28x^2 + 28x - 3$. ***Решение.*** Задачу можно решить, составив систему уравнений. При этом надо учитывать, что $c = -3$, поэтому уравнение имеет вид $y = ax^2 + bx - 3$; координаты одной из точек, принадлежащих параболе, даны в условии — это координаты вершины; ещё одна точка, координаты которой можно найти, — это точка $(1; -3)$, симметричная точке $(0; -3)$ относительно оси симметрии параболы. Есть и другое, более простое решение. Так как вершина параболы находится в точке $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, то уравнение этой параболы можно записать в виде $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$. Подставив в это уравнение координаты точки $(0; -3)$, находим значение a, оно равно -28. Далее подставляем -28 в уравнение $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$ и приводим его к стандартному виду.

4.4. Решение текстовых задач алгебраическим методом

Теоретические сведения

Часто для решения текстовой задачи составляют не уравнение, а систему уравнений, для чего вводят не одну букву, а две или даже больше.

Задача 1. Периметр прямоугольника равен 70 см, а его диагональ равна 25 см. Найдите длины сторон прямоугольника.

Р е ш е н и е: Пусть длины сторон прямоугольника равны x см и y см (см. рис. 4.10). Периметр прямоугольника равен 70 см, получаем первое уравнение: $2(x+y)=70$. Второе уравнение составим, используя теорему Пифагора: $x^2+y^2=25^2$. Имеем систему уравнений: $\begin{cases} 2(x+y)=70, \\ x^2+y^2=25^2. \end{cases}$ Решим её:

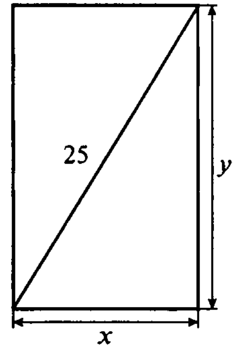


Рис. 4.10.

$$\begin{cases} x+y=35, \\ x^2+y^2=625, \end{cases}$$

$y=35-x,$
$x^2+(35-x)^2=625,$
$2x^2-70x+600=0,$
$x^2-35x+300=0$. Корни уравнения $x_1=20$, $x_2=15$.

Из уравнения $y=35-x$ получаем: $y_1=15$, $y_2=20$. Таким образом, система имеет два решения: $\begin{cases} x_1=20, \\ y_1=15 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1=15, \\ y_1=20. \end{cases}$ Полученные значения x и y задают равные прямоугольники, поэтому задача имеет одно решение.

О т в е т: стороны прямоугольника равны 20 см и 15 см.

Задача 2. В прошлом году на два самых популярных факультета университета было подано 1100 заявлений. В этом году число заявлений на первый из этих факультетов уменьшилось на 20%, а на другой увеличилось на 30% и стало равным 1130. Сколько заявлений подано на каждый из этих факультетов в этом году?

Р е ш е н и е: Если обозначить буквами число заявлений, поданных в этом году, т. е. то, о чём спрашивается в задаче, уравнения будет составить трудно. Поэтому введём буквы для прошлогодних данных. Пусть в прошлом году на первый факультет было подано x заявлений, а на второй — y заявлений; имеем уравнение $x+y=1100$. Число заявлений на первый факультет составило 80% от числа заявлений прошлого года и стало равным $0{,}8x$; число заявлений на второй факультет составило 130% от прошлогоднего числа и стало равным $1{,}3y$. Имеем уравнение $0{,}8x+1{,}3y=1130$. Таким образом, получаем систему: $\begin{cases} x+y=1100, \\ 0{,}8x+1{,}3y=1130. \end{cases}$ Умножив обе части второго уравнения на 10, получим систему: $\begin{cases} x+y=1100, \\ 8x+13y=11300. \end{cases}$ Её решение: $x=600$, $y=500$. Это ещё не ответ задачи, требуется вычислить число заявлений, поданных в этом году на каждый из факультетов: $0{,}8x=480$, $1{,}3y=650$.

О т в е т: на первый факультет подано 480 заявлений, на второй — 650 заявлений.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Прочитайте задачу:

В классе 25 учащихся. При поливке деревьев в школьном саду каждая девочка принесла по 2 ведра воды, а каждый мальчик — по 3 ведра. Всего было принесено 63 ведра воды. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Пусть в классе x мальчиков и y девочек. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

1) $\begin{cases} x+y=25, \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=63 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=25, \\ 3x+2y=63 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=25, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=63 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=25, \\ 2x+3y=63 \end{cases}$

2. Прочитайте задачу:

Одна из сторон прямоугольника на 11 см больше другой, а его площадь равна 620 см^2. Чему равны стороны этого прямоугольника?

Пусть длина большей стороны прямоугольника x см, меньшей — y см. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

1) $\begin{cases} 2x+2y=620, \\ x-y=11 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=620, \\ y-x=11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=620, \\ x-y=11 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy=620, \\ x-y=11 \end{cases}$

3. Прочитайте задачу:

В школьной столовой в понедельник было продано 56 кексов и 20 бутылок воды на 1280 р., а во вторник – 50 кексов и 35 бутылок воды на 1700 р. Определите цену одного кекса и одной бутылки воды.

Обозначьте цену кекса (в р.) буквой x, а бутылки воды — буквой y и составьте систему уравнений по условию задачи.

4. Прочитайте задачу:

В копилке 82 р. двухрублёвыми и пятирублёвыми монетами. Всего в ней 26 монет. Сколько двухрублёвых и сколько пятирублёвых монет в копилке?

Обозначьте число двухрублёвых монет буквой x, а пятирублёвых — буквой y и и составьте систему уравнений по условию задачи.

Решите задачу (№ 5—8):

5. В 2 большие и 3 маленькие коробки помещается 38 карандашей, а в 3 большие и 1 маленькую – 36 карандашей. Сколько карандашей в большой и в маленькой коробках вместе?

1) 10 2) 12 3) 16 4) 18

6. Купили 120 тетрадей в клетку и в линейку, заплатив за покупку 1170 р. Сколько купили тетрадей каждого вида, если тетрадь в клетку стоит 15 р, а в линейку – 6 р?

7. Длина ограждения вокруг детской площадки, имеющей форму прямоугольника, равна 110 м, а площадь, занимаемая площадкой, равна 750 м^2. Какую длину и ширину имеет площадка?

8. Имеются 84 карточки, которые выкладывают на столе одинаковыми по длине рядами. Можно ли выложить все эти карточки так, чтобы рядов было на 3 больше, чем карточек в каждом ряду?

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

9. В городской думе заседало 60 депутатов, представляющих две партии. После очередных выборов число депутатов от первой партии увеличилось на 15%, а от второй партии уменьшилось на 20%. Сколько депутатов от каждой партии оказалось в городской думе после выборов, если всего было выбрано 55 депутатов от этих двух партий?

10. Болельщик хочет успеть на стадион к началу матча. Если он пойдёт из дома пешком со скоростью 5 км/ч, то опоздает на 10 мин, а если поедет на велосипеде со скоростью 10 км/ч, то приедет за 20 мин до начала матча. Чему равно расстояние от дома до стадиона и сколько времени осталось до матча?

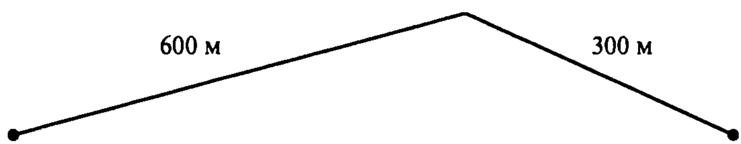
11. Дорога от школы до стадиона состоит из двух участков – 600 м подъёма и 300 м спуска. Дорога от школы до стадиона занимает у Влада 17 мин, а от стадиона до школы – 16 мин. Определите, с какой скоростью идёт Влад на подъёме, и с какой – на спуске.

12. Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 ч. Если первый оператор будет работать 3 ч, а второй 12 ч, то они выполнят только 75% всей работы. За какое время может набрать весь текст каждый оператор, работая отдельно?

Решения и ответы

1. 3. **2.** 4. **3.** $\begin{cases}56x+20y=1280,\\50x+35y=1700.\end{cases}$ **4.** $\begin{cases}x+y=26,\\2x+5y=82.\end{cases}$ **5.** 3. *Подсказка:* Попытки подставлять ответы в условие задачи результата не дадут. Нужно непосредственно решить задачу, составив систему уравнений. **6.** 50 тетрадей в клетку и 70 тетрадей в линейку. *Решение.* Пусть куплено x тетрадей в клетку и y тетрадей в линейку. Так как всего куплено 120 тетрадей, то $x + y = 120$. Составляем второе уравнение: за тетради в клетку заплатили $15x$ р., за тетради в линейку $6y$ р., всего заплатили 1170 р., поэтому $15x + 6y = 1170$. Имеем систему уравнений: $\begin{cases}x+y=120,\\15x+6y=1170.\end{cases}$ Решив её, получим: $x = 50$, $y = 70$. **7.** 30 м и 25 м. *Решение.* Пусть длины сторон детской площадки x м и y м. Длина ограждения 110 м, поэтому $2(x+y)=110$; площадь, занимаемая площадкой, 750 м^2, поэтому $xy=750$. Имеем систему уравнений: $\begin{cases}x+y=55,\\xy=750.\end{cases}$ Система имеет два решения: $\begin{cases}x_1=30,\\y_1=25\end{cases}$ и $\begin{cases}x_1=25,\\y_1=30,\end{cases}$ но задача имеет одно решение, так как полученные значения x и y задают равные прямоугольники. **8.** Нельзя. *Решение.* Составим систему уравнений, обозначив буквой x число рядов, буквой y — число карточек в каждом ряду. Так как всего имеется 84 карточки, то $xy = 84$; так как рядов должно быть на 3 больше, чем карточек в ряду, то $x - y = 3$. Решим систему $\begin{cases}xy=84,\\x-y=3.\end{cases}$ Выразив из второго уравнения переменную y и подставив это выражение в первое уравнение, получим квадратное уравнение $x^2-3x-84=0$. Корни уравнения: $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{345}}{2}$. Очевидно, что нет необходимости решать систему дальше: из условия задачи следует, что её решениями могут быть только натуральные числа. Значит, описанная в задаче ситуация невозможна. **9.** 23 депутата от первой партии и 32 депутата от второй партии. *Решение.* Пусть в думе работало x депутатов от первой партии и y депутатов от второй партии; получаем систему: $\begin{cases}x+y=60,\\1{,}15x+0{,}8y=55.\end{cases}$ Решив её, получим: $x = 20$, $y = 40$. Теперь найдём, сколько вновь избрано депутатов от каждой партии: $1{,}15\cdot 20=23$, $0{,}8\cdot 40=32$. **10.** 5 км, 50 мин. *Решение.* Обозначим буквой x расстояние (в км) от дома до стадиона, буквой y — время (в ч), оставшееся до матча. Если болельщик идёт пешком, то дорога займёт у него $\frac{x}{5}$ ч, что на $\frac{1}{6}$ ч больше, чем y; имеем уравнение $\frac{x}{5}=y+\frac{1}{6}$. Аналогично составляем уравнение для случая, когда болельщик едет на велосипеде: $\frac{x}{10}=y-\frac{1}{3}$. Имеем систему: $\begin{cases}\frac{x}{5}=y+\frac{1}{6},\\\frac{x}{10}=y-\frac{1}{3}.\end{cases}$ Решив её, получим: $x = 5$, $y=\frac{5}{6}$.

Таким образом, расстояние от дома до стадиона равно 5 км, время, оставшееся до матча, равно $\frac{5}{6}$ ч, или 50 мин. **11.** 50 м/мин и 60 м/мин. ***Решение***. Целесообразно сделать схематический рисунок.



Пусть скорость Влада на подъёме равна x м/мин, а на спуске y м/мин. Тогда дорога от школы до стадиона занимает у него $\left(\frac{600}{x}+\frac{300}{y}\right)$ мин, а обратный путь занимает $\left(\frac{300}{x}+\frac{600}{y}\right)$ мин. Получаем систему уравнений: $\begin{cases}\frac{600}{x}+\frac{300}{y}=17,\\ \frac{300}{x}+\frac{600}{y}=16.\end{cases}$ Положим $\frac{300}{x}=a$, $\frac{300}{y}=b$, получим систему: $\begin{cases}2a+b=17,\\ a+2b=16.\end{cases}$ Решением этой системы служит пара чисел: $a=6$, $b=5$. Вернёмся к переменным x и y, получим: $\frac{300}{x}=6$, $x=50$; $\frac{300}{y}=5$, $y=60$. **12.** Первый оператор — за 12 ч, второй — за 24 ч. ***Решение***. Пусть первый оператор может выполнить всю работу за x ч, второй — за y ч. Тогда за 1 ч работы первый оператор выполняет её часть, равную $\frac{1}{x}$, второй — $\frac{1}{y}$, а вместе — $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$, что составляет $\frac{1}{8}$ всей работы. Имеем уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}$. За 3 ч первый оператор выполнит часть работы, равную $\frac{3}{x}$, за 12 ч второй оператор выполнит часть работы, равную $\frac{12}{y}$, а за всё время будет выполнена часть, равная $\left(\frac{3}{x}+\frac{12}{y}\right)$, что составляет 75%, или $\frac{3}{4}$ всей работы. Получаем второе уравнение: $\frac{3}{x}+\frac{12}{y}=\frac{3}{4}$ и систему $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8},\\ \frac{3}{x}+\frac{12}{y}=\frac{3}{4}.\end{cases}$ Решим эту систему, введя замену, $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$. В результате получим: $x=12$, $y=24$.

§ 5. Неравенства

Что надо знать и уметь:

- понимать и применять терминологию и символику, связанные с отношением неравенства; понимать свойства числовых неравенств, применять их в ходе решения задач;
- решать линейные неравенства с одной переменной и их системы, применять полученные умения для решения задач;
- решать квадратные неравенства с опорой на графические представления; применять полученные умения для решения задач.

5.1. Общие свойства неравенств

Теоретические сведения

Из двух чисел a и b справедливо одно из следующих соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Определение. ***Если разность a − b положительна, то a > b; если разность a − b отрицательна, то a < b; если разность a − b равна нулю, то a = b.***

Этому определению можно дать геометрическую иллюстрацию: из двух чисел a и b большим является то, которому на координатной прямой соответствует точка, расположенная правее, и меньшим то, которому соответствует точка, расположенная левее.

Неравенства $a > b$ и $a < b$ называют строгими неравенствами. Рассматриваются также нестрогие неравенства :

неравенство $a \geqslant b$, читают «a больше или равно b», или «a не меньше b»; это неравенство верно, если $a > b$ или $a = b$;

неравенство $a \leqslant b$, читают «a меньше или равно b», или «a не больше b»; это неравенство верно, если $a < b$ или $a = b$.

Например, верными являются неравенства $7 \geqslant 2$, $7 \geqslant 7$, $5 \leqslant 6$.

Справедливы следующие свойства неравенств :

(1) если $a > b$, то $b < a$;

(2) если $a > b$ и $b > c$, то a $> c$ (*транзитивность* неравенства);

(3) если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$;

(4) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$; если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$;

(5) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

(6) если $a > b$ и $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

Свойство (3) читают так: *к обеим частям неравенства можно прибавить любое число*. Слово «можно» здесь (и далее) означает, что при таком преобразовании получается неравенство, равносильное данному, т. е. оно будет верным, если данное неравенство было верным, и неверным, если исходное неравенство было неверным. Из этого свойства следует, что *любое слагаемое можно переносить из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный*.

Свойство (4) читается так: *обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, оставив знак неравенства без изменения; обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, поменяв знак неравенства на противоположный.* В частности, если поменять знаки обеих частей неравенства на противоположные (т. е. умножить обе части неравенства на -1), то надо заменить на противоположный и знак неравенства. Например, поменяв знаки обеих частей неравенства $-10 < 2$, получим $10 > -2$. Полезно также уметь работать с двойными неравенствами: при изменении знаков всех трёх частей двойного неравенства оба знака неравенства заменяются на противоположные. Так, заменив знаки в двойном неравенстве $a \leqslant b < c$, получим $-a \geqslant -b > -c$, или в более привычной записи $-c < -b \leqslant -a$.

Свойства (5) и (6) читают так: *неравенства одного знака можно почленно складывать*; *неравенства одного знака с положительными членами можно почленно умножать.*

Аналогичные неравенства справедливы и для знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$.

Пример 1. На координатной прямой отмечены числа a и b (рис. 5.1).

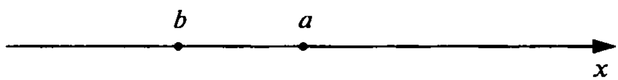


Рис. 5.1.

Выберите из следующих утверждений верное.

1) $a - b < 0$	3) $a - b > -2$
2) $a - b < -2$	4) $a - b > 2$

При выполнении задания используется определение понятий «больше» и «меньше» и свойство транзитивности. Из рисунка видно, что $a > b$. Отсюда $a - b > 0$. Значит, неравенства 1 и 2 не являются верными. Рассмотрим неравенство 3. Так как $a - b > 0$ и $0 > -2$, то $a - b > -2$, т. е. это утверждение верно. Убедимся на всякий случай в том, что неравенство под номером 4 не является верным. Действительно, из $a - b > 0$ не следует, что $a - b > 2$, так как, например, при $a = 1$, $b = 0$ разность $a - b$ равна 1, т. е. меньше 2.

Ответ: 3.

Пример 2. Известно, что $x > 10$, $y > 20$. Какие из следующих неравенств верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих этому условию:

I. $xy > 200$	II. $xy > 100$	III. $xy > 400$?	
1) I и II	2) I и III	3) II и III	4) I, II и III

Все члены двух данных неравенств — положительные числа. Перемножим почленно эти неравенства, получим $xy > 200$. Итак, неравенство I является верным. Неравенство II следует из неравенства I на основании свойства транзитивности: $xy > 200$, $200 > 100$, значит,

$xy > 100$. Неравенство III при некоторых значениях x и y, удовлетворяющих заданному условию, выполняется, а при некоторых нет, например, оно не выполняется при $x = 11$ и $y = 21$.

Ответ: 1.

Пример 3. Оценим разность $a - b$, если известны границы a и b: $10 < a < 11$, $4 < b < 5$.

Неравенства одинакового смысла можно складывать, поэтому заменим разность суммой: $a + (-b)$ и найдём границы числа $-b$: $-4 > -b > -5$, или $-5 < -b < -4$. Теперь сложим почленно двойные неравенства: $10 < a < 11$ и $-5 < -b < -4$, получим $5 < a - b < 7$.

Пример 4. Докажем, что если a и b — положительные числа, то $a^2 > b^2$ в том и только в том случае, когда $a > b$.

Воспользуемся алгебраической трактовкой отношения «больше». Сначала докажем, что если $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$. Для этого рассмотрим разность $a^2 - b^2$:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Оба множителя в правой части равенства положительны: $a - b > 0$, так как $a > b$; $a + b > 0$, так как a и b — положительные числа. Значит, $a^2 - b^2 > 0$, отсюда следует, что $a^2 > b^2$. Теперь докажем обратное утверждение: если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 > b^2$, то $a > b$:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Из того что $a^2 > b^2$, следует, что $a^2 - b^2 > 0$, значит, произведение в правой части положительно. Так как $a + b > 0$, то второй множитель $a - b$ также положителен, т. е. $a - b > 0$. Следовательно, $a > b$.

Пример 5. Сравним числа $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ и $3+\sqrt{7}$.

Поставим между этими числами какой-нибудь знак неравенства, например, знак $>$, получим: $\sqrt{6}+\sqrt{10} > 3+\sqrt{7}$. Мы не знаем, верно это неравенство или нет. Но, применяя свойства неравенств, мы придём к более простому, очевидному неравенству. Если оно будет верным, то верно и записанное нами неравенство, а если неверным, то записанное неравенство тоже неверно и верно неравенство с противоположным знаком.

Возведём обе части неравенства в квадрат:

$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\right)^2 > \left(3+\sqrt{7}\right)^2.$$

Применим формулу $(a + b)^2$:

$$6+10+2\sqrt{60} > 9+7+6\sqrt{7},$$

$$16+2\sqrt{60} > 16+6\sqrt{7}.$$

Если комбинации нужно составлять из реальных предметов, то используют их *кодирование с помощью букв или цифр*.

Пример 5. Из Калуги в Москву и из Москвы в Калугу можно добраться 3 способами: на автобусе, на электричке и на такси. Перечислим все способы, которыми можно совершить поездку из Калуги в Москву и обратно.

Обозначим каждый из используемых видов транспорта соответствующей ему буквой: А, Э, Т. Тогда каждой поездке туда и обратно будет соответствовать двухбуквенное слово:

АА, АЭ, АТ, ЭА, ЭЭ, ЭТ, ТА, ТЭ, ТТ.

Пример 6. Приехавшие в Москву на экскурсию школьники собираются посетить Третьяковскую галерею, сходить в Парк культуры и отдыха и перекусить в кафе. Выпишем все способы, которыми они могут это сделать.

Обозначим каждое из мест, которые хотят посетить школьники, соответствующе буквой: Т, П, К. Каждому способу будет соответствовать слово из трёх букв, в котором все буквы разные (т. е. слова будут отличаться друг от друга только порядком следования букв):

ТПК, ТКП, ПТК, ПКТ, КТП, КПТ.

До сих пор мы рассматривали комбинации, в которых *порядок следования элементов имел значение*. В самом деле, числа 12 и 21 — это разные числа, хотя и состоящие из одинакового набора цифр, а АББА и БАБА — это разные слова. Однако есть задачи, в которых этот порядок не важен, поэтому при перечислении комбинаций его учитывать не нужно.

Пример 7. Из пяти иностранных языков (английский, немецкий, французский, испанский и итальянский) студентам предлагается выбрать для изучения любые два. Перечислим все способы, которыми они могут сделать свой выбор.

Обозначим каждый из предлагаемых языков своей буквой: А, Н, Ф, И, Т (для итальянского пришлось выбрать букву Т, поскольку И уже занята испанским). Тогда каждому выбору будут соответствовать любые две буквы из этих пяти, причём порядок следования выбранных букв не имеет значения:

АН, АФ, АИ, АТ,
НФ, НИ, НТ,
ФИ, ФТ,
ИТ.

Заметим, что при выписывании каждого слова мы выписывали все его буквы по возрастанию — это позволило избежать повторения

Пример 1. Перечислим все двузначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2:

10, 11, 12, 20, 21, 22.

Легко понять, что других комбинаций нет: искомые двузначные числа могут начинаться на 1 (таких чисел три — 10, 11, 12) или на 2 (их тоже три — 20, 21, 22).

Ещё один знакомый вам пример комбинаций — слова, которые составляют из букв. Только в комбинаторике, в отличие от повседневной жизни, словом называют любую комбинацию из букв, независимо от того, имеет ли она какой-либо смысл или не имеет.

Пример 2. Выпишем все четырёхбуквенные слова, которые можно составить, используя только буквы А и Б:

АААА, АААБ, ААБА, ААББ,
АБАА, АБАБ, АББА, АБББ,
БААА, БААБ, БАБА, БАББ,
ББАА, ББАБ, БББА, ББББ.

На этот раз комбинаций получилось гораздо больше, и при их перечислении было очень легко запутаться, например: выписать какое-нибудь слово повторно или, что ещё хуже, какое-то слово пропустить вовсе. Чтобы этого не случилось, важно установить некоторое правило, по которому перечисляются комбинации. Самое универсальное правило — *выписывать все комбинации по порядку*.

Для чисел «по порядку» означает «по возрастанию», а для слов — «по алфавиту». Если бы все 16 слов из примера 2 содержались в русском языке, то именно в этом порядке они были бы перечислены в орфографическом словаре.

Во многих задачах приходится иметь дело с комбинациями, в которых *любая буква (цифра) может использоваться не более одного раза*. Перечисление таких комбинаций может оказаться более сложной задачей.

Пример 3. Перечислим все трёхзначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, используя каждую из цифр не более одного раза. Будем выписывать числа в порядке возрастания:

102, 120, 201, 210.

Пример 4. Перечислим все четырёхзначные числа, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, используя каждую из цифр не более одного раза. Снова выписываем в порядке возрастания: сначала выпишем все числа, начинающиеся с цифры 1, затем с цифры 2 и, наконец, с цифры 3:

1023, 1032, 1203, 1230, 1302, 1320,
2013, 2031, 2103, 2130, 2301, 2310,
3012, 3021, 3102, 3120, 3201, 3210.

§8. Комбинаторика. Элементы теории вероятностей и статистики

Что надо знать и уметь:

- решать комбинаторные задачи на нахождение числа объектов или комбинаций, применяя приём полного перебора вариантов и комбинаторное правило умножения; распознавать задачи на определение числа перестановок и выполнять соответствующие вычисления;
- находить относительную частоту и вероятность случайного события, используя готовые статистические данные; решать задачи на нахождение вероятностей событий в экспериментах с равновозможными исходами;
- использовать простейшие способы представления и анализа статистических данных: извлекать информацию из таблицы, интерпретировать её; представлять информацию в виде линейной, столбчатой или круговой диаграммы; интерпретировать данные, представленные на диаграмме; находить средние значения и размах числовых наборов, отвечать на простейшие вопросы статистического характера.

8.1. Комбинаторика

Теоретические сведения

Что изучает комбинаторика

Комбинаторика изучает различные виды комбинаций, способы их перечисления и подсчёта. Само слово «комбинация» происходит от латинского *combino* — соединяю. Действительно, при получении любой комбинации мы составляем её из отдельных элементов, последовательно соединяя их друг с другом. Чаще всего эти элементы выбираются из некоторого конечного множества.

Комбинаторные задачи могут встречаться как в чистом виде, так и в задачах, которые возникают в алгебре, геометрии, теории вероятностей и других разделах математики. Чтобы научиться решать комбинаторные задачи, нужно овладеть следующими навыками:

- *перечислять* (перебирать, выписывать) заданные в задаче комбинации, используя для этого определённую систему;
- *подсчитывать* количество комбинаций, используя для этого специальные комбинаторные правила (правило умножения, правило сложения и др.).

Перечисление комбинаций

Любое натуральное число можно рассматривать как комбинацию из цифр.

Решения и ответы

1. А3, Б1, В2. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 4. **5.** $b_6 = \frac{1}{25}$. **6.** 2. **7.** $c_n = 2^{n-2}$. **8.** 4. **9.** 296. **10.** 3. **11.** 2. **12.** 2. **13.** $a_1 = 3, d = -1$. **14.** 3. **15.** 20,4. **16.** Не существует. *Решение*. Рассмотрим арифметическую прогрессию, в которой $a_6 = 14$ и $a_{10} = 20$. Найдём разность этой прогрессии: $d = \frac{a_{10} - a_6}{10 - 6} = \frac{20 - 14}{4} = 1{,}5$. Вычислим шестнадцатый член: $a_{16} = a_{10} + d\,(16 - 10) = 20 + 1{,}5 \cdot 6 = 29$, т. е. $a_{16} \neq 28$. **17.** 75, 45, 27. *Решение.* Сумма первого и второго членов равна $b_1 + b_1q = b_1\,(1 + q) = 120$, второго и третьего — $b_1q^2 + b_1q = b_1q\,(q + 1) = 72$. Подставив значение первого выражения во второе, получим $120q = 72$, откуда $q = \frac{3}{5}$. Из первого уравнения найдём $b_1 = 75$, $b_2 = 75 \cdot \frac{3}{5} = 45$, $b_3 = 45 \cdot \frac{3}{5} = 27$. **18.** 2700. *Решение*. Пусть S — искомая сумма; тогда $S = S_1 - S_2$, где S_1 — сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 90, S_2 — сумма всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 90. Найдём S_1 по формуле: $S_1 = \frac{1 + 90}{2} \cdot 90 = 91 \cdot 45$. Для последовательности (a_n) чисел, кратных 3 и не превосходящих 90, имеем $a_1 = 3$, $a_n = 90$. Найдём число членов этой последовательности. Так как она задаётся формулой $a_n = 3n$, то $3n = 90$, $n = 30$. Теперь найдём S_2 по формуле: $S_2 = \frac{3 + 90}{2} \cdot 30 = 93 \cdot 15$. Получим: $S = S_1 - S_2 = 91 \cdot 45 - 93 \cdot 15 = 15 \cdot (173 - 94) = 2700$. **19.** $-51{,}7$. *Решение.* По двум первым членам найдём, что $d = 0{,}8$. Тогда $a_n = -8{,}7 + 0{,}8\,(n - 1) = 0{,}8n - 9{,}5$. Решим неравенство $0{,}8n - 9{,}5 < 0$; получим $n < 11\frac{7}{8}$. Значит, в арифметической прогрессии одиннадцать отрицательных членов (последний равен $-0{,}7$). Их сумма равна $\frac{-8{,}7 - 0{,}7}{2} \cdot 11 = -51{,}7$. **20.** 8,2; 10,4; 12,6; 14,8. *Решение*. Рассмотрим арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 6$ и $a_6 = 17$. Найдём её разность: $d = \frac{a_6 - a_1}{5} = 2{,}2$. Далее последовательным прибавлением находим промежуточные члены: $a_2 = 6 + 2{,}2 = 8{,}2$ и т. д. **21.** $-3, -6, -12$ или $3, -6, 12$. *Решение*. Пусть в геометрической прогрессии $b_1 = -1{,}5$ и $b_5 = -24$. Тогда $q^4 = \frac{b_5}{b_1} = \frac{-24}{-1{,}5} = 16$. Отсюда $q = \pm 2$. Если $q = 2$, то вставляем числа $-3, -6, -12$, если $q = -2$, то вставляем числа $3, -6, 12$. **22.** Существует. *Решение*. Рассмотрим геометрическую прогрессию, в которой $b_2 = -6$, $b_5 = 48$. Найдём её знаменатель: $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = -8$, а значит, $q = -2$. Вычислим седьмой член: $b_7 = b_5 \cdot q^2 = 48 \cdot 4 = 192$.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

14. Дана последовательность чисел: $0{,}1$; $0{,}3^3$; $0{,}1^5$; $0{,}1^7$;... . Какое утверждение относительно этой последовательности неверно?

1) Эта последовательность — геометрическая прогрессия.
2) Показатели степени образуют арифметическую прогрессию.
3) Пятидесятый член этой последовательности равен $0{,}1^{49}$.

4) Сумма пятидесяти первых чисел последовательности равна $0{,}\underbrace{10101...01}_{99}$.

15. Пятый член арифметической прогрессии равен 8,4, а десятый член равен 14,4. Найдите пятнадцатый член этой последовательности.

16. Существует ли арифметическая прогрессия, в которой $a_6 = 14$, $a_{10} = 20$ и $a_{16} = 28$?

17. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 120, а сумма второго и третьего членов равна 72. Найдите первые три члена этой прогрессии.

18. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 90, которые не делятся на 3.

19. Чему равна сумма всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-8{,}7$; $-7{,}9$; ...?

20. Между числами 6 и 17 вставьте четыре числа так, чтобы вместе с данными числами они образовали арифметическую прогрессию.

21. Какие три числа можно записать между числами $-1{,}5$ и -24 так, чтобы вместе с данными числами они образовали геометрическую прогрессию?

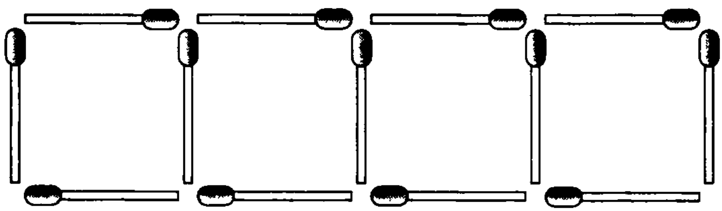
22. Существует ли геометрическая прогрессия, в которой $b_2 = -6$, $b_5 = 48$ и $b_7 = 192$?

9. Найдите сотый член арифметической прогрессии 4; 7; 10; ... .

10. В геометрической прогрессии $b_1 = \frac{1}{64}$, $q = -2$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

1) $b_2 < b_3$ 2) $b_3 > b_4$ 3) $b_4 < b_6$ 4) $b_5 < b_7$

11. Из спичек выкладывают квадраты, как показано на рисунке. Сколько выложено спичек, если получилось 25 квадратов?

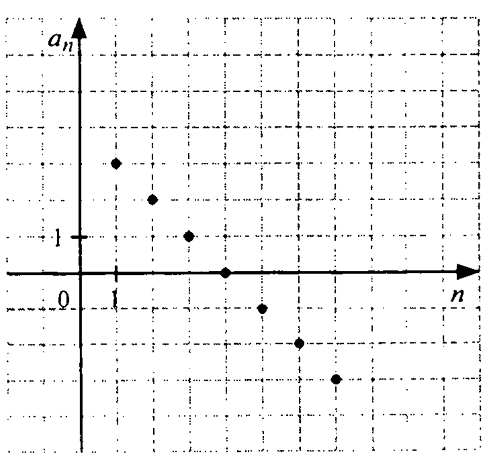


1) 25 2) 76 3) 79 4) 100

12. Автомобилист должен заплатить штраф 300 р. до определённого срока. За каждый просроченный день сумма штрафа увеличивается на 10 р. По какой формуле можно вычислить сумму штрафа при задержке его выплаты на n дней?

1) $290 + 10n$ 2) $300 + 10n$ 3) $310 + 10n$ 4) $290 \cdot 10n$

13. На рисунке изображены точками первые семь членов арифметической прогрессии (a_n). Найдите a_1 и d.



Формула n-го члена	*Утверждение*
А. $x_n = \frac{n-1}{n}$	1) Последовательность — арифметическая прогрессия
Б. $y_n = 2n + 5$	2) Последовательность — геометрическая прогрессия
В. $z_n = 2 \cdot 5^{n-1}$	3) Последовательность не является ни арифметической прогрессией, ни геометрической прогрессией

2. Какая из следующих последовательностей является арифметической прогрессией?

1) последовательность натуральных степеней числа 3
2) последовательность кубов натуральных чисел
3) последовательность чисел, обратных натуральным
4) последовательность натуральных чисел, кратных 5

3. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите её.

1) 1; 2; 3; 5; ...
2) 1; 2; 4; 8; ...
3) 1; 3; 5; 7; ...
4) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; ...

4. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n \cdot 5$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

1) $\frac{1}{5}$ 2) 6 3) 100 4) 125

5. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии (b_n): 125; 25; 5; ... . Найдите b_6.

6. Арифметические прогрессии (x_n), (y_n) и (z_n) заданы формулами n-го члена: $x_n = 2n + 4$, $y_n = 4n$, $z_n = 4n + 2$. Укажите те из них, у которых разность равна 4.

1) (x_n) и (z_n) 2) (y_n) и (z_n) 3) (x_n), (y_n) и (z_n) 4) (x_n)

7. Геометрическая прогрессия (c_n) задана условиями: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_{n+1} = 2c_n$. Запишите формулу n-го члена этой прогрессии.

8. Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{25} < 0$.

1) $a_n = 2n$
2) $a_n = -2n + 50$
3) $a_n = -2n + 100$
4) $a_n = 2n - 100$

Пример 10. Найдём сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

Последовательность 12; 15; 18; ... ; 99 является арифметической прогрессией, в которой $a_1 = 12$, $a_n = 99$, $d = 3$. Найдём номер последнего члена. Подставив в формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$ значения $a_1 = 12$, $a_n = 99$ и $d = 3$, получим уравнение $99 = 12 + 3(n - 1)$. Решив его, найдём, что $n = 30$. Теперь можно вычислить искомую сумму:

$$S_{30} = \frac{(12+99)\cdot 30}{2} \cdot 1665.$$

Геометрическая прогрессия. Если $q \neq 1$, то $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Заметим, что если $0 < q < 1$, то удобнее пользоваться формулой суммы, представленной в виде: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой и $S_n = nb_1$.

Пример 11. Найдём сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{10}}$.

Слагаемые в этой сумме — члены геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель равен $\frac{1}{2}$. Всего суммируется 11 членов. Имеем:

$$S_{11} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{10}} = 2 - \frac{1}{1024} = 1\frac{1023}{1024}.$$

Пример 12. Найдём сумму первых восьми членов геометрической прогрессии, второй член которой равен 6, а четвёртый равен 24.

Так как $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = 4$, то $q = -2$ или $q = 2$. Если $q = -2$, то $b_1 = \frac{6}{-2} = -3$; в этом случае $S_8 = \frac{-3\cdot((-2)^8 - 1)}{-2-1} = (-2)^8 - 1 = 256 - 1 = 255$. Если $q = 2$, то $b_1 = \frac{6}{2} = 3$; в этом случае $S_8 = \frac{3\cdot(2^8-1)}{2-1} = 3\cdot(256-1) = 765$. Таким образом, задача имеет два решения: $S_8 = 255$ или $S_8 = 765$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Каждой последовательности, заданной формулой n-го члена, поставьте в соответствие верное утверждение.

Изменение членов арифметической прогрессии происходит равномерно: с каждым шагом по горизонтальной оси изображающие их точки поднимаются или опускаются на одно и то же число единиц вдоль вертикальной оси.

Иначе обстоит дело с геометрической прогрессией. На рисунке 7.2 точками изображены несколько членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 1$, $q = 2$; эта прогрессия задаётся формулой $b_n = 2^{n-1}$.

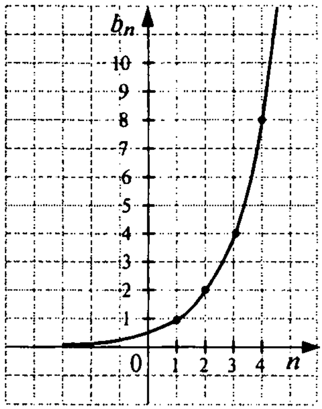


Рис. 7.2.

Скорость её роста всё время увеличивается, и точки, соответствующие её членам, резко «уходят» вверх. Все они лежат на кривой, которая носит название *экспонента*. Чем выше поднимается экспонента $y = 2^x$, тем круче она становится.

Формулы суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий

Арифметическая прогрессия. Если известны первый и последний из суммируемых членов, то удобно пользоваться формулой

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Пример 9. Найдём сумму всех натуральных чисел от 1 до 1000.

Слагаемые в сумме $1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ образуют арифметическую прогрессию. Подставив в формулу суммы $a_1 = 1$, $a_n = 1000$, $n = 1000$, получим:

$$S_{1000} = \frac{(1+1000)\cdot 1000}{2} = 500\,500.$$

Формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии можно записать в другом виде, выразив S_n через a_1, d и n:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Если вы эту формулу забудете, то в каждом конкретном случае можно выразить один член прогрессии через другой, выполнив несложные преобразования. Например, выразим a_{20} через a_5:

$$a_{20} = a_1 + 19d = (a_1 + 4d) + 15d = a_5 + 15d.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для геометрической прогрессии: *если последовательность* (b_n) *— геометрическая прогрессия, то для любых натуральных* m *и* n *верно равенство:* $b_n = b_m \cdot q^{n-m}$.

Пример 8. В геометрической прогрессии $b_3 = -\frac{1}{2}$, $b_6 = 4$. Найдём b_{12}.

Так как $b_6 = b_3 \cdot q^3$, то $q^3 = \frac{b_6}{b_3} = -8$. Далее имеем: $b_{12} = b_6 \cdot q^6 = b_6 \cdot (q^3)^2 = 4 \cdot (-8)^2 = 256$.

Изображение членов арифметической и геометрической прогрессий точками на координатной плоскости

Члены числовой последовательности можно изображать точками на координатной плоскости. Для этого по горизонтальной оси откладывают номер члена, а по вертикальной — соответствующий член последовательности.

Если последовательность — арифметическая прогрессия, то точки, изображающие её члены, лежат на одной прямой. Дело в том, что зависимость n-го члена арифметической прогрессии от номера члена n является линейной. В самом деле:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = dn + (a_1 - 1).$$

Например, если в арифметической прогрессии $a_1 = 1$ и $d = 3$, то $a_n = 1 + 3(n - 1)$, т. е. $a_n = 3n - 2$. Значит, точки, изображающие члены этой прогрессии, лежат на прямой $y = 3x — 2$ (рис. 7.1).

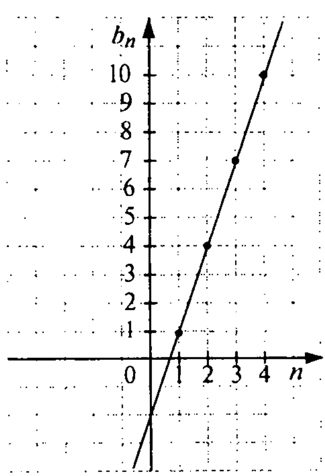


Рис. 7.1.

Каждая формула содержит четыре переменные. Если известны значения трёх из них, то можно вычислить и значение четвёртой. Убедитесь в этом, решив следующие четыре задачи (в каждом случае укажите, какие переменные известны, и получите ответ):

1. В арифметической прогрессии $a_1 = 2$ и $d = 3$. Найдите a_{65}. (Ответ: 194.)

2. В арифметической прогрессии $a_{86} = 100$ и $d = -4$. Найдите a_1. (Ответ: 440.)

3. В арифметической прогрессии $a_1 = 65$ и $a_{21} = -55$. Найдите d. (Ответ: –6.)

4. В арифметической прогрессии $a_1 = 1$ и $d = 4$. Найдите номер члена, равного 397. (Ответ: 100.)

Примеры аналогичных задач можно привести и для геометрической прогрессии, однако далеко не любую из них вы сейчас сможете решить; необходимые для этого знания будут даны в старших классах.

Пример 6. Дана арифметическая прогрессия: 1,5; 4,5; 7,5; 10,5; ... . Начиная с какого номера члены этой прогрессии превосходят 1000?

В данной прогрессии $a_1 = 1{,}5$ и $d = 4{,}5 - 1{,}5 = 3$. Составим формулу n-го члена: $a_n = 1{,}5 + 3(n - 1)$, т. е. $a_n = 3n - 1{,}5$.

Найдём значения n, при которых выполняется условие $a_n > 1000$. Для этого решим неравенство $3n - 1{,}5 > 1000$; $n > 333$. Таким образом, члены данной прогрессии превосходят 1000, начиная с члена, номер которого равен 334. (Для самопроверки можно вычислить a_{334}: имеем $a_{334} = 3 \cdot 334 - 1{,}5 = 1000{,}5$).

Пример 7. В арифметической прогрессии $a_{15} = 40$, $a_{20} = 5$. Найдём a_{30}.

Способ 1. Выразив a_{15} и a_{20} через a_1 и d, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 14d = 40, \\ a_1 + 19d = 5. \end{cases}$$

Решив её, найдём, что $a_1 = 138$, $d = -7$. (Получите этот результат самостоятельно.) Воспользовавшись формулой n-го члена, найдём a_{30}, а именно: $a_{30} = 138 - 7 \cdot 29 = -65$.

Способ 2. Выразим a_{20} через a_{15} и d: $a_{20} = a_{15} + 5d$. Подставив значения a_{20} и a_{15}, получим: $5 = 40 + 5d$, откуда $d = -7$. Теперь найдём a_{30}. Это можно сделать, например, так:

$$a_{30} = a_{20} + 10d = 5 - 7 \cdot 10 = -65.$$

При решении задачи вторым способом мы воспользовались приёмом, основанным на следующем утверждении: *если последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, то для любых натуральных **n** и **m** верно равенство*:

$$a_n = a_m + (n - m)d.$$

Пример 3. Последовательность 5; 5; 5; 5; 5; ... , все члены которой равны между собой, тоже является арифметической прогрессией, так как разность между любыми двумя её членами одна и та же: $d = 5 - 5 = 0$.

Свойство арифметической прогрессии. ***Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов:***

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2}, \text{ где } n \geqslant 2.$$

Определение. ***Геометрической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.*** (Первый член геометрической прогрессии также не может быть равен нулю.)

В геометрической прогрессии отношение любого члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно одному и тому же числу. Это число называют *знаменателем геометрической прогрессии* и обозначают буквой q. Правило, по которому образуются члены геометрической прогрессии, можно записать в виде рекуррентной формулы: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Или: $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Пример 4. Пусть $b_1 = 1$ и $q = 3$. Получаем геометрическую прогрессию: 1; 3; 9; 27; 81; 243; ... Это возрастающая последовательность.

Пример 5. Пусть $b_1 = 5$ и $q = -2$. В этом случае знаки у членов прогрессии чередуются: 5; −10; 20; −40; 80; −160; 320; ... . Это последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей.

Геометрическая прогрессия, члены которой — положительные числа, обладает свойством: ***любой её член, начиная со второго, равен среднему геометрическому предыдущего и последующего членов, т. е. $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, где $n \geqslant 2$.***

Формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессий

Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n), первый член которой равен a_1 и разность равна d:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Формула n-го члена геометрической прогрессии (b_n), первый член которой равен b_1, а знаменатель равен q:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

3) Все члены последовательности принадлежат отрезку $[-1; 1]$.

4) Каждый следующий член последовательности меньше предыдущего.

7. Какая из формул задаёт последовательность чисел, которые при делении на 5 в остатке дают 3?

1) $a_n = 5n$ 2) $b_n = 3n$ 3) $c_n = 5n - 2$ 4) $d_n = 3n + 5$

8. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \frac{12}{n+1}$. Сколько членов этой последовательности больше 1?

1) 12 2) 11 3) 10 4) 9

9. Сколько отрицательных членов в последовательности (c_n), заданной формулой $c_n = 2n - 17$?

Решения и ответы

1. А3, Б4, В1, Г2. **2.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. **3.** 4. **4.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$. **5.** $a_{150} < 50$. **6.** 2 и 3. **7.** 3. **8.** 3. **9.** 8.

7.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Теоретические сведения

Определения и обозначения

Определение. ***Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену одного и того же числа.***

В арифметической прогрессии разность между любыми двумя соседними членами одна и та же. Эту разность называют *разностью арифметической прогрессии* и обозначают буквой d. Правило, по которому образуются члены арифметической прогрессии, можно записать в виде рекуррентной формулы: $a_{n+1} - a_n = d$. Или иначе: $a_{n+1} = a_n + d$.

Пример 1. В арифметической прогрессии 1; 3; 5; 7; 9; 11; ... разность положительна: $d = 3 - 1 = 2$. В этой последовательности каждый следующий член больше предыдущего; такую последовательность называют *возрастающей*.

Пример 2. В арифметической прогрессии 100; 90; 80; 70; 60; ... разность отрицательна: $d = 90 - 100 = -10$. Каждый следующий член этой последовательности меньше предыдущего, и поэтому последовательность называют *убывающей*.

вый член, можно по этому правилу найти второй член; зная второй член, можно точно так же найти третий; и т. д.:

$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3;$
$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7;$
$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15;$ и т. д.

А чтобы при таком способе задания найти a_{30}, придётся последовательно вычислять все предыдушие члены со 2-го по 29-й включительно.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Установите соответствие между последовательностью и формулой её n-го члена.

Последовательность	*Формула n-го члена*
А. чётных чисел	1) $a_n = 7n$
Б. квадратов натуральных чисел	2) $b_n = (2n - 1)^2$
В. чисел, кратных 7	3) $c_n = 2n$
Г. квадратов нечётных чисел	4) $d_n = n^2$

2. Последовательность (a_n) задана рекуррентным способом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, где $n \geqslant 2$. Выпишите первые восемь членов этой последовательности.

3. Последовательность задана условиями: $b_1 = 4$, $b_{n+1} = -\frac{1}{b_n}$. Найдите b_7.

4. Последовательность (c_n) задана с помощью формулы n-го члена $c_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Выпишите первые шесть членов этой последовательности.

5. Последовательность a_n задана формулой $a_n = \frac{2n-1}{10}$. Сравните a_{150} и 50.

6. Последовательность (b_n) задана с помощью формулы n-го члена $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Какие из данных высказываний относительно этой последовательности верны?

1) Все её члены — дробные числа.

2) Её члены с чётными номерами положительны, с нечётными номерами отрицательны.

§ 7. Последовательности и прогрессии

Что надо знать и уметь:

- знать термины «последовательность», «член последовательности», «n-й член последовательности»; понимать и использовать индексные обозначения; находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена или рекуррентным способом;
- распознавать арифметические и геометрические прогрессии при различных способах задания, переходить от одного способа задания прогрессии к другому;
- применять формулы n-го члена и суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий для решения задач, в том числе из жизненной практики.

7.1. Последовательности

Теоретические сведения

В школьном курсе рассматриваются только числовые последовательности. Например:

1; 2; 3; 4; 5; ... — последовательность натуральных чисел;

1; 3; 5; 7; 9; ... — последовательность нечётных чисел;

1; 4; 9; 16; 25; ... — последовательность квадратов натуральных чисел.

Члены последовательности в общем случае обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена. Например, a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; ... .

Член последовательности с произвольным номером n обозначают символом a_n и называют *n-м членом последовательности*. Тогда a_{n-1} и a_{n+1} — соответственно члены последовательности, предшествующий n-му члену и следующий за ним. Саму последовательность обозначают так: (a_n).

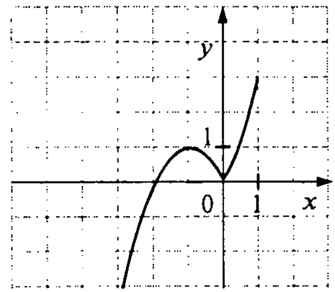
Последовательность задана, если известен способ, позволяющий найти любой её член. Вы в основном имели дело с двумя способами задания последовательностей: с помощью формулы n-го члена и с помощью рекуррентной формулы.

Пример 1. Последовательность (c_n) задана формулой n-го члена $c_n = \frac{n+5}{10}$. Эта формула позволяет вычислить любой член последовательности по его номеру. Найдём, например, c_{30}. Подставив в формулу $n = 30$, получим: $c_{30} = \frac{30+5}{10} = 3{,}5$.

Пример 2. Рассмотрим последовательность (a_n), заданную условиями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Эта последовательность задана с помощью рекуррентной формулы, которая указывает такой способ вычисления членов последовательности: чтобы получить следующий член, нужно предыдущий член умножить на 2 и к результату прибавить 1. Зная пер-

23. $c = -6$; не пересекает. ***Решение.*** Подставим координаты точки $(-\sqrt{3}\ ;\ 0)$ в формулу $y = 2x^2 + c$, получим: $0 = 2 \cdot 3 + c$; $c = -6$. Вершина параболы $y = 2x^2 - 6$ имеет координаты $(0;\ -6)$, ветви её направлены вверх, следовательно, прямая $y = -10$ не имеет общих точек с параболой. Ответ на вопрос можно также получить, построив схематический рисунок.

24. График изображён на рисунке; $y \geqslant 0$ при $x \in [-2;\ +\infty)$. Ответ на вопрос может быть записан иначе: при $x \geqslant -2$.

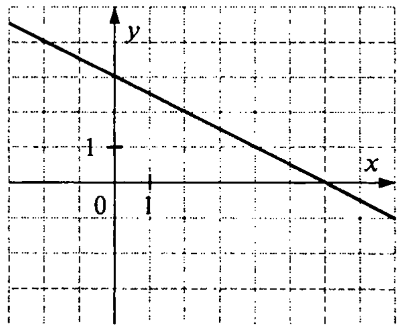


24. Постройте график функции $y=\begin{cases} x(x+2), & \text{если } x\geqslant 0, \\ -x(x+2), & \text{если } x<0. \end{cases}$ При каких значениях x значения функции неотрицательны?

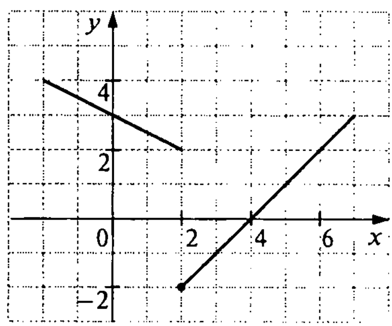
Решения и ответы

1. а) 2; б) 4. **2.** а) при $x < 2$; б) при $x < -2$. **3.** 3. **4.** 2, 3, 4. **5.** А2, Б3, В1. **6.** а) 1; б) 2. **7.** 1. **8.** 3. **9.** 4. **10.** 2. **11.** 4. **12.** 1, 3, 5. **13.** 2. **14.** 1. **15.** 3. **16.** 1. **17.** 3. **18.** 2.

19. График изображён на рисунке; $0 \leqslant y \leqslant 4$ при $-2 \leqslant x \leqslant 6$.

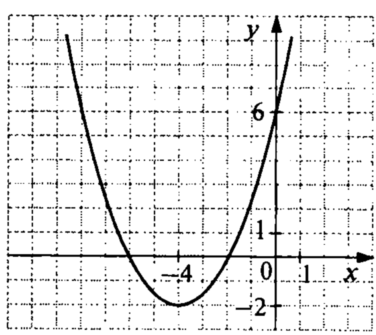


20. График изображён на рисунке; функция убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.



21. $y < 0$ при $x < 2$ и $2 < x < 4$. (Ответ может быть записан и по-другому, например, так: $y < 0$ при $x < 4$ и $x \neq 2$.) *Решение.* Если $x \neq 2$, то $\frac{-x^2+6x-8}{2-x} = x - 4$, поэтому функцию можно задать формулой $y = x - 4$, где $x \neq 2$. Её графиком является прямая $y = x - 4$, из которой «выколота» точка $(2; -2)$.

22. График изображён на рисунке; наименьшее значение функции равно -2.



15. График какой из заданных функций проходит через начало координат?

1) $y=\frac{4}{x}$ 2) $y=4x-1$ 3) $y=4x-x^2$ 4) $y=4-x^2$

16. График какой из заданных функций не проходит через начало координат?

1) $y=3x-3$ 3) $y=-3x^2$
2) $y=3x$ 4) $y=3x^2+3x$

17. Какая из прямых пересекает график функции $y=-\frac{4}{x}$ в двух точках?

1) $x=-6$ 2) $y=2$ 3) $y=-6x$ 4) $y=5x$

18. Какая из прямых не пересекает график функции $y=\frac{3}{x}$?

1) $y=4$ 2) $y=-4x$ 3) $x=-2$ 4) $y=2x$

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

19. Постройте график функции $y=\frac{6-x}{2}$. При каких значениях аргумента выполняется неравенство $0 \leqslant y \leqslant 4$?

20. Постройте график функции $y=\begin{cases} x-4, \text{ если } x>2, \\ -\frac{1}{2}x+3, \text{ если } x\leqslant 2. \end{cases}$ Укажите промежуток, на котором функция убывает.

21. Постройте график функции $y=\frac{-x^2+6x-8}{2-x}$. При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

22. Постройте график функции $y=0{,}5x^2+4x+6$. Укажите наименьшее значение этой функции.

23. График функции $y=2x^2+c$ пересекает ось x в точке $(-\sqrt{3}\,;\,0)$. Найдите значение c и определите, пересекает ли этот график прямая $y=-10$.

10. Функции заданы формулами:

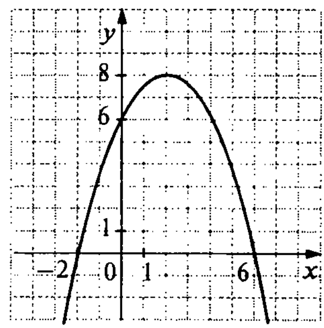
а) $y = 2x^2 - 1$ в) $y = -2x^2 - 1$
б) $y = -2x^2 + 1$ г) $y = 2x^2 + 1$

Графики каких из этих функций пересекают ось x?

1) а, г 2) а, б 3) б, г 4) б, в

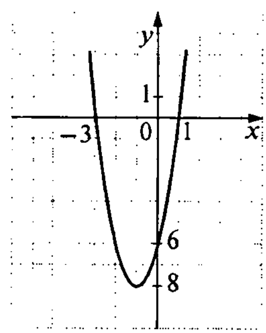
11. На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$. С помощью графика определите, какое из следующих утверждений **неверно**:

1) функция убывает на промежутке $[2; +\infty)$
2) наибольшее значение функции равно 8
3) $f(x) < 0$ при $x < -2$ и $x > 6$
4) $f(0) = -2$



12. На рисунке изображён график квадратичной функции $y = f(x)$. Выпишите номера верных утверждений.

1) $f(-3) = 0$
2) $f(x) > 0$ при $-3 < x < 1$
3) функция возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$
4) наименьшее значение функции равно -6
5) $f(1) < f(-4)$

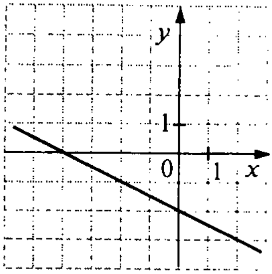


13. Укажите прямую, которая имеет две общие точки с графиком функции $y = -x^2 - 1$.

1) $y = -1$ 2) $y = -10$ 3) $y = 0$ 4) $y = 10$

14. Укажите прямую, которая не имеет общих точек с графиком функции $y = x^2 - 4$.

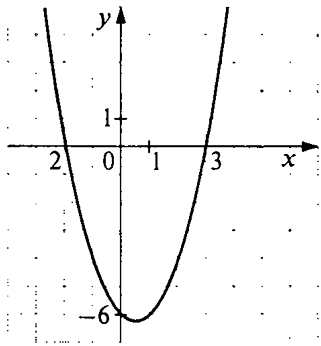
1) $y = -15$ 2) $y = 0$ 3) $y = 4$ 4) $y = 15$

б) 

1) $y = 0{,}5x + 2$
2) $y = -0{,}5x - 2$
3) $y = 0{,}5x - 2$
4) $y = -0{,}5x + 2$

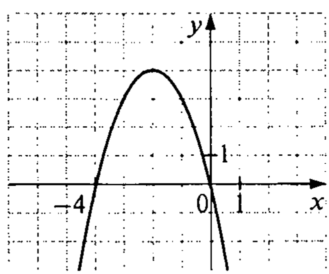
7. На рисунке изображён график квадратичной функции. Какая из перечисленных формул задаёт эту функцию?

1) $y = x^2 - x - 6$
2) $y = x^2 - 2x - 6$
3) $y = x^2 + 2x - 3$
4) $y = x^2 + x - 6$



8. График какой из перечисленных ниже функций изображён на рисунке?

1) $y = x^2 + 4x$
2) $y = -x^2 - 4$
3) $y = -x^2 - 4x$
4) $y = x^2 + 4$



9. Функции заданы формулами:

а) $y = x^2 - 2$ в) $y = x^2 + 2$
б) $y = -x^2 - 2$ г) $y = -x^2 + 2$

Графики каких из этих функций не пересекают ось x?

1) а, в 2) в, г 3) б, г 4) б, в

2. а) Постройте график функции $y = -3x + 6$ и укажите, при каких значениях x функция принимает положительные значения.

б) Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x + 1$ и укажите, при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.

3. Функции заданы формулами:

а) $y = 25x - 10$ в) $y = 0{,}15x + 2$
б) $y = -20x + 15$ г) $y = -0{,}35x - 1$

Какие из них являются возрастающими?

1) а, б 2) б, в 3) а, в 4) а, б, в

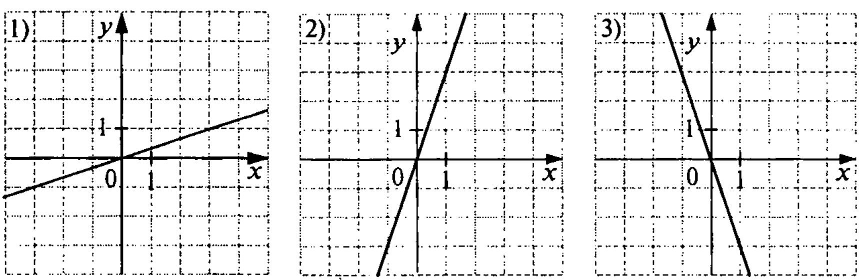
4. Функции заданы формулами:

1) $y = 1{,}1x$ 4) $y = -0{,}3x - 1$
2) $y = -0{,}4x + 1{,}5$ 5) $y = 1{,}3x - 1$
3) $y = -0{,}2x$

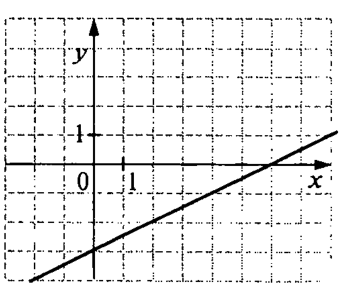
Какие из них являются убывающими? (Выпишите соответствующие номера.)

5. Каждую функцию, заданную формулой, соотнесите с её графиком.

А. $y = 3x$ Б. $y = -3x$ В. $y = \frac{1}{3}x$



6. График какой из перечисленных ниже функций изображён на рисунке?

а) 

1) $y = 0{,}5x - 3$
2) $y = -0{,}5x - 3$
3) $y = -0{,}5x + 3$
4) $y = 0{,}5x + 3$

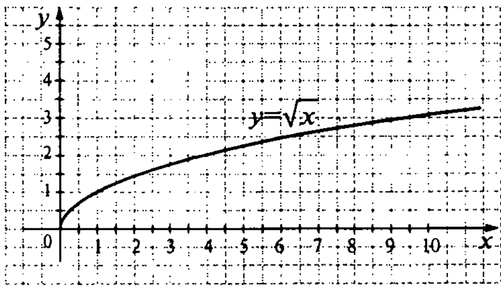


Рис. 6.16.

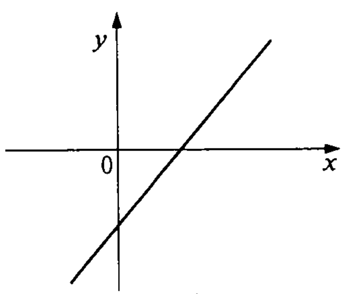
Областью определения функции $y=\sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел. Функция $y=\sqrt{x}$ является возрастающей. Из графика видно, что возрастание «замедляется» с увеличением значений аргумента. Но множеством значений функции является множество всех неотрицательных чисел, поэтому график пересекает любую горизонтальную прямую $y=c$, где $c \geqslant 0$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

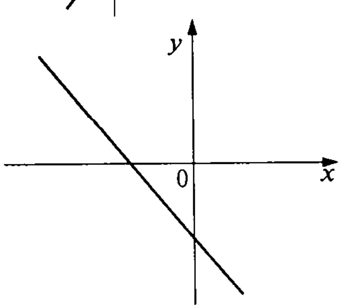
1. На рисунке изображён график функции $y = kx + b$. Определите знаки коэффициентов k и b.

а)



1) $k > 0, b > 0$
2) $k > 0, b < 0$
3) $k < 0, b > 0$
4) $k < 0, b < 0$

б)



1) $k > 0, b > 0$
2) $k > 0, b < 0$
3) $k < 0, b > 0$
4) $k < 0, b < 0$

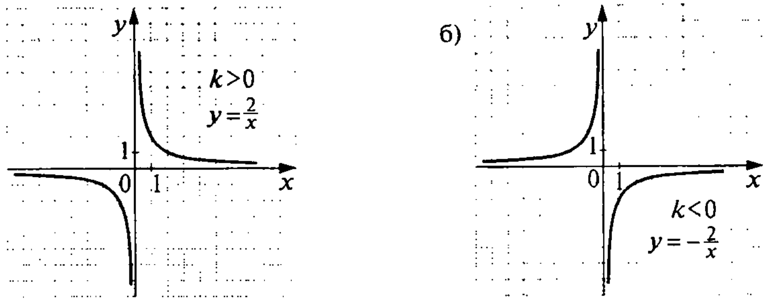


Рис. 6.14.

натных четвертях. На рисунке 6.14, *а* изображён график функции $y=\frac{2}{x}$, на рисунке 6.14, *б* — график функции $y=-\frac{2}{x}$.

При $k > 0$ функция $y=\frac{k}{x}$ *убывает* на каждом из двух промежутков области определения. При $k < 0$ функция $y=\frac{k}{x}$ *возрастает* на каждом из этих промежутков.

Функции $y = x^3$, $y=\sqrt{x}$

График функции $y = x^3$ изображён на рисунке 6.15.

Функция $y = x^3$ является возрастающей функцией. График её проходит через начало координат.

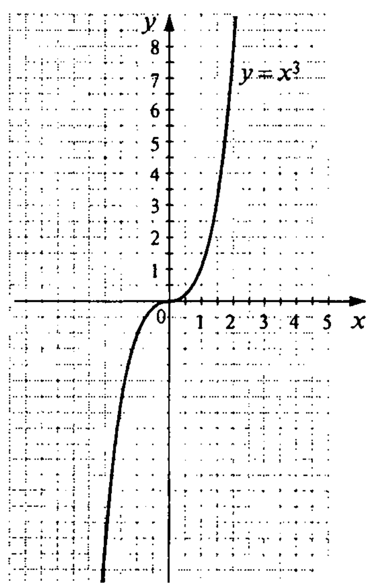


Рис. 6.15.

На рисунке 6.16 изображён график функции $y=\sqrt{x}$.

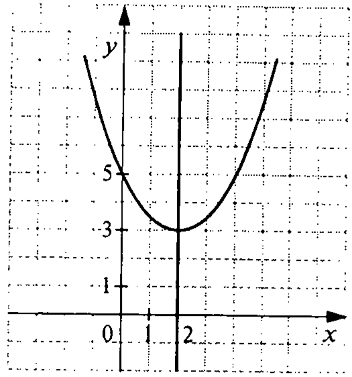


Рис. 6.12.

Отметим точку (2; 3) в координатной плоскости и проведём ось симметрии параболы — прямую $x = 2$ (рис. 6.12).

Вычислим координаты ещё нескольких симметричных точек графика: (0; 5) и (4; 5), (—1; 7) и (5; 7), (—2; 10) и (6; 10). Отметим эти точки в координатной плоскости и проведём через них плавную линию. Получим параболу $y=\frac{1}{2}x^2-2x+5$. По графику находим наименьшее значение функции, оно равно 3.

Пример 6. На рисунке 6.13 изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициента a и дискриминанта D квадратного трёхчлена.

1) $a > 0, D > 0$
2) $a > 0, D < 0$
3) $a < 0, D > 0$
4) $a < 0, D < 0$

Ветви параболы направлены вниз, следовательно, $a < 0$. Парабола пересекает ось x в двух точках, это значит, что квадратный трёхчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет два корня, т. е. дискриминант D положителен. Правильный ответ 3.

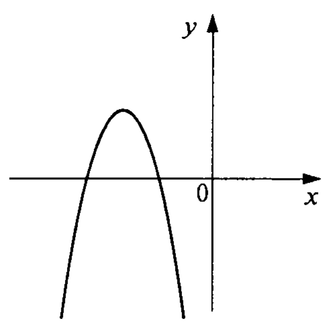


Рис. 6.13.

Функция $y=\frac{k}{x}$

Функцию, которая задана формулой $y=\frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют *обратной пропорциональностью*. Областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ является множество всех чисел, кроме 0. Графиком функции $y=\frac{k}{x}$ является *гипербола*. При $k > 0$ ветви гиперболы расположены в первой и третьей координатных четвертях, при $k < 0$ — во второй и четвёртой коорди-

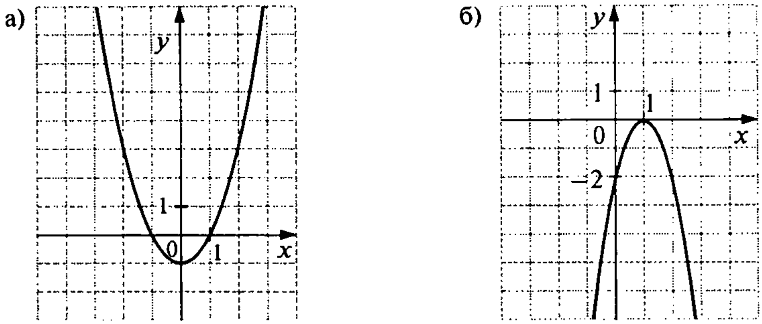


Рис. 6.11.

$= (x^2 - 2x + 1) - 3 - 1 = (x - 1)^2 - 4$, то функция может быть задана формулой $y = (x - 1)^2 - 4$.

Пример 4. Определим, пересекает ли график функции, заданной формулой, ось x:

а) $y = 15x^2 + 7$; б) $y = -3x^2 + 12$; в) $y = 3(x - 14)^2 - 10$.

Ответить на вопрос помогут схематические рисунки графиков, которые можно сделать, учитывая направление ветвей параболы и координаты её вершины. (Сделайте сами такие рисунки.) По рисунку делаем вывод: а) график не пересекает ось x (ветви параболы направлены вверх, вершина расположена выше оси x — в точке (0; 7)); б) график пересекает ось x (ветви параболы направлены вниз, вершина расположена выше оси x — в точке (0; 12)); в) график пересекает ось x (ветви параболы направлены вверх, вершина расположена ниже оси x — в точке (14; –10)).

Чтобы построить график функции $y = ax^2 + bx + c$, надо определить направление ветвей параболы, найти координаты её вершины и вычислить несколько точек, принадлежащих параболе. В частности, если позволяет масштаб, надо определить ординату точки пересечения параболы с осью y и найти координаты симметричной ей точки. Координаты вершины параболы можно находить разными способами. Можно привести формулу, задающую функцию, к виду $y = a(x + m)^2 + n$. Но проще воспользоваться формулами, приведёнными выше.

Пример 5. Построим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$. Укажим наименьшее значение этой функции.

График — парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём абсциссу вершины параболы по формуле: $x_в = -\frac{b}{2a}$; $x_в = \frac{2}{1} = 2$. Подставив значение $x_в$ в формулу $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$, найдём значение ординаты вершины: $y_в = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 + 5 = 3$.

Графиком квадратичной функции является *парабола*. На рисунке 6.9, *а* изображён график функции $y = x^2 - 2x - 3$, на рисунке 6.9, *б* — график функции $y = -x^2 - 4x + 5$.

Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. Вершина параболы имеет координаты $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Осью симметрии параболы является вертикальная прямая $x = -\frac{b}{2a}$. Корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ являются абсциссами точек пересечения параболы с осью x, а свободный член c — ординатой точки пересечения параболы с осью y.

При $b = 0$ и $c = 0$ формула квадратичной функции принимает вид $y = ax^2$. Графиком функции в этом случае является парабола, вершина которой расположена в начале координат (рис. 6.10).

График функции $y = ax^2 + bx + c$ может быть получен из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельных переносов вдоль осей координат. Рассмотрим разные случаи.

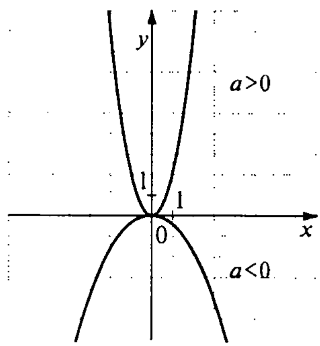


Рис. 6.10.

График функции $y = ax^2 + n$ получается из графика функции $y = ax^2$ переносом его вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, и $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$. Вершина параболы $y = ax^2 + n$ расположена на оси y и имеет координаты $(0; n)$. Осью симметрии параболы служит ось y. На рисунке 6.11, *а* изображён график функции $y = x^2 - 1$.

График функции $y = a\,(x + m)^2$ получается из графика функции $y = ax^2$ переносом его вдоль оси x на m единиц влево, если $m > 0$, и на $|m|$ единиц вправо, если $m < 0$. Вершина параболы в этом случае расположена на оси x и имеет координаты $(-m; 0)$. На рисунке 6.11, *б* изображён график функции $y = -2\,(x - 1)^2$.

График функции $y = a(x + m)^2 + n$ получается из графика функции $y = ax^2$ соответствующими переносами его вдоль осей координат. Вершина параболы $y = a\,(x + m)^2 + n$ находится в точке с координатами $(-m; n)$. Так, график функции $y = x^2 - 2x - 3$, изображённый на рисунке 6.9, *а*, получен из графика функции $y = x^2$ переносом его на одну единицу вправо вдоль оси x и на 4 единицы вниз вдоль оси y: так как $x^2 - 2x - 3 =$

Пример 2. Построим график функции $y=\frac{x^2-5x+6}{2-x}$. Выясним, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения.

Функция не определена при $x = 2$. Так как $\frac{x^2-5x+6}{2-x}=\frac{(x-2)(x-3)}{2-x}=$ $=-\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=-x+3$, то графиком исходной функции является прямая $y=-x+3$ без точки, абсцисса которой равна 2. (Постройте этот график.) По графику определяем, что $y > 0$, если $x < 3$ и $x \neq 2$.

Пример 3. Построим график функции $y=|x|$.

Определение модуля: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ На промежутке $[0; +\infty)$ построим график функции $y=x$, а на промежутке $(-\infty; 0)$ — график функции $y=-x$. Получим график, изображённый на рисунке 6.8.

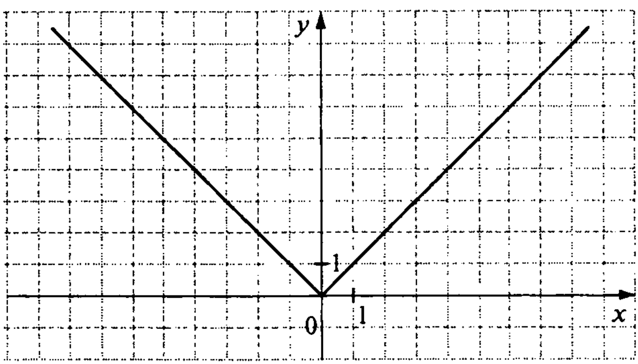


Рис. 6.8.

Квадратичная функция

Функция, которую можно задать формулой вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$, называется *квадратичной* функцией.

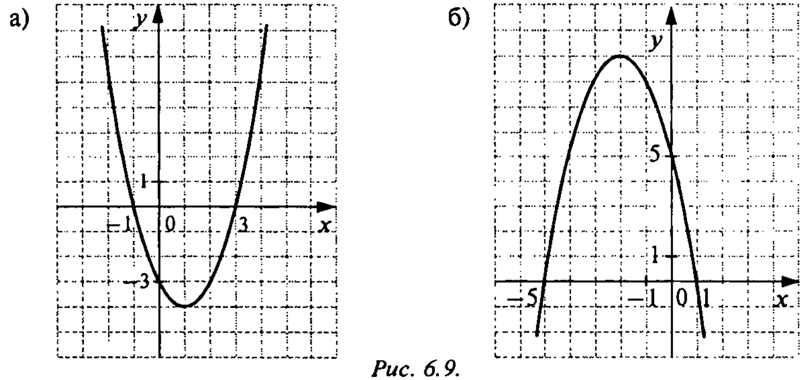


Рис. 6.9.

функция называется *постоянной* или *константой*. Графиком функции $y = b$ является *прямая, параллельная оси абсцисс* (рис. 6.5, *б*).

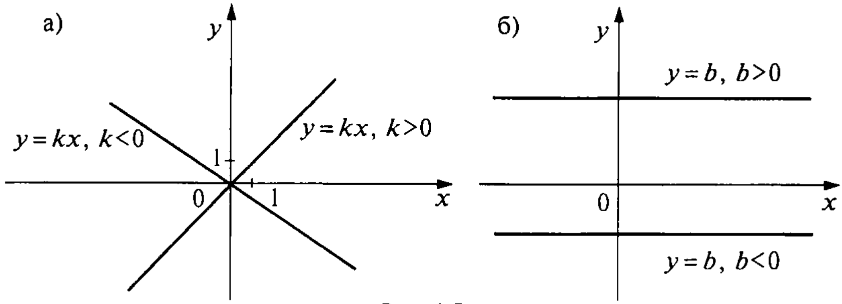


Рис. 6.5.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Чтобы построить график линейной функции, надо найти координаты каких-нибудь двух точек графика. В данном случае в качестве одной из них удобно взять точку, в которой график пересекает ось y: (0; —2). Найдём координаты второй точки; удобно брать такое значение x, которое при умножении на $\frac{1}{2}$ даёт целое число, например $x = 4$, получим точку (4; 0). График изображён на рисунке 6.6.

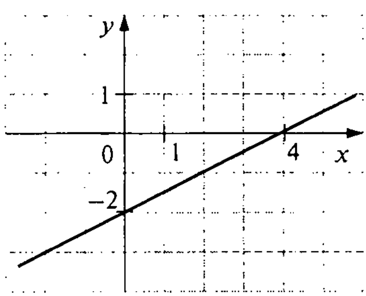


Рис. 6.6.

Полезно для самоконтроля, прежде чем строить график линейной функции, представить себе расположение прямой в координатной плоскости. В данном случае: так как $k > 0$, то функция возрастающая; так как $b = -2$, то прямая пересекает ось y в точке с ординатой —2. Значит, график должен иметь примерно такой вид, как на рисунке 6.7:

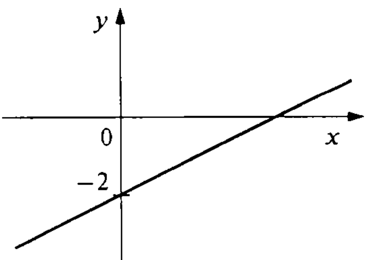


Рис. 6.7.

скоростью течения реки. Задачу можно решать «впрямую», вычисляя скорость движения плота на каждом участке по данным, считанным с графика. Например, на участке от A до B плот проплыл 3 км за 2 ч, значит, скорость течения реки равна 3 : 2 = 1,5 (км/ч). Но можно использовать тот факт, что наибольшей скорости соответствует наиболее крутой отрезок, а наименьшей — наименее крутой. **14.** а) 6 км/ч; б) 4 км/ч. ***Решение.*** б) За 45 мин, т. е. за $\frac{3}{4}$ ч турист прошёл 3 км, значит, за час он пройдёт $3:\frac{3}{4}=4$ (км). Можно рассуждать и иначе: за 45 мин турист прошёл 3 км, значит, за 15 мин он прошёл 1 км, а за час пройдёт 4 км. **15.** а) 4; б) 1. **16.** $f(-3) > f(3)$. **17.** А3, Б1, В2. *Указание.* Целесообразно идти от формул и использовать разные способы поиска графика, соответствующего этой формуле. Например, вычислить точку пересечения с осью ординат, найти область определения функции. **18.** $K(0;\ 1)$, $L(-0,5;\ 0)$, $M(1;\ 0)$. *Указание.* Точки, координаты которых следует найти, являются точками пересечения графика с осями координат, поэтому задача сводится к вычислению координат точек, в которых график пересекает ось y и ось x, и последующему выбору среди точек пересечения с осью x нужных двух точек.

6.2. Числовые функции, их графики и свойства

Теоретические сведения

Линейная функция

Функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, называется *линейной*. Графиком линейной функции является *прямая*. При $k > 0$ линейная функция является возрастающей (рис. 6.4, *а*), при $k < 0$ — убывающей (рис. 6.4, *б*).

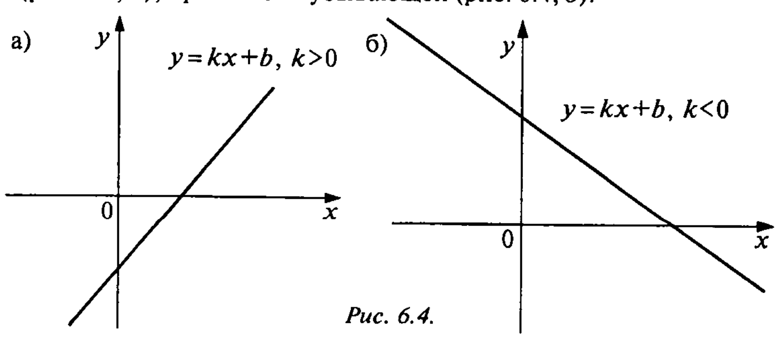


Рис. 6.4.

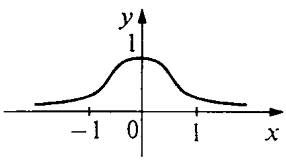
При $b = 0$ формула принимает вид $y = kx$. Графиком функции $y = kx$ является *прямая, проходящая через начало координат* (рис. 6.5, *а*).

При $k = 0$ формула линейной функции имеет вид $y = b$. Она принимает одно и то же значение, равное b, при всех значениях аргумента. Такая

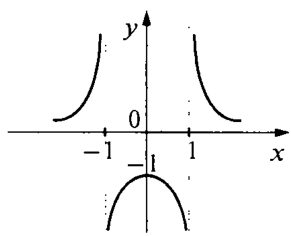
16. Функция $y = f(x)$ задана условиями: $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{если } x \le 1, \\ 2-x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$
Сравните $f(-3)$ и $f(3)$.

17. На рисунке изображены графики функций: 1) $y=\frac{1}{x^2-1}$, 2) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$, 3) $y=\frac{1}{x^2+1}$. Для каждого графика укажите формулу, задающую эту функцию.

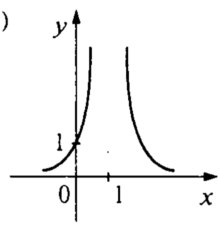
А)



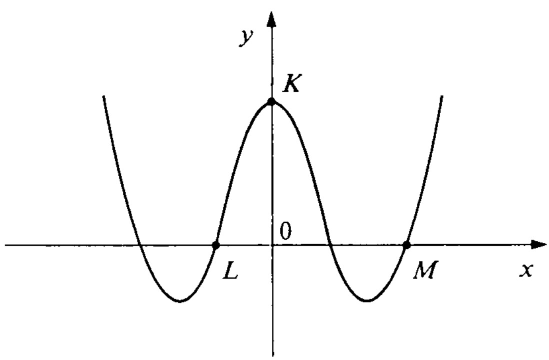
Б)



В)



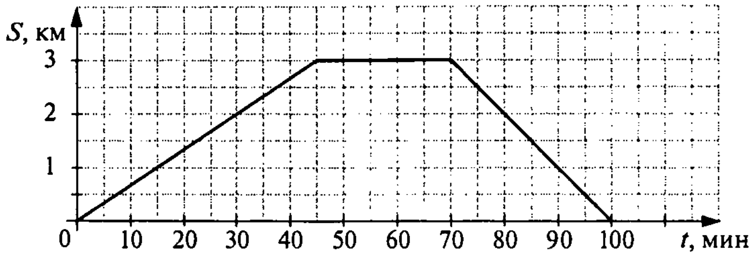
18. На рисунке изображён график функции $y=4x^4-5x^2+1$. Найдите координаты точек K, L и M.



Решения и ответы

1. 3. **2.** При $x = -4$ и $x = 7$. **3.** 2. **4.** 1. *Решение.* На каждые 10 км расходуется 0,7 л бензина, а на x км будет израсходовано $0{,}7\cdot\frac{x}{10}$ л бензина. В баке при этом останется $60-\frac{0{,}7x}{10}$ л бензина. **5.** $y=100-4x$, $0 \leqslant x \leqslant 25$. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 4. **9.** 2. **10.** 1. **11.** $x \neq 0$. **12.** 3. **13.** а) 1; б) 2. Плот движется со

14. Турист вышел из лагеря, дошёл до озера и, пробыв там некоторое время, вернулся обратно. На рисунке изображён график его движения (по горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — расстояние, на котором турист находится от лагеря).



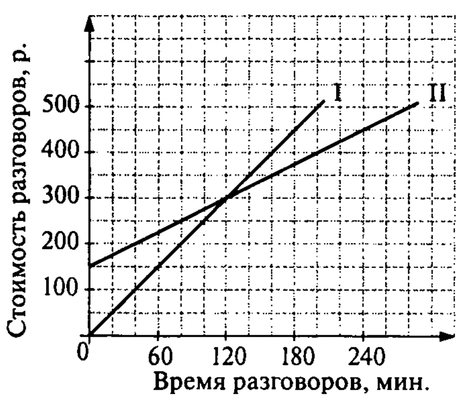
а) Найдите скорость туриста на пути к озеру, выразив её в километрах в час.

б) Найдите скорость туриста на обратном пути, выразив её в километрах в час.

15. Телефонная компания предлагает абонентам две разные схемы начисления ежемесячной платы за разговоры:

схема I — без первоначального взноса;
схема II — с первоначальным взносом, но с меньшей стоимостью минуты разговора.

Для наглядности эти схемы изображены графически.



а) При каких планируемых ежемесячных расходах на телефонные разговоры абоненту выгоднее воспользоваться схемой I?

1) 400 р. 2) 350 р. 3) 300 р. 4) 200 р.

б) При какой длительности телефонных разговоров в месяц абоненту выгоднее воспользоваться схемой II?

1) 180 мин 2) 120 мин 3) 60 мин 4) 20 мин

9. График какой из заданных функций проходит через начало координат?

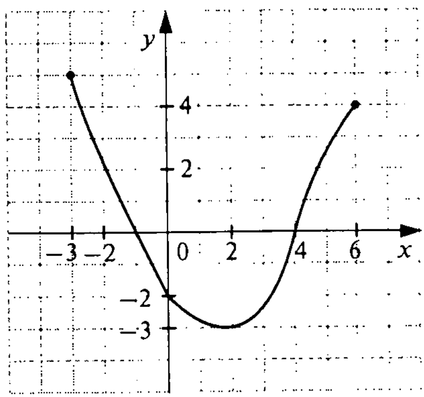
1) $y = x^2 - 3$ 2) $y = x^2 + 3x$ 3) $y = x + 3$ 4) $y = -\frac{3}{x}$

10. Функция задана формулой $y = \frac{x^2}{x-3}$. Укажите область определения функции.

1) $x \neq 3$ 2) $x \neq -3$ 3) $x \neq 0$ 4) x — любое число

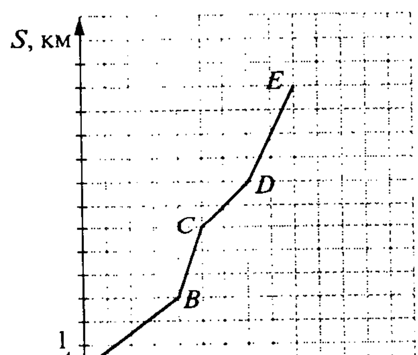
11. Найдите область определения функции, заданной формулой $y = \frac{x+4}{x^2}$.

12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-3; 6]$. Какое из следующих утверждений **неверно**?



1) нули функции — числа $-1; 4$
2) $f(x) = -2$ при $x = 0$
3) $f(x) > 0$ при $x > 0$
4) функция возрастает на промежутке $[2; 6]$

13. Плот плывёт по реке. На рисунке изображён график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения t, по вертикальной — расстояние s, которое проплыл плот.



а) На каком участке пути скорость течения реки наименьшая?
1) от A до B 3) от C до D
2) от B до C 4) от D до E

б) На каком участке пути скорость течения реки наибольшая?
1) от A до B 3) от C до D
2) от B до C 4) от D до E

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Функция задана формулой $y=\frac{x^2-4}{x-2}$. Найдите значение функции при $x=1$.

2. Определите, при каких значениях аргумента значение функции $y=x^2-3x-10$ равно 18.

3. Функция задана формулой $y=f(x)$, где $f(x)=2x^2+3x$. Найдите $f(0{,}5)$.

4. Вместимость бензобака автомобиля 60 л. При движении по шоссе расходуется 0,7 л бензина на каждые 10 км пути. Количество бензина y (в литрах), остающегося в баке, является функцией расстояния x (в километрах), пройденного автомобилем. Какая из следующих формул задаёт эту функцию?

1) $y=60-\frac{0{,}7x}{10}$
2) $y=7x+60$
3) $y=60-7x$
4) $y=60-\frac{10}{0{,}7x}$

5. Из заполненного водой бака вместимостью 100 л через открытый кран вода вытекает со скоростью 4 л в минуту. Количество y (в литрах) остающейся в баке воды является функцией времени x (в минутах), в течение которого вытекает вода. Задайте эту функцию формулой и укажите область определения функции.

6. Укажите точку, которая принадлежит графику функции $y=\frac{x^2-4}{x-2}$.

1) $A(1;-3)$ 2) $B(4;0)$ 3) $C(-6;-4)$ 4) $D(-4;6)$

7. Через какую из указанных точек проходит график функции $y=\frac{x+2}{x^2-4}$?

1) $A(1;-3)$
2) $B(4;0)$
3) $C\left(-6;-\frac{1}{10}\right)$
4) $D\left(-4;-\frac{1}{6}\right)$

8. График какой из заданных функций **не** проходит через начало координат?

1) $y=2x-x^2$ 2) $y=2x^2$ 3) $y=-2x$ 4) $y=\frac{2}{x}$

ет. Так, при $x = 3$ значение функции равно -1 (записывается: $f(3) = -1$); значение функции равно 3 при $x = -2$ и $x = 0$ (записывается: $f(x) = 3$ при $x = -2$ и $x = 0$).

График функции наглядно отражает многие её *свойства*. Функция $y = f(x)$, график которой изображён на рисунке 6.2, *возрастает* на промежутке $[-4; -1]$ и *убывает* на промежутке $[-1; 4]$. При $x = -1$ функция принимает *наибольшее значение*, равное 4. Значение функции равно 0 при $x = -3$ и $x = 2$; значения аргумента, при которых значения функции равны нулю, называют *нулями функции*, значит, -3 и 2 — нули функции $y = f(x)$. При $-4 < x < -3$ и $2 < x < 4$ функция принимает *отрицательные значения*, при $-3 < x < 2$ функция принимает *положительные значения*.

С помощью графиков часто задают функции, описывающие реальные зависимости между величинами. Такие графики позволяют получить различную информацию об исследуемой зависимости.

Пример 4. На графиках (рис. 6.3) показано, как во время телевизионных дебатов между кандидатами А и Б телезрители голосовали за каждого из них. По горизонтальной оси откладывается время, прошедшее с начала голосования (в минутах), по горизонтальной — число поданных к этому времени голосов (в тыс. голосов).

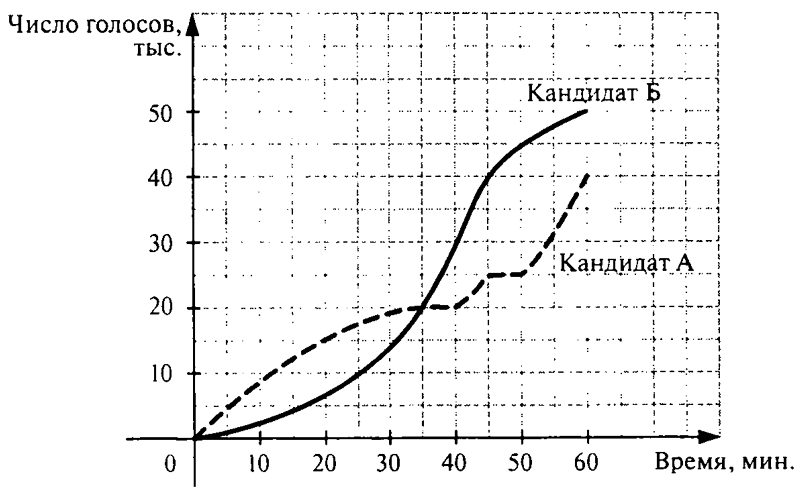
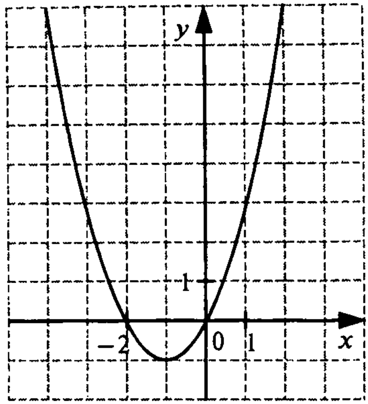


Рис. 6.3.

а) Сколько всего телезрителей проголосовало к 35-й минуте дебатов?

б) За кого из кандидатов было подано больше голосов к 60-й минуте дебатов и на сколько больше?

Из рисунка видно, что к 35-й минуте кандидаты получили равное число голосов — по 20 тыс., значит, всего к этому времени проголосовало 40 тыс. телезрителей. К 60-й минуте лидировал кандидат Б — за него было подано 50 тыс. голосов, а за кандидата А — 40 тыс., т. е. за кандидата Б проголосовало на 10 тыс. телезрителей больше.

а) 

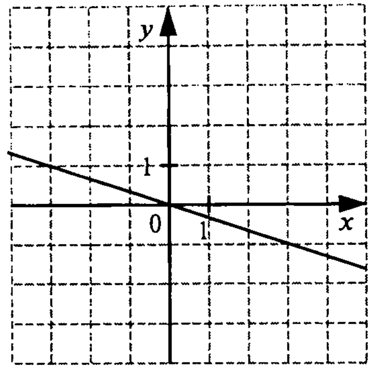
б) 

Рис. 6.1.

Пример 3. Определим, какая из заданных точек принадлежит графику функции $y = 6 - 3x$:

1) $A\ (-1;\ 3)$ 2) $B\ (8;\ -18)$ 3) $C\ (-5;\ 20)$ 4) $D\ (6;\ 12)$

Точка принадлежит графику функции, если при подстановке её координат в формулу, задающую функцию, получается верное равенство. Подставляя по очереди координаты заданных точек в формулу $y = 6 - 3x$, получим, что графику этой функции принадлежит точка B: $6 - 3 \cdot 8 = 6 - 24 = -18$.

Любой график, каждую точку которого пересекает не более одной прямой, параллельной оси ординат, можно рассматривать как график функции. Так, кривая, изображённая на рисунке 6.2, задаёт некоторую функцию $y = f(x)$ с областью определения $[-4;\ 4]$.

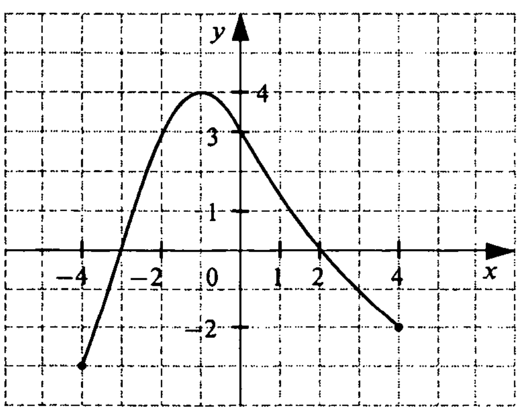


Рис. 6.2.

С помощью графика для каждого значения аргумента можно найти соответствующее ему значение функции и, наоборот, для каждого значения функции указать значение аргумента, которому оно соответствуния функции $y = x^2$ — это множество всех действительных чисел. А областью определения функции $y = \frac{2}{x-1}$ является множество всех действительных чисел, кроме 1.

При рассмотрении зависимостей между реальными величинами область определения функции часто сужается по сравнению с её «естественной» областью определения. Например, если в формуле $y = x^2$ переменная y означает площадь квадрата, являющуюся функцией стороны квадрата x, то областью определения этой функции служит множество положительных действительных чисел.

Правило, по которому каждому значению аргумента ставится в соответствие значение функции, принято обозначать буквой f (или какой-либо другой буквой — p, q и др.). Запись $y = f(x)$ означает, что переменная y является функцией переменной x и значения переменной y получаются из значений аргумента x по правилу f. Значение функции, соответствующее конкретному значению аргумента a, обозначают $f(a)$. Например, если дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, то $f(-3) = (-3)^2 = 9$.

Пример 1. Число диагоналей p выпуклого многоугольника является функцией числа его вершин n. Зададим эту функцию формулой и укажем её область определения.

Каждую из n вершин многоугольника можно соединить диагональю с $(n - 3)$ другими вершинами (вычитаются сама соединяемая вершина и две соседние), в результате чего получатся $n(n - 3)$ отрезков. Но таким образом каждый отрезок посчитан дважды: например, отрезок AC посчитан как соединяющий вершину A с вершиной C и как отрезок, соединяющий C с A. Поэтому полученное произведение надо разделить на 2. Всего получится $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей. Получаем формулу: $p = \frac{n(n-3)}{2}$. Область определения функции: $n \in N$, $n \geq 4$ (число диагоналей выражается натуральным числом, и четырёхугольник — «первый» многоугольник, имеющий диагонали).

Пример 2. Дана функция $f(x) = 1 - 2x^3$. Найдём $f(-3)$.

Подставив в формулу значение $x = -3$, получим: $f(-3) = 1 - 2 \cdot (-3)^3 =$ $= 55$.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, координатами которых являются соответствующие значения аргумента и функции. Значения аргумента x обычно откладывают по горизонтальной оси (оси абсцисс), значения функции — по вертикальной (оси ординат). На рисунке 6.1 изображены графики функций $y = x^2 + 2x$ (рис. 6.1, *а*) и $y = -\frac{x}{3}$ (рис. 6.1, *б*).

§ 6. Функции и графики

Что надо знать и уметь:

- использовать и понимать функциональную терминологию и символику: аргумент, значение функции, область определения функции, график функции, обозначение $f(x)$[1];
- находить значения функции, заданной формулой, графиком, таблицей; решать обратную задачу: по заданному значению функции находить значение аргумента; понимать графическую интерпретацию свойств функции, иллюстрировать эти свойства схематически с помощью графиков;
- распознавать графики изученных функций, соотносить их с формулами, задающими функции; знать особенности расположения в координатной плоскости графиков функции $y = kx + b$ и $y = \frac{k}{x}$ в зависимости от значения коэффициентов, входящих в формулу, функции $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от знаков a и D;
- строить графики изученных функций;
- читать графики реальных зависимостей, задавать с помощью формулы или графика зависимости между величинами.

6.1. Основные понятия

Теоретические сведения

Если две величины связаны некоторой зависимостью, т. е. с изменением значений одной величины меняются значения другой, то первую называют *независимой* величиной (или независимой переменной), а вторую — *зависимой* величиной (или зависимой переменной). В тех случаях, когда каждому значению независимой переменной соответствует одно вполне определённое значение другой переменной (зависимой), говорят, что вторая переменная является *функцией* первой. Для независимой переменной в этих случаях используется термин *аргумент*. Множество значений переменной, для которых рассматривается функция, называют *областью определения функции*.

Функция может быть задана разными способами — описанием, таблицей, формулой, графиком. В курсе алгебры основным способом является задание функции *с помощью формулы*. Например, формула $y = x^2$ каждому значению независимой переменной x ставит в соответствие её квадрат.

При задании функции с помощью формулы подразумевается (если не сделано никаких оговорок), что *область определения функции есть множество допустимых значений аргумента*. Так, область определе-

[1] Проверяется опосредованно в ходе решения задач, соответствующих другим умениям данного раздела.

14. а) Найдите наименьшее целое значение переменной a, при котором имеет смысл выражение $\sqrt{2a^2+11a+12}+\sqrt{10-3a-a^2}$.

б) Найдите наибольшее целое значение переменной a, при котором имеет смысл выражение $\sqrt{24+5a-a^2}+\sqrt{2a^2-19a+35}$.

Решения и ответы

1. 1. **2.** $x<-5$, $x<1$. **3.** 2. **4.** $(-3; 0)$. **5.** а) $[-2; 1]$; б) $[-5; 1]$. **6.** а) $[-3; 3]$; б) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$ **7.** а) 3; б) 4. **8.** А2, Б4, В1, Г3. **9.** При $x<-4$ и $x>5$. *Решение.* Задача сводится к решению неравенства $(6-x)(x+5)<10$: раскрываем скобки $-x^2+x+30<10$, откуда $x^2-x-20>0$. Корни соответствующего уравнения равны $x_1=5$, $x_2=-4$. Неравенство выполняется при $x<-4$ и при $x>5$. Ответ можно записать и в виде: $x\in(-\infty; -4)\cup(5; +\infty)$. **10.** $0{,}4 \leqslant x \leqslant 4$. *Решение.* Умножив обе части неравенства на 10 и выполнив преобразования, получим неравенство: $5x^2-22x+8\leqslant 0$. **11.** $[-1; \frac{2}{3}]$. *Решение.* Решив неравенство, получим: $-4<x<\frac{2}{3}$. Найти решения, принадлежащие заданному промежутку, можно с помощью координатной прямой. Ответ может быть дан и в виде двойного неравенства. **12.** а) $(-\infty;-3)\cup\left(-3;\frac{2}{3}\right]\cup[2;3)\cup(3;+\infty)$. *Решение.* Область определения выражения задаётся условиями $\begin{cases}3x^2-8x+4\geqslant 0,\\ x^2-9\neq 0.\end{cases}$ Решим неравенство $3x^2-8x+4\geqslant 0$: соответствующие корни равны $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=2$; множеством решения неравенства являются промежутки $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$ и $[2;+\infty)$. Из условия $x^2-9\neq 0$ имеем $x\neq\pm 3$. Отсюда: $x\in(-\infty;-3)\cup\left(-3;\frac{2}{3}\right]\cup[2;3)\cup(3;+\infty)$; б) $\left[-2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right)\cup\left(2\frac{1}{3}; 3\right]$. **13.** а) $\frac{5}{6}<x<2$. *Решение.* Множество решений первого неравенства: $0{,}8<x<2$; множество решений второго неравенства: $x>\frac{5}{6}$. С помощью координатной прямой находим пересечение этих множеств; б) $-3<x<\frac{1}{3}$. **14.** а) $a=-5$; *Решение.* Выражение $\sqrt{2a^2+11a+12}+\sqrt{10-3a-a^2}$ имеет смысл в том и только в том случае, когда оба слагаемых имеют смысл. Таким образом, чтобы найти все значения переменной, при которых выражение имеет смысл, надо решить систему неравенств $\begin{cases}2a^2+11a+12\geqslant 0,\\ 10-3a-a^2\geqslant 0.\end{cases}$ Множество решений первого неравенства: $a\leqslant -4$, $a\geqslant -1{,}5$; множество решений второго неравенства: $-5\leqslant a\leqslant 2$. С помощью координатной прямой находим пересечение этих множеств: $[-5; -4]\cup[-1{,}5; 2]$. Наименьшим целым числом, принадлежащим этому множеству, является число -5; б) $a=8$.

5. Решите неравенство: а) $x^2 + x - 2 \leqslant 0$;   б) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$.

6. Решите неравенство: а) $x^2 - 9 \leqslant 0$;   б) $x^2 - 25 \geqslant 0$.

7. а) Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 + 9 < 0$ 3) $x^2 + 9 > 0$
2) $x^2 - 9 < 0$ 4) $x^2 - 9 > 0$

б) Укажите неравенство, которое не имеет решений.

1) $x^2 - 4 > 0$ 3) $x^2 - 4 < 0$
2) $x^2 + 4 > 0$ 4) $x^2 + 4 < 0$

8. Для каждого неравенства укажите множество его решений.

Неравенство	*Множество решений неравенства*
А. $x^2 + 36 > 0$	1) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$
Б. $x^2 + 35 < 0$	2) $(-\infty; +\infty)$
В. $x^2 - 36 > 0$	3) $(-6; 6)$
Г. $x^2 - 36 < 0$	4) $\varnothing$

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

9. При каких значениях x произведение $(6 - x)(x + 5)$ принимает значения, меньшие 10?

10. Решите неравенство $\frac{x^2}{2} \leqslant \frac{11x-4}{5}$.

11. Найдите все решения неравенства $\frac{3x^2}{4} \leqslant \frac{4-5x}{2}$, принадлежащие промежутку $[-1; 1]$.

12. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{\sqrt{3x^2-8x+4}}{x^2-9}$;   б) $\frac{\sqrt{21+2x-3x^2}}{3x-7}$.

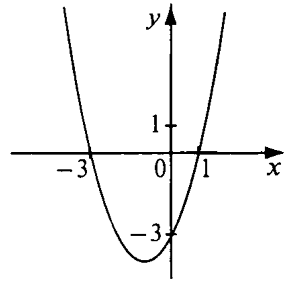
13. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x^2 - 14x + 8 < 0, \\ 6x - 5 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x^2 + 12x - 9 < 0, \\ 3x - 1 < 0. \end{cases}$

Тренировочные задания

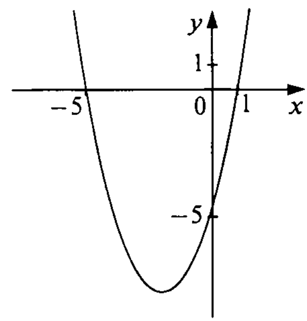
ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Используя рисунок, решите неравенство $x^2 + 2x - 3 < 0$.

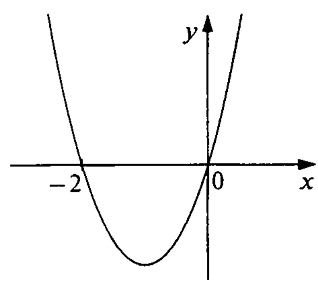


1) $-3 < x < 1$
2) $-3 \leqslant x \leqslant 1$
3) $x < -3$ или $x < 1$
4) $x \leqslant -3$ или $x \geqslant 1$

2. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + 4x - 5$. Используя рисунок, решите неравенство $x^2 + 4x - 5 > 0$.

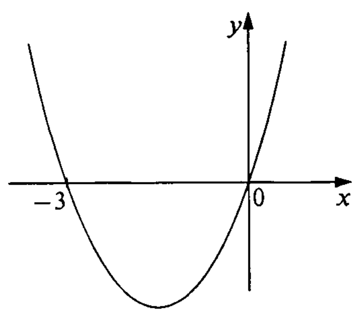


3. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + 2x$. Используя рисунок, решите неравенство $x^2 > -2x$.



1) $(-2; 0)$
2) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$
3) $(-\infty; -2)$
4) $(0; +\infty)$

4. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + 3x$. Используя рисунок, решите неравенство $x^2 < -3x$.



В этом случае любое число является решением неравенства, так как при всех значениях x функция $y = 2x^2 - 3x + 2$ принимает положительные значения. Ответ можно записать по-разному :

1) x — любое число;

2) $(-\infty;\ +\infty)$.

Если неравенство нестрогое, то не надо забывать включить в множество решений значения переменной, при которых квадратный трёхчлен обращается в нуль.

Пример 3. Найдём область определения выражения: $\dfrac{\sqrt{-4+8x-3x^2}}{x^2-1}$.

Область определения выражения задаётся условиями:

$$\begin{cases} -4+8x-3x^2 \geqslant 0, \\ x^2-1 \neq 0. \end{cases}$$

Решив каждое из неравенств, получим:

1) $-4 + 8x - 3x^2 \geqslant 0$; $3x^2 - 8x + 4 \leqslant 0$; $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 2$; $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$;

2) $x^2 - 1 \neq 0$; $x \neq \pm 1$.

Сделаем схематический рисунок (рис. 5.8):

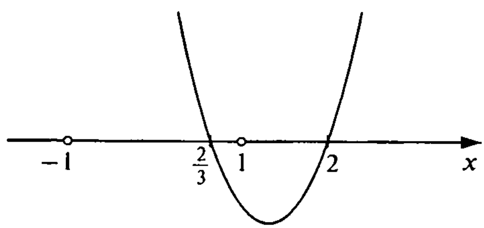


Рис. 5.8.

Из рисунка видно, что множеством решений системы неравенств является промежуток от $\frac{2}{3}$ до 2 (включая эти числа) без числа 1.

Ответ можно записать по-разному:

1) $\frac{2}{3} \leqslant x < 1$; $1 < x \leqslant 2$;

2) $\left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; 2]$;

3) $\begin{cases} \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$

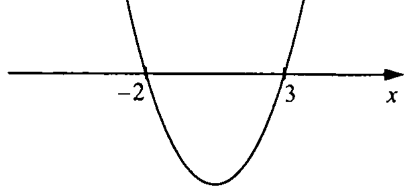


Рис. 5.6.

Ответ можно записать по-разному:

1) $x < -2$; $x > 3$;

2) $(-\infty; -2) \cup (3;\ +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство $x(3 - 2x) > 2$.

Раскроем скобки и перенесём все слагаемые в левую часть, получим: $-2x^2 + 3x - 2 > 0$. Теперь заменим неравенство равносильным неравенством с положительным первым коэффициентом (для этого умножим обе части неравенства на -1 и заменим знак неравенства на противоположный): $2x^2 - 3x + 2 < 0$.

Выясним, пересекает ли парабола — график функции $y = 2x^2 - 3x + 2$ — ось x. Найдём дискриминант квадратного трёхчлена $2x^2 - 3x + 2$, а именно: $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 16 < 0$. Так как дискриминант отрицательный, то квадратный трёхчлен не имеет корней и парабола не пересекает ось x. Изобразим эту параболу схематически (рис. 5.7):

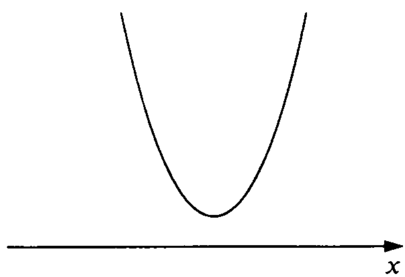


Рис. 5.7.

При всех значениях x парабола расположена выше оси x, это означает, что нет таких значений x, при которых функция $y = 2x^2 - 3x + 2$ принимает отрицательные значения, значит, неравенство $2x^2 - 3x + 2 < 0$ решений не имеет.

Ответ можно записать по-разному:

1) неравенство решений не имеет;

2) $\varnothing$.

Воспользуемся этим же рисунком, чтобы решить неравенство $-2x^2 + 3x - 2 < 0$. Заменим его равносильным неравенством $2x^2 - 3x + 2 > 0$.

Понятно, что вместо знака > могут стоять и другие знаки неравенства: <, $\geqslant$, $\leqslant$.

Множество решений квадратного неравенства легко найти, используя график функции $y = ax^2 + bx + c$.

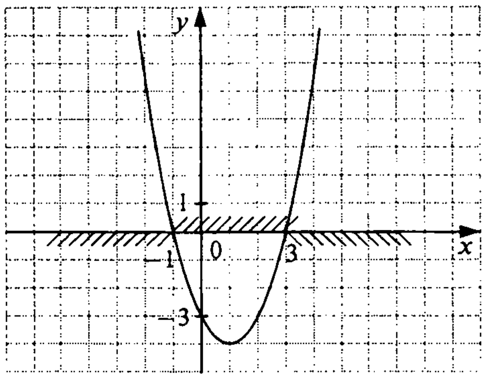


Рис. 5.5.

На рисунке 5.5 изображён график функции $y = x^2 - 2x - 3$. График пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -1 и 3, т. е. при $x = -1$ и $x = 3$ значения функции $y = x^2 - 2x - 3$ равны нулю.

При $-1 < x < 3$ график расположен ниже оси x, т. е. значения функции на этом промежутке отрицательны. Иными словами, множеством решений неравенства $y < 0$ является промежуток $-1 < x < 3$.

При $x < -1$ и $x > 3$ график расположен выше оси x, т. е. значения функции положительны. Иными словами, неравенство $x^2 - 2x - 3 > 0$ выполняется при $x < -1$ и $x > 3$.

При решении квадратных неравенств можно ограничиться схематическим рисунком, показывающим положение графика относительно оси x, так как координаты вершины в данном вопросе значения не имеют; можно также не изображать ось y.

Если требуется решить квадратное неравенство с отрицательным коэффициентом a, то всегда целесообразно перейти к равносильному неравенству с положительным первым коэффициентом, умножив обе части неравенства на -1. Например, вместо неравенства $5 + 4x - x^2 \leqslant 0$ решать неравенство $x^2 - 4x - 5 \geqslant 0$.

Пример 1. Решим неравенство $x^2 - x - 6 > 0$.

Выясним, пересекает ли график функции $y = x^2 - x - 6$ ось x. Для этого решим уравнение $x^2 - x - 6 = 0$. Его корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, парабола (график функции) пересекает ось x в точках с абсциссами -2 и 3, её ветви направлены вверх. Покажем схематически расположение параболы относительно оси x (рис. 5.6).

Из рисунка видно, что парабола расположена выше оси x при $x < -2$ и $x > 3$. Объединение этих промежутков и составляет множество решений неравенства $x^2 - x - 6 > 0$.

11. Решите неравенство $\frac{4x+13}{10}-\frac{5+2x}{4}\geqslant\frac{6-7x}{20}-1$.

12. Найдите наибольшее целое значение x, при котором сумма дробей $\frac{11-2x}{5}$ и $\frac{3-2x}{2}$ положительна.

13. Решите систему неравенств $\begin{cases}3(2x-5)-3(4x+3)\geqslant 2(2x-1),\\ 2(13-5x)\leqslant 5(3x+8)-10(3x-1).\end{cases}$

14. Решите систему неравенств $\begin{cases}2x>\frac{14x+17}{2},\\ \frac{1+2x}{4}<\frac{5+4x}{10}-\frac{2}{5}.\end{cases}$

15. Решите неравенство:

а) $(\sqrt{3}-1{,}5)(3-2x)>0$; б) $(\sqrt{6}-2{,}5)(10-3x)<0$.

Решения и ответы

1. 3. **2.** 1. **3.** а) $x<64$; б) $x>48$. **4.** а) при $x\geqslant -0{,}4$; б) при $x\geqslant 0{,}2$. **5.** а) 2; б) 4. **6.** А2, Б4, В3. **7.** а) $x<-1{,}5$; б) $-0{,}2<x<2{,}5$. **8.** а) $x\leqslant 0{,}25$; б) $10<x<20$. **9.** а) $1<x<9$; б) $-0{,}4\leqslant x\leqslant 2$. **10.** 1) Нет; 2) возможна. *Указание.* Составьте по условию задачи систему неравенств. В задаче 1 получим $x>32$ и $x<31\frac{2}{3}$ (где x — стоимость ручки), система не имеет решений; в задаче 2 цена моркови x находится в пределах $20<x<40$. **11.** $x\geqslant -3$. *Указание.* Сначала надо привести неравенство к «целому» виду. Для этого умножим обе части неравенства на общий знаменатель 20, получим: $2(4x+13)-5(5+2x)\geqslant 6-7x-20$. **12.** $x=2$. *Указание.* По условию задачи составляется неравенство $\frac{11-2x}{5}+\frac{3-2x}{2}>0$. Множество решений этого неравенства: $x<2\frac{9}{14}$. Наибольшим целым числом, принадлежащим этому множеству, является число 2. **13.** $x\leqslant -2{,}2$. **14.** $x<-1{,}7$. После преобразований (умножения каждой части неравенства на наименьший общий знаменатель) получается система $\begin{cases}4x>14x+17,\\ 5(1+2x)<2(5+4x)-8.\end{cases}$ **15.** а) $x<15$; б) $x<\frac{10}{3}$.

5.3. Решение квадратных неравенств

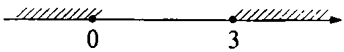
Теоретические сведения

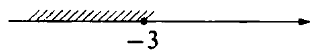
Определение. ***Неравенство вида $ax^2+bx+c>0$, где $a\neq 0$, называют квадратным неравенством.***

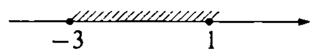
б) На каком из рисунков показано множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+9 \geqslant 0, \\ 4x-1 \leqslant 3? \end{cases}$$

1) 

2) 

3) 

4) 

6. Для каждой системы неравенств укажите номер варианта рисунка, на котором изображено множество её решений.

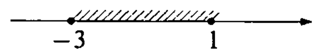
Система неравеств

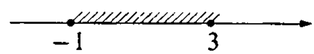
А. $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases}$

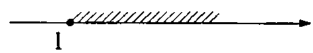
Б. $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x+3 \leqslant 0 \end{cases}$

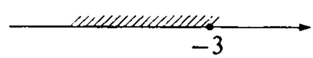
В. $\begin{cases} x \geqslant -3 \\ 1-x \leqslant 0 \end{cases}$

Множество решений системы

1) 

2) 

3) 

4) 

7. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x > 12+11x, \\ 5x-1 < 0; \end{cases}$　　б) $\begin{cases} x-1 > 3x-6, \\ 5x+1 > 0. \end{cases}$

8. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3(1-x) \geqslant 1, \\ 4x-1 \leqslant 0; \end{cases}$　　б) $\begin{cases} 5x > 2(x+15), \\ 21-x > 1. \end{cases}$

9. Найдите множество решений двойного неравенства:

а) $1 < 10-x < 9$;　　б) $-7 \leqslant 3-5x \leqslant 5$.

10. Определите, возможна ли описанная ситуация:

1) Один покупатель купил 4 тетради по 20 р. и 10 одинаковых шариковых ручек и заплатил за покупку больше 400 р. Другой покупатель за одну такую же тетрадь и 12 таких же ручек заплатил меньше 400 р.

2) Один покупатель купил 3 кг огурцов по цене 40 р. за килограмм и 2 кг моркови, другой купил 2 кг таких же огурцов и 3 кг такой же моркови. Первый заплатил меньше 200 р., а второй больше 140 р.

Для решения составим по условию задачи систему неравенств, используя неравенство треугольника.

Пусть длина основания треугольника равна x см. Тогда периметр треугольника равен $(x + 26)$ см и в соответствии с условием $x + 26 > 44$.

Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон. Поэтому можно составить ещё два неравенства, которым должны удовлетворять искомые величины: $x < 26$; $13 < x + 13$.

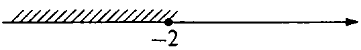
Получаем систему неравенств: $\begin{cases} x+26>44, \\ x<26, \\ 13<x+13. \end{cases}$ Решив её, получим, что $18 < x < 26$.

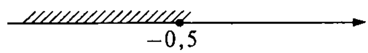
Ответ: (18; 26).

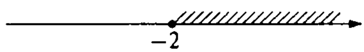
Тренировочные задания

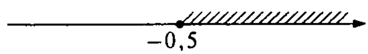
ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. а) На каком из рисунков приведена графическая иллюстрация решения неравенства $3 - x \geqslant 3x + 5$?

1) 

3) 

2) 

4) 

2. Решите неравенство $5 - 4(x - 2) < 22 - x$.

1) $(-3; +\infty)$ 2) $(-\infty; -\frac{1}{3})$ 3) $(-\frac{1}{3}; +\infty)$ 4) $(-\infty; -3)$

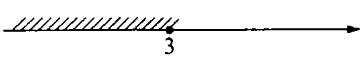
3. Решите неравенство:

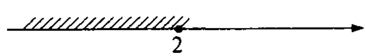
а) $8-\frac{1}{8}x>0$; б) $-\frac{1}{4}x+12<0$.

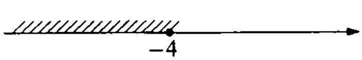
4. а) При каких значениях x значения выражения $3 + x$ не меньше значений выражения $5 + 6x$?

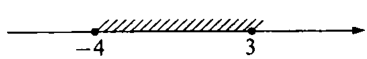
б) При каких значениях x значения выражения $10 - 7x$ не больше значений выражения $3x + 8$?

5. а) На каком из рисунков показано множество решений системы неравенств $\begin{cases} 3x+12\leqslant 0, \\ 2x-1\leqslant 5? \end{cases}$

1) 

3) 

2) 

4) 

Решение систем неравенств первой степени

Когда требуется найти множество значений переменной, удовлетворяющих одновременно двум или нескольким неравенствам, говорят, что надо решить систему неравенств. Общий приём решения системы неравенств состоит в следующем: сначала решаем каждое неравенство отдельно, а затем находим множество их общих решений. При нахождении множества общих решений целесообразно пользоваться координатной прямой как опорным образом — это позволит во многих случаях избежать ошибок.

Пример 4. Решим систему неравенств $\begin{cases} x-1<7x+2, \\ 11x+13>x+3. \end{cases}$

Решив первое неравенство, получим, что $x > -0{,}5$, решив второе неравенство, получим, что $x > -1$.

Изобразим на координатной прямой множество решений каждого неравенства (рис. 5.4).

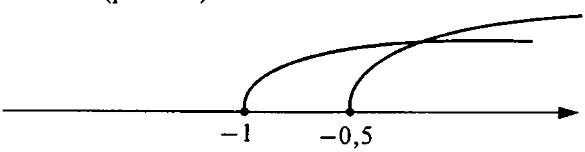


Рис. 5.4.

Из рисунка видно, что общей частью этих двух лучей служит множество чисел, больших −0,5.

О т в е т: $(-0{,}5;\ +\infty)$.

Пример 5. Найдём множество решений двойного неравенства $-2 < 4 - 3x < 10$.

Решить двойное неравенство $-2 < 4 - 3x < 10$ — это то же самое, что решить систему неравенств $\begin{cases} 4-3x>-2, \\ 4-3x<10. \end{cases}$ Вы можете сделать это самостоятельно. Но можно вести запись решения и с помощью двойных неравенств:

$$-2 < 4 - 3x < 10,$$
$$-2 - 4 < -3x < 10 - 4,$$
$$-6 < -3x < 6,$$
$$6 > 3x > -6,$$
$$-6 < 3x < 6,$$
$$-2 < x < 2.$$

О т в е т: $(-2;\ 2)$.

Пример 6. Решим задачу: «Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13 см, а его периметр больше 44 см. Какую длину может иметь основание треугольника?»

ства в виде числового промежутка: [0,5; $+\infty$). На координатной прямой (рис. 5.2) множество решений этого неравенства можно показать так:

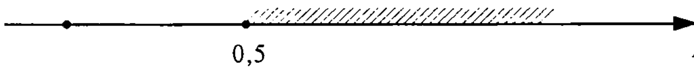


Рис. 5.2.

Множеством решений неравенства первой степени всегда является числовой луч — или с принадлежащим ему началом, как в данном случае, или с непринадлежащим (в случае строгого неравенства).

Пример 1. Определим, в каком случае на координатной прямой (рис. 5.3) изображено множество решений неравенства $19 - 7x > 20 - 3(x - 5)$.

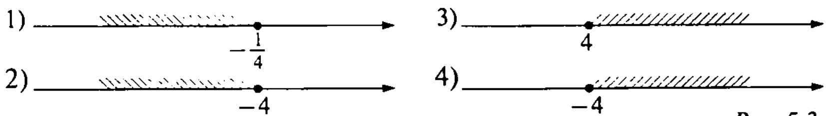


Рис. 5.3.

Самая правильная стратегия поиска ответа на вопрос состоит в том, чтобы просто решить неравенство.

$19 - 7x > 20 - 3(x - 5)$,

$19 - 7x > 20 - 3x + 15$,

$-4x > 16$,

$4x < -16$,

$x < -4$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решим неравенство $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} \leqslant 3 - \frac{1-x}{2}$.

Сначала «избавимся» от дробей, умножив обе части неравенства на общий знаменатель дробей — число 6. При этом надо быть внимательным и не забыть умножить на 6 первое слагаемое в правой части:

$$\frac{(2x-7)\cdot 6}{6} + \frac{(7x-2)\cdot 6}{3} \leqslant 3\cdot 6 - \frac{(1-x)\cdot 6}{2},$$

$$(2x - 7) + (7x - 2)\cdot 2 \leqslant 18 - (1 - x)\cdot 3.$$

После преобразований получим: $x \leqslant 2$.

Ответ: $x \leqslant 2$.

Пример 3. Решим неравенство $9(6+2x) < 4\sqrt{5}(6+2x)$.

Преобразуем неравенство следующим образом:

$$9(6+2x) - 4\sqrt{5}(6+2x) < 0.$$

Теперь вынесем за скобки общий множитель $6 + 2x$, получим: $(6+2x)(9-4\sqrt{5}) < 0$. Определим знак разности: $9-4\sqrt{5}$. Так как $9=\sqrt{81}$, $4\sqrt{5}=\sqrt{80}$ и $\sqrt{81}>\sqrt{80}$, то $9-4\sqrt{5}>0$. Разделив обе части неравенства на положительное число $9-4\sqrt{5}$, получаем неравенство $6 + 2x < 0$. Отсюда $x < -3$.

Ответ: $x < -3$.

5.2. Неравенства первой степени и их системы

Теоретические сведения

Основные понятия

Неравенства с одной переменной решают «почти так же», как и уравнения. Значение переменной, при подстановке которой в неравенство получается верное числовое неравенство, называется ***решением неравенства***. Решить неравенство — это значит найти все его решения или показать, что их нет.

Неравенства, у которых множества решений совпадают, называют ***равносильными***. При решении неравенств пользуются следующими правилами, которые позволяют заменять одно неравенство другим, ему равносильным:

- *члены неравенства можно переносить из одной его части в другую с противоположным знаком;*
- *обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же положительное число;*
- *обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же отрицательное число и заменять при этом знак неравенства на противоположный.*

Рассмотрим, например, неравенство $3x(x + 2) - 20 > 6x + 7$. Заменим его более простым равносильным ему неравенством:

$$3x^2 + 6x - 20 > 6x + 7,$$
$$3x^2 + 6x - 20 - 6x - 7 > 0,$$
$$3x^2 - 27 > 0,$$
$$x^2 - 9 > 0.$$

Сначала мы раскрыли скобки в левой части неравенства, затем из правой части в левую перенесли слагаемые с противоположными знаками, после приведения подобных разделили обе части неравенства на одно и то же положительное число 3. Получили квадратное неравенство (способ решения таких неравенств в следующем параграфе).

Решение неравенств первой степени

Неравенства первой степени — это неравенства вида $ax + b > 0$ или $ax + b \geqslant 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leqslant 0$, где где $a \neq 0$. Например, неравенства $2x - 3 > 0$; $0{,}3 + 1,2 \leqslant 0$; $5 - 10x \leqslant 0$ являются неравенствами первой степени.

Решим, например, последнее из этих неравенств: $5 - 10x \leqslant 0$. Коэффициент при переменной x отрицательный, и всегда полезно сначала «избавиться» от отрицательного коэффициента при x. Для этого можно умножить обе части неравенства на -1 и не забыть заменить знак неравенства на противоположный. Получим: $10x - 5 \geqslant 0$. (Можно поступить и иначе — перенести $-10x$ в правую часть с противоположным знаком: $5 \leqslant 10x$.) Далее: $10x \geqslant 5$, $x \geqslant 0{,}5$. Последнее неравенство можно считать ответом, так как оно вполне ясно описывает множество всех значений x, являющихся его решениями. Можно также записать решение нерав-

14. Известны границы (в см) катетов прямоугольного треугольника: $3,1 < a < 3,2$; $5,1 < b < 5,2$. Оцените площадь S этого треугольника, указав границы с одним знаком после запятой.

15. Оцените разность $x - y$, если $20 < x < 21$, $35 < y < 36$.

16. Сравните числа $\sqrt{15}+\sqrt{17}$ и 8.

17. Какое из чисел больше: $\sqrt{11}+\sqrt{13}$ или $4+2\sqrt{2}$?

18. Какое из чисел меньше: $\sqrt{14}-\sqrt{11}$ или $\sqrt{10}-\sqrt{7}$?

19. Сравните числа $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$.

Решения и ответы

1. 3. **2.** 4. **3.** 2, 4. **4.** 2. *Указание.* В качестве опоры целесообразно использовать координатную прямую. **5.** 4. *Указание.* В качестве опоры целесообразно использовать координатную прямую; здесь положение точки d неопределённое: она может находиться как между c и a, так и правее a. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 4. **10.** 2, 4. **11.** $16,4 < P < 16,8$. **12.** $9 < S < 14$. **13.** 2. *Решение.* 1) Из $a - 3 < b - 3$ следует $a < b$. Так как $a < b$ и $b < -10 < 0$, то $a < 0$, т. е. a — число отрицательное. Таким же образом, применяя свойства числовых неравенств, рассматриваются следующие пункты задания. **14.** $15,8 < S < 16,7$. **15.** $-16 < x - y < -14$. **16.** $\sqrt{15}+\sqrt{17} < 8$. *Решение.* Поставим между заданными числами знак неравенства, например знак $<$, получим $\sqrt{15}+\sqrt{17} < 8$. После цепочки преобразований получим $15 \cdot 17 < 16^2$. Полученные выражения $15 \cdot 17$ и 16^2 можно сравнить, не выполняя умножения, а воспользовавшись формулой разности квадратов: $(16 - 1)(16 + 1) < 16^2$; $16^2 - 1 < 16^2$. Неравенство верно, следовательно, верно и составленное неравенство. **17.** $\sqrt{11}+\sqrt{13}$. **18.** $\sqrt{14}-\sqrt{11}$. *Указание.* Составьте неравенство $\sqrt{14}-\sqrt{11} < \sqrt{10}-\sqrt{7}$, перенесите члены со знаком «минус» в противоположные части неравенства, чтобы избавиться от минусов: $\sqrt{14}+\sqrt{7} < \sqrt{10}+\sqrt{11}$. Далее действуйте, как в примере 5. **19.** $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} > \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2}$. *Указание.* Сначала избавьтесь от дробей, а затем от знаков «минус».

6. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $y - x > z$?

1) $y > x + z$
2) $y - x - z < 0$
3) $z + x - y < 0$
4) $y - z > x$

7. О числах a и c известно, что $a < c$. Какое из следующих неравенств **неверно**?

1) $a - 3 < c - 3$
2) $a + 5 < c + 5$
3) $\frac{1}{4}a < \frac{1}{4}c$
4) $-\frac{a}{2} < -\frac{c}{2}$

8. Известно, что $a < 20$, $b < 10$. Какие из следующих неравенств верны при любых значениях a и b, удовлетворяющих этому условию:

I. $a + b < 30$ II. $a + b < 15$ III. $a + b < 50$?

1) I и II 2) I и III 3) II и III 4) I, II и III

9. Известно, что $0 < a < 5$, $0 < b < 10$. Какие из следующих неравенств верны при любых значениях a и b , удовлетворяющих этому условию :

I. $ab < 50$ II. $ab < 100$ III. $ab < 30$?

1) I, II и III 2) I и III 3) II и III 4) I и II

10. Какие из следующих неравенств верны при всех значениях x и y, удовлетворяющих условию $x > 0$, $y < 0$? (Выпишите номера верных неравенств.)

1) $y - x > 0$
2) $x - y > 0$
3) $(y - x)y < 0$
4) $(x - y)y < 0$

11. Известны границы (в см) сторон прямоугольника: $3{,}1 < a < 3{,}2$; $5{,}1 < b < 5{,}2$. Оцените периметр P этого прямоугольника.

12. Известны границы (в см) катетов прямоугольного треугольника: $3 < a < 4$, $6 < b < 7$. Оцените площадь S этого треугольника.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

13. Определите, в каком случае из данного условия следует, что число a — положительное.

1) $a - 3 < b - 3$ и $b < -10$
2) $1 - a < 1 - b$ и $b > 1$
3) $-5a > -5b$ и $b \leqslant 0$
4) $\frac{1}{3}a < \frac{1}{3}b$ и $b \geqslant 10$

Вычтем из обеих частей неравенства 16 и затем разделим обе части неравенства на 2:

$$\sqrt{60} > 3\sqrt{7}.$$

Возведём обе части неравенства в квадрат:

$$60 > 63.$$

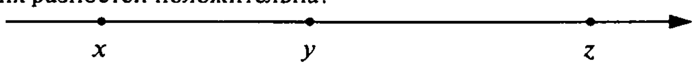
Полученное неравенство неверно, следовательно, неверно и неравенство $\sqrt{6}+\sqrt{10} > 3+\sqrt{7}$, а верно неравенство противоположного смысла $\sqrt{6}+\sqrt{10} < 3+\sqrt{7}$.

Заметим, что если бы сравниваемые числа вместо знака «плюс» содержали знак «минус», то после того, как составлено неравенство, например $\sqrt{7}-\sqrt{5} > \sqrt{13}-\sqrt{11}$, надо «избавиться» от минусов, перенеся члены неравенства из одной части в другую: $\sqrt{7}+\sqrt{11} > \sqrt{13}+\sqrt{5}$.

Тренировочные задания

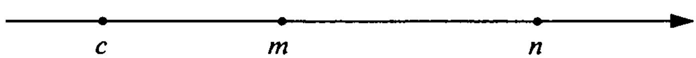
ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. На координатной прямой отмечены числа x, y и z. Какая из следующих разностей положительна?



1) $x - y$ 2) $y - z$ 3) $z - y$ 4) $x - z$

2. На координатной прямой отмечены числа с, m и n. Какая из следующих разностей отрицательна?



1) $n - m$ 2) $m - c$ 3) $n - c$ 4) $c - m$

3. Известно, что $a > b$. Выпишите номера неравенств, которые следуют из этого неравенства:

1) $a - b < 0$ 2) $a - b > -3$ 3) $b - a < -5$ 4) $b - a < 5$

4. О числах a, b, c и d известно, что $a < b$, $b = c$, $d > c$. Сравните числа d и a.

1) $d = a$
2) $d > a$
3) $d < a$
4) Для сравнения не хватает данных

5. О числах a, b, c и d известно, что $a > b$, $b = c$, $d > c$. Сравните числа d и a.

1) $d = a$
2) $d > a$
3) $d < a$
4) Для сравнения не хватает данных

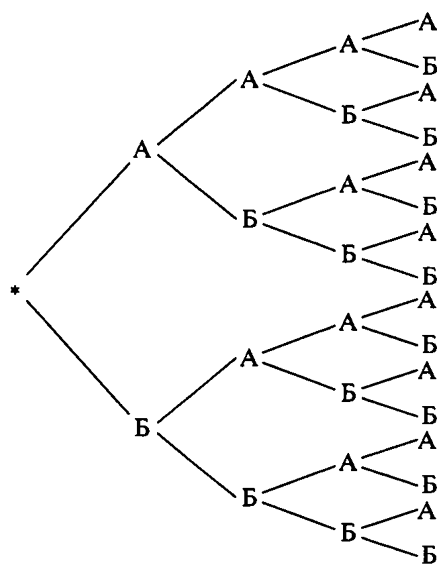
одинаковых комбинаций, отличающихся только порядком следования букв.

В качестве ещё одного способа перечисления комбинаций можно использовать так называемое *дерево перебора* или *дерево вариантов*. Чтобы нарисовать такое дерево, нужно:

- отметить точку, которая будет служить его корнем;
- от этой точки провести все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить первые элементы комбинаций;
- от каждого из этих концов нарисовать все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить вторые элементы комбинаций;
- и т. д., пока вся комбинация не будет составлена.

Получится рисунок, который действительно напоминает дерево (правда, лежащее на боку или вообще «вниз головой»). Двигаясь от корня по ветвям такого дерева, можно последовательно прочитать любую из полученных комбинаций.

Пример 8. Составим дерево перебора для всех комбинаций из примера 2 — четырёхбуквенных слов из букв А и Б:



Подсчёт комбинаций

Вторая важнейшая задача комбинаторики — *подсчёт комбинаций*. Иногда подсчёт можно свести к перечислению: выписать все комбинации и после этого их пересчитать. Но чаще всего такой способ оказывается невозможным из-за слишком большого количества комбинаций. В этом случае для подсчёта используют специальные комбинаторные правила.

Правило умножения (для комбинаций из двух элементов). Если первый элемент в комбинации можно выбрать a способами, после чего второй элемент — b способами, то общее число комбинаций из двух элементов будет $a \cdot b$.

Пример 9. Сколько двузначных чисел можно составить, если использовать только цифры 0, 1, 2?

Подсчитаем их количество по правилу умножения: первую цифру для такого числа можно выбрать 2 способами — 1 или 2; после этого вторую цифру можно выбрать 3 способами — 0, 1 или 2. Всего таких комбинаций будет $2 \cdot 3 = 6$. (Все они перечислены в примере 1.)

Пример 10. Из Калуги в Москву и из Москвы в Калугу можно добраться 3 способами: на автобусе, на электричке и на такси. Сколькими способами можно совершить поездку из Калуги в Москву и обратно?

Вновь воспользуемся правилом умножения. Поехать из Калуги в Москву можно 3 способами (автобус, электричка, такси); вернуться после этого обратно можно также 3 способами. Всего таких комбинаций будет $3 \cdot 3 = 9$. (Все они перечислены в примере 5.)

Пока мы специально приводили уже рассмотренные ранее примеры, в которых количество комбинаций можно было посчитать и напрямую, перечислив один за другим все варианты. Рассмотрим ситуации, где это уже невозможно.

Пример 11. В классе из 30 учеников нужно выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Старосту можно выбрать 30 способами, после чего заместителя — 29. Всего комбинаций будет $30 \cdot 29 = 870$.

Пример 12. Из класса, в котором учится 15 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать девочку и мальчика для того, чтобы вести Новогодний вечер. Сколькими способами это можно сделать?

Девочку можно выбрать 15 способами, мальчика — 10. Всего комбинаций будет $15 \cdot 10 = 150$.

Правило умножения распространяется и на общий случай, когда количество элементов в комбинации больше двух.

Правило умножения. Если первый элемент в комбинации можно выбрать a способами, после чего второй элемент — b способами, третий элемент — c способами и т. д., последний элемент — z способами, то общее число комбинаций будет $a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot z$.

Пример 13. В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три призовых места?

Первое место может занять любая из 16 команд. После того как чемпион выбран, серебряного призёра можно выбрать 15 способами. После этого бронзового — 14 способами. Всего комбинаций будет $16 \cdot 14 = 3360$.

Пример 14. В компьютере каждый символ (буква, цифра, специальный знак) кодируется последовательностью из восьми 0 и 1, например:

01000110 — код буквы «F»;

00110010 — код цифры «2» и т. д.

Сколько различных символов можно закодировать таким образом? Другими словами, сколько существует двоичных кодов длины 8?

Первую цифру кода можно выбрать 2 способами, после чего вторую цифру — тоже 2 способами и т. д. Всего получаем $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^8 = 256$ различных двоичных кодов.

Если правило умножения использовать для подсчёта комбинаций, в которых порядок следования элементов не важен, то полученный результат будет ошибочным: ведь в таких комбинациях не нужно учитывать, какой элемент был выбран первым, какой — вторым и т. д. Для правильного ответа в таких случаях нужно использовать **правило деления**: если при подсчёте комбинаций по правилу умножения каждая из них была посчитана k раз, то полученный результат нужно поделить на k.

Типичный пример такой ситуации — *подсчёт неупорядоченных пар.*

Пример 15. Из класса, в котором учится 25 человек, нужно выбрать двоих для участия в олимпиаде по краеведению. Сколькими способами это можно сделать?

Первого ученика можно выбрать 25 способами, после чего второго — 24 способами. Всего таких способов будет $25 \cdot 24 = 600$. Однако при выборе пары учеников для участия в олимпиаде их порядок в паре не имеет значения. Получается, что каждую пару мы посчитали дважды, поэтому правильным ответом будет $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Пример 16. Из 11 футболистов, участвовавших в матче, нужно выбрать троих для проведения антидопинговой пробы. Сколькими способами это можно сделать?

Первого игрока можно выбрать 11 способами, после чего второго — 10 и третьего — 9 способами. Всего таких способов будет $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$. Однако при выборе тройки футболистов порядок их следования не имеет значения. Получается, что каждую тройку мы посчитали 6 раз (троих выбранных футболистов можно упорядочить 6 способами — легко доказать по правилу умножения), поэтому правильным ответом будет $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 165$.

Но бывают ситуации, в которых правило умножения не помогает даже в сочетании с правилом деления. В них после выбора одного из объектов в качестве первого элемента комбинации нельзя однозначно сказать, сколькими способами можно выбрать второй элемент, — это зависит от того, *какой именно элемент был выбран первым.* Рассмотрим такую ситуацию на примере.

Пример 17. Подсчитаем количество двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 так, чтобы первая цифра была меньше второй.

На первое место цифру можно выбрать 4 способами, а вот на второе место после этого:

- 3 способами, если первой цифрой была выбрана 1;
- 2 способами, если первой цифрой была выбрана 2;
- 1 способом, если 3;
- 0 способов, если 4.

Всего получается 6 чисел.

Здесь пришлось применить комбинаторное **правило сложения**: разбить все комбинации на непересекающиеся классы, подсчитать количество комбинаций в каждом классе (например, по правилу умножения), а затем сложить эти количества.

Правило кажется настолько простым и очевидным, что его даже неудобно называть правилом. Однако использование этой простой идеи «разделяй (на классы) и властвуй» оказывается чрезвычайно полезным при решении задач.

Пример 18. Сколькими способами можно посадить 6 школьников на скамейку так, чтобы Коля и Оля оказались рядом?

Будем считать, что на скамейке 6 пустых мест. Посадить на одно из них Колю можно 6 различными способами, после чего посадить рядом с ним Олю можно... 1 или 2 различными способами. Это зависит от того, куда именно мы посадили Колю — на крайнее место или нет. Самое время применить правило сложения. Разобьём все искомые комбинации на 2 класса:

1-й класс: Коля сидит на краю, Оля рядом с ним;

2-й класс: Коля сидит где-то в середине, Оля рядом с ним.

Заметим, что эти классы действительно не пересекаются и исчерпывают все комбинации — ведь, в конце концов, Коля сидит либо на краю, либо где-то в середине. Посчитаем число комбинаций в 1-м классе: место с краю для Коли можно выбрать 2 способами, после чего Олю можно посадить рядом с ним только 1 способом, после чего оставшиеся 4 места можно занять $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами. Значит, в этом классе будет $2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ комбинаций.

Посчитаем число комбинаций во 2-м классе: место в середине скамейки для Коли можно выбрать 4 способами, после чего Олю можно посадить рядом с ним 2 способами, после чего оставшиеся 4 места можно занять $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами. Значит, в этом классе будет $4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 192$ комбинации. Итого по правилу сложения: $48 + 192 = 240$ способов.

Существует и четвёртое комбинаторное правило — **правило вычитания**. Так же, как и правило сложения, это скорее практический совет для решения некоторых комбинаторных задач: при подсчёте комбинаций, обладающих заданным свойством, иногда проще найти количество комбинаций, которые этим свойством не обладают, и вычесть его из общего количества комбинаций.

Пример 19. Найдём количество трёхзначных чисел, в записи которых *есть хотя бы один* 0.

Воспользуемся правилом вычитания: найдём количество *всех* трёхзначных чисел, а потом вычтем из него количество чисел, которые *не содержат нулей*. Количество всех трёхзначных чисел можно найти по правилу умножения — $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, а можно и без всяких комбинаторных правил: $999 - 99 = 900$. Теперь найдём по правилу умножения, сколько из них не содержат ни одного 0: на первое место можно поставить любую из 9 цифр, на второе — любую из 9 цифр и на третье — любую из 9 цифр (каждый раз исключаем 0). Всего по правилу умножения будет $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ вариантов. А теперь найдём ответ по правилу вычитания: $900 - 729 = 171$ — столько трёхзначных чисел содержат хотя бы один 0.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Если выписать в порядке возрастания все трёхзначные числа, в записи которых используются только 0, 2, 4, 6, то какое число будет следующим за 426?

2. Если выписать по возрастанию все двоичные коды длины 8, то какой код будет следовать за кодом 10101011?

3. Если выписать по возрастанию все двоичные коды длины 8, то какой код будет предшествовать коду 10001000?

4. Из класса, в котором учится 13 девочек и 10 мальчиков, нужно выбрать девочку и мальчика для ведения школьного вечера. Сколькими способами это можно сделать?

5. В чемпионате города по футболу играет 10 команд. Сколькими способами могут распределиться 3 призовых места?

6. В меню школьной столовой 2 разных супа, 4 вторых блюда и 3 вида сока. Сколько можно составить вариантов обеда из трёх блюд?

7. На деловую встречу пришло 5 человек. Каждый с каждым обменялся рукопожатием. Сколько всего рукопожатий было совершено?

8. В конференции участвовало 30 человек. Каждый с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилось карточек?

9. В расписании уроков на вторник для 7-го класса должно быть 5 уроков: алгебра, русский язык, литература, география, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

10. Сколько трёхзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 2, 4, 6?

11. Монету подбрасывают 10 раз подряд и каждый раз записывают, что выпало — орёл или решка. Сколько разных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

12. В автомобиле 5 мест. Сколькими способами 5 человек могут занять в ней места для путешествия, если водить машину могут только 3 из них?

13. В расписании уроков на среду для 4-го класса должно быть 4 урока: 2 урока математики, чтение и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

14. В расписании уроков на среду для 4-го класса должно быть 4 урока: 2 урока математики, которые должны стоять рядом, чтение и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

15. В расписании уроков на среду для 7-го класса должно быть 5 уроков: алгебра, русский язык, литература, география и физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день, если русский язык и литература должны стоять рядом, а физкультура — быть последним уроком?

16. После хоккейного матча каждый игрок одной команды пожал руку каждому игроку другой. Сколько всего игроков присутствовало на площадке, если было совершено 323 рукопожатия?

17. Из нечётных цифр составляют все возможные числа, содержащие не более 4 цифр. Сколько существует таких чисел?

18. Сколько сигналов можно поднять на мачте, если имеется 4 разных флага и каждый сигнал должен состоять, по крайней мере, из 2 флагов? (Сигналы, составленные из флагов, взятых в разном порядке, считаются различными.)

19. Номера паспортов состоят из 6 цифр. Сколько таких номеров являются палиндромами, т. е. читаются в обе стороны одинаково (например: 089980)?

20. Номера паспортов состоят из 6 цифр. Сколько из них содержат хотя бы 2 одинаковые цифры?

21. Номера паспортов состоят из 6 цифр. Сколько из них содержат, по крайней мере, 2 нуля?

22. Из 12 фильмов, номинированных за лучшую режиссёрскую работу, жюри кинофестиваля должно отобрать 3 финалиста. Сколькими способами это можно сделать?

Решения и ответы

1. 440. **2.** 10101100. **3.** 10000111. **4.** 130. Применим правило умножения: девочку можно выбрать 13 способами, мальчика — 10 способами, пару «мальчик—девочка» — $13 \cdot 10 = 130$ способами. **5.** 720. На первое место можно поставить любую из 10 команд, на второе — любую из 9 оставшихся, на третье — любую из 8 оставшихся. По правилу умножения общее число способов, которыми можно распределить 3 места, равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. **6.** 24. Суп можно выбрать 2 способами, второе блюдо — 4, третья — 3. Всего вариантов обеда по правилу умножения будет $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. **7.** 10. Каждое рукопожатие — это неупорядоченная (!) пара, которую можно составить из 5 человек. На первое место в паре можно поставить любого из 5 человек, на второе — любого из 4 оставшихся. Упорядоченных пар по правилу умножения будет $5 \cdot 4 = 20$. Поскольку в рукопожатиях порядок людей учитывать не надо, то полученный результат нужно поделить на 2: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. **8.** 870. Каждый из 30 участников конференции раздал 29 карточек. Значит, всего было роздано $30 \cdot 29 = 870$ карточек. **9.** 120. Первым уроком можно поставить любой из 5 предметов, вторым уроком — любой из 4 оставшихся и т. д. По правилу умножения получаем $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов. **10.** 48. Первую цифру трёхзначного числа можно выбрать 3 способами (0 выбирать нельзя), вторую — 4 способами и третью — также 4. Всего способов по правилу умножения будет $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$. **11.** 1024. Каждую такую последовательность можно рассматривать как десятибуквенное слово, составленное из букв О и Р. Всего таких слов по правилу умножения будет $2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{10} = 1024$. **12.** 72. Воспользуемся правилом умножения: за руль можно посадить любого из 3, которые умеют водить машину, на следующее место — любого из 4 оставшихся, на следующее — любого из 3 оставшихся и т. д. Всего получаем $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$ способа. **13.** 12. Чтение можно поставить на любой из 4 уроков, физкультуру — на любой из 3 оставшихся. После этого для 2 уроков математики остаётся единственный способ поставить их в расписание. По правилу умножения общее число способов $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$. **14.** 6. Выбрать место для 2 спаренных уроков математики можно 3 способами, после этого чтение можно поставить на любой из 2 оставшихся уроков, физкультуру — на единственный оставшийся. По правилу умножения общее число способов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. **15.** 12. Физкультуру сразу поставим на последнее место и уже не будем учитывать — останется расставить 4 предмета на 4 урока. Два соседних места для русского языка и литературы можно выбрать 3 способами. Поставить их на эти выбранные места можно 2 способами. После этого алгебру можно поставить на любое из 2 оставшихся мест, а географию — на единственное оставшееся. По правилу умножения получаем $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$. **16.** 36. Пусть в первой команде было m игроков, а во второй — n игроков. Тогда всего было совершено по правилу умножения $m \cdot n$ рукопожатий. Получаем уравнение с двумя неизвестными, которое нужно решить в целых числах: $m \cdot n = 323$. Поскольку m и n не могут равняться 1 (в хоккейной команде не может быть один игрок), то уравнение имеет всего два решения (других способов разложить 323 на два множителя нет): $m = 17$, $n = 19$ или $m = 19$, $n = 17$. В любом случае их сумма равна 36. **17.** 780. Нечётных цифр пять: 1, 3, 5, 7, 9. Очевидно, однозначных чисел можно составить 5. Количество двузначных, трёхзначных и четырёхзначных чисел можно найти по правилу умножения: двухзначных — $5 \cdot 5 = 25$; трёхзначных — $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; четырёхзначных — $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Ответ найдём по правилу сложения: $5 + 25 + 125 + 625 = 780$. **18.** 60. Как и в предыдущей задаче применим правила сложения и умножения: $4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 24 = 60$. **19.** 1000. Палиндром из 6 цифр однозначно определяется первыми 3 цифрами, каждую из которых можно выбрать 10 способами: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. **20.** 848 800. Воспользуемся правилом вычитания. Количество всех номеров по правилу умножения будет равно 10^6, количество номеров, в которых все цифры разные, — $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$; количество искомых — $10^6 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 848800$. **21.** 114 265. Воспользуемся правилом вычитания. Количество всех номеров по правилу умножения будет равно 10^6; количество номеров, в которых нет нулей, — 9^6; количество номеров, в которых ровно один нуль, — $6 \cdot 9^5$; количество искомых — $10^6 - 9^6 - 6 \cdot 9^5 = 114\,265$. **22.** 220. Первого номинанта можно выбрать 12 способами, второго — 11, третьего — 10. Всего по правилу умножения получаем $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ способов выбрать упорядоченную тройку номинантов. Но по условию задачи нужно посчитать количество неупорядоченных троек, поэтому полученный результат нужно поделить на 6 (три элемента можно упорядочить 6 способами): $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$.

8.2. Теория вероятностей

Теоретические сведения

Что изучает теория вероятностей

Теория вероятностей изучает *математические модели массовых случайных явлений*. К таким явлениям относятся, например, колебания цен на рынке, поступление заказов на приобретение товаров, всевозможные лотереи, звонки на телефонную станцию, массовое производство любой продукции, изменения погодных условий, результаты спортивных состязаний и т. д.

На первый взгляд перечисленные явления настолько непредсказуемы, что применять к ним любые математические расчёты бесполезно. Тем не менее если наблюдать эти явления многократно, то и в них начинают проявляться определённые закономерности. Изучением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Основными объектами изучения в школьном курсе являются:

- *случайный эксперимент и случайные события*, которые в нём происходят;
- *вероятности* случайных событий и их оценка *по частоте*, с которой эти события происходят;
- *вычисление вероятностей* в опытах с равновозможными исходами.

Случайный эксперимент и случайные события

Ситуация с непредсказуемым исходом называется **случайным экспериментом** или **случайным опытом**. В теории вероятностей рассматриваются только такие эксперименты, которые могут *многократно повторяться в одних и тех же условиях*. Случайные эксперименты можем производить мы сами, кто-то другой или сама природа.

Пример 1. Подбрасывание игрального кубика. Почти все из вас неоднократно ставили этот эксперимент, когда играли в настольные игры.

Пример 2. Массовое производство деталей. Завод ежедневно производит большую партию деталей, параметры которых колеблются. В частности, среди произведённых деталей есть бракованные.

Здесь в роли «постановщиков эксперимента» выступают рабочие этого завода.

Пример 3. Погода на улице. Погодные условия подвержены случайным изменениям, для предсказания которых созданы целые службы и научные институты. Этот эксперимент ставит за нас природа, а человек выступает в роли наблюдателя.

Заметим ещё раз, что во всех перечисленных примерах

- во-первых, нельзя точно предсказать, как закончится эксперимент: на какую грань выпадет кубик, какова будет доля бракованных деталей, до скольких градусов прогреется воздух на улице;
- во-вторых, можно легко представить, что эксперимент повторится ещё и ещё раз.

При задании случайного эксперимента требуется описать не только ситуацию, в которой он происходит, но и те результаты, которые мы собираемся фиксировать. Например, при подбрасывании игрального кубика нас может интересовать, сколько очков выпало на его грани (чаще всего именно это и подразумевается), а могут интересовать координаты точки, в которой он остановится; при наблюдениях за погодой мы можем фиксировать температуру воздуха, а можем — влажность или давление (а можем — и всё вместе).

В зависимости от того, какой результат мы договорились фиксировать в эксперименте, мы получаем то или иное **множество элементарных исходов**, то есть всех мыслимых исходов эксперимента, которыми он может закончиться.

Пример 4. Подбрасывание игрального кубика. Будем фиксировать число очков, которое выпало на кубике. Тогда множество элементарных исходов будет

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Пример 5. Массовое производство деталей. Будем считать, что нас интересует доля брака в произведённой партии деталей, выраженная в процентах. Тогда множеством элементарных исходов будет отрезок числовой оси от 0 до 100. Заметим, что исходами опыта могут быть и дробные числа из этого отрезка, поэтому множество всех возможных исходов в этом опыте бесконечно.

Пример 6. Погода на улице. Будем измерять температуру воздуха на улице в полдень с точностью до 1 °C. Элементарными исходами будут целые числа — как положительные, так и отрицательные. Не так просто определить их диапазон — для этого нужно знать абсолютные минимум и максимум температур. Да и в этом случае мы рискуем ошибиться — температура может опустить ниже абсолютного минимума или подняться выше абсолютного максимума (вспомним лето 2010 года). Проще всего в этой ситуации выбрать диапазон с запасом, например от —50 °С до 50 °С. Получим 101 элементарный исход.

Элементарные исходы опыта называют ещё **элементарными событиями**. Их элементарность означает, что они в каком-то смысле неделимы, их нельзя разбить на более мелкие, невозможно детализировать.

Случайным событием называют любое событие, связанное со случайным экспериментом. «Случайным» оно называется потому, что до завершения эксперимента, как правило, нельзя однозначно сказать, произойдёт ли это событие или не произойдёт. Случайные события чаще всего обозначают большими латинскими буквами.

Пример 7. Подбрасывание игрального кубика. В результате этого опыта могут произойти или не произойти, например, такие события:

A = {выпадет чётное число};

B = {выпадет нечётное число};

C = {выпадет число, больше 4};

D = {выпадет число 2}.

Пример 8. Массовое производство деталей. Примеры случайных событий:

A = {доля брака будет выше 5%};

B = {доля брака будет ниже 0,01%};

C = {доля брака будет равна 0,1%};

D = {доля брака будет от 1% до 2%}.

Пример 9. Погода на улице. Случайными событиями для этого эксперимента будут, например:

A = {температура будет отрицательной};

B = {температура будет равна 0 °С};

C = {температура будет ниже 30 °С};

D = {температура будет от —40 °С до 40 °С}.

Элементарные события являются, в частности, случайными: они наступают, когда эксперимент завершается соответствующим элементарным исходом. Так, случайные события D из примера 7, C из примера 8 и B из примера 9 являются элементарными.

Случайное событие можно рассматривать как *совокупность элементарных исходов, при которых оно наступает*. Эти исходы называют **благоприятными** (или благоприятствующими) для данного события. На математическом языке можно сказать, что любое случайное событие — это *подмножество в множестве элементарных исходов опыта*.

Пример 10. Подбрасывание игрального кубика. Запишем случайные события из примера 7 в виде подмножеств:

$A = \{2, 4, 6\}$;
$B = \{1, 3, 5\}$;
$C = \{5, 6\}$;
$D = \{2\}$.

Пример 11. Массовое производство деталей. Как подмножества исходов, случайные события из примера 8 запишутся в виде различных числовых подмножеств отрезка $[0; 100]$:

$A = (5; 100]$;
$B = [0; 0{,}01)$;
$C = \{0{,}1\}$;
$D = [1; 2]$.

Пример 12. Погода на улице. Переведём на язык множеств случайные события из примера 9:

$A = \{-50, -49, \dots, -2, -1\}$;
$B = \{0\}$;
$C = \{-50, -49, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 29, 30\}$;
$D = \{-40, -39, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 39, 40\}$.

Во многих случаях язык теории множеств оказывается для записи случайных событий удобным. Так, например, сразу становятся видны элементарные события: это множества, состоящие из одного элемента.

Для любого случайного события A можно определить **противоположное к нему событие** $\bar{A}$: это *событие, которое состоит из элементарных исходов, неблагоприятных для A*. Другими словами, в $\bar{A}$ входят все исходы, которые в A не входят. На языке теории множеств $\bar{A}$ называется *дополнением* к A. Заметим, что противоположным к $\bar{A}$ будет снова A.

Пример 13. Подбрасывание игрального кубика. Найдём события, противоположные событиям A, B, C, D из примеров 7, 10:

$\bar{A}$ = {выпадет нечётное число} = $\{1, 3, 5\}$;
$\bar{B}$ = {выпадет чётное число} = $\{2, 4, 6\}$;
$\bar{C}$ = {выпадет число, меньше или равное 4} = $\{1, 2, 3, 4\}$;
$\bar{D}$ = {выпадет число, не равное 2} = $\{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Среди случайных событий выделяют два особых вида событий: достоверные и невозможные. **Достоверным** называется событие, которое в результате случайного эксперимента обязательно происходит. **Невозможным** называется событие, которое в результате случайного эксперимента не может произойти. Несмотря на то что «элемент случайности» у достоверных и невозможных событий отсутствует, их также считают случайными. Достоверное событие включает в себя все возможные исходы опыта, а невозможное, наоборот, не содержит ни одного, то есть является *пустым множеством*. Противоположным к достоверному событию будет невозможное, а противоположным к невозможному — достоверное.

Может возникнуть вопрос: зачем рассматривать такие странные события, да ещё считать их случайными? Во-первых, в математике это вообще типичная картина (мы же говорим, например, «у него осталось 0 рублей»); во-вторых, далеко не всегда сразу очевидно, что указанное случайное событие достоверно или невозможно.

Пример 14. Подбрасывание двух кубиков. Рассмотрим эксперимент, в котором подбрасывают уже не один, а два игральных кубика. Будем фиксировать число очков, выпавшее на первом кубике, и число очков на втором. Тогда множеством всех возможных исходов опыта будет множество пар (a, b), где a и b — числа от 1 до 6:

$$
\begin{aligned}
&(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),\\
&(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),\\
&\ldots\\
&(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).
\end{aligned}
$$

Количество таких пар легко посчитать по правилу умножения — их будет 36. Рассмотрим следующие случайные события:

A = {сумма очков на кубиках равна 11};

B = {произведение очков на кубиках равно 11};

C = {сумма очков на кубиках больше 1};

D = {произведение очков на кубиках больше 1}.

Есть ли среди этих событий невозможные или достоверные? Ответить сразу на этот вопрос не так просто. Рассмотрим по порядку все события.

Событие A. Этому событию благоприятствуют 2 исхода из 36:

$$A = \{(5,6), (6,5)\},$$

значит, оно не является ни невозможным, ни достоверным.

Событие B. Число 11 — простое. Оно единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) раскладывается в произведение двух натуральных чисел: $11 = 1 \cdot 11$. Но на кубике не может выпасть 11 очков, поэтому событие B — невозможное.

Событие C. Минимальное значение суммы равно 2 — она может быть получена только при исходе $(1, 1)$. При всех остальных исходах сумма будет больше 2, а значит, и больше 1. Следовательно, событие C — достоверное.

Событие D. Это событие может как произойти (исход $(1, 1)$), так и не произойти (любой другой исход). Значит, оно не является ни невозможным, ни достоверным.

Частота события и вероятность

Мы уже говорили, что теория вероятностей рассматривает только такие эксперименты, которые можно многократно повторять в одних и тех же условиях. Договоримся после каждого эксперимента фиксировать, произошло ли в нём интересующее нас событие A или не произошло. Проведя серию из N таких опытов, мы можем посчитать, какое количество опытов завершилось наступлением события A. Обозначим это количество через M. Тогда отношение $\frac{M}{N}$ будет показывать, насколько часто происходило в этой серии событие A: чем ближе оно к 1, тем чаще происходило событие, чем ближе к 0, тем реже. Для достоверного события это отношение будет всегда равно 1, для невозможного — 0, для всех остальных будет лежать между 0 и 1.

Частотой случайного события A в серии из N случайных опытов называют отношение числа опытов M, в которых событие A произошло, к общему числу опытов N:

Частота случайного события $=\frac{M}{N}$.

Пример 15. Подбрасывание игрального кубика. Была проведена серия из 100 опытов с игральным кубиком. После каждого из них записывался исход, которым завершился опыт, а по завершении всей серии была составлена следующая таблица:

Исход	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Количество опытов с этим исходом	17	15	18	15	19	16

Найдём по результатам этой серии частоту каждого элементарного исхода:

Исход	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Частота исхода	$\frac{17}{100}=0{,}17$	$\frac{15}{100}=0{,}15$	$\frac{18}{100}=0{,}18$	$\frac{15}{100}=0{,}15$	$\frac{19}{100}=0{,}19$	$\frac{16}{100}=0{,}16$

Отметим одно очевидное, но очень важное свойство: сумма частот всех элементарных исходов равна 1.

Пример 16. Подбрасывание игрального кубика. Найдём теперь по результатам той же серии из примера 15 частоту случайных событий, перечисленных в таблице:

Событие	Частота события
A = {выпадет чётное число}	$\frac{15+15+16}{100}=0{,}46$
B = {выпадет нечётное число}	$\frac{17+18+19}{100}=0{,}54$
C = {выпадет число, больше 4}	$\frac{19+16}{100}=0{,}35$
D = {выпадет число 2}	$\frac{15}{100}=0{,}15$

Частоту любого события можно посчитать двумя способами:

1) посчитать, сколько раз оно повторилось, и поделить на количество экспериментов:

частота события $A=\frac{15+15+16}{100}=0{,}46;$

2) сложить частоты элементарных исходов, из которых это событие состоит:

частота события $A=\frac{15}{100}+\frac{15}{100}+\frac{16}{100}=0{,}15+0{,}15+0{,}16=0{,}46.$

Получили ещё одно свойство: *частота любого события равна сумме частот элементарных исходов, из которых оно состоит*. И ещё одно: *частоту противоположного события $\overline{A}$ можно получить, если из 1 вычесть частоту самого события A.*

Из определения частоты следует, что она зависит от результатов конкретной серии и может изменяться от одной серии к другой. Если мы проведём ещё 100 таких же опытов, то частоты, скорее всего, окажутся иными. Тем не менее имеет место фундаментальный *факт стабилизации частот:* при многократном повторении случайного опыта частота любого случайного события A стабилизируется и колеблется около одного и того же (для данного события) числа, которое называется **вероятностью случайного события A**.

Таким образом, вероятность является объективной мерой правдоподобия случайного события: чем больше вероятность, тем чаще это событие происходит и тем более правдоподобно, что оно произойдёт в очередном испытании. Вероятность случайного события A обозначается $P(A)$ — от французского *probabilité* — вероятность.

Из свойств частоты вытекает несколько очевидных свойств вероятности:

- **для невозможного события $P(A) = 0$;**
- **для достоверного события $P(A) = 1$;**
- **для любого случайного события $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.**

На вероятность переносятся и ещё три отмеченных ранее свойства частот:

- **сумма вероятностей всех элементарных исходов равна 1;**
- **вероятность любого события равна сумме вероятностей элементарных исходов, из которых оно состоит;**
- **для любого случайного события $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.**

Пример 17. Подбрасывание игрального кубика. Оценим вероятности событий из примера 16 по их частотам, полученным в серии из 100 опытов:

Событие	**Вероятность события**
A = {выпадет чётное число}	$P(A) \approx 0{,}46$
B = {выпадет нечётное число}	$P(B) \approx 0{,}54$
C = {выпадет число, больше 4}	$P(C) \approx 0{,}35$
D = {выпадет число 2}	$P(D) \approx 0{,}15$

Отметим ещё раз, что для конкретного случайного события вероятность равна вполне определённому числу, но найти точное значение вероятности, опираясь только на эксперимент, невозможно: как бы долго мы его ни проводили, нет гарантии, что полученная частота стала равна вероятности. Вот почему для всех вероятностей в примере 16 мы написали приближённое равенство. Тем не менее есть ситуации, в которых вероятности случайных событий можно вычислить абсолютно точно, даже не прибегая к эксперименту. Об этом пойдёт речь в следующем пункте.

Классическая вероятностная модель

Мы рассмотрим здесь модель случайного эксперимента, в рамках которой вероятность любого события можно вычислять без проведения опыта, на основании чисто теоретических соображений.

Пример 18. Подбрасывание игрального кубика. Вернёмся к результатам, полученным в примере 17. Сравним полученные приближённые оценки вероятностей с нашими интуитивными представлениями о правдоподобии.

Начнём с событий A и B. На шести гранях кубика написаны 3 нечётных числа и 3 чётных, *кубик симметричный* — значит (так подсказывает здравый смысл!), события A и B одинаково правдоподобны, поэтому и вероятности у них должны быть одинаковыми. Кроме того, эти события дополняют друг друга: если не происходит A, то происходит B, и наоборот, поэтому сумма их частот, а значит, и вероятностей всегда равна 1. Получается, что вероятности этих событий должны быть по $\frac{1}{2}$:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

Частоты, полученные в эксперименте, равны 0,46 и 0,54 — это достаточно близко к 0,5.

Обратимся к событию D. Оно является элементарным, так как состоит из одного элементарного исхода. Снова используем *симметрию кубика*. Выпадение числа 2 — один из шести элементарных исходов нашего опыта. Он ничем не хуже (и не лучше) других пяти исходов, поэтому имеет ту же вероятность, что и все остальные. С другой стороны, сумма вероятностей этих шести исходов равна 1. Отсюда вероятность каждого — по $\frac{1}{6}$:

$$P(D)=\frac{1}{6}.$$

Осталось событие C. Оно состоит из двух исходов: $C=\{5, 6\}$. Чтобы найти его вероятность, нужно сложить вероятности входящих в него исходов:

$$P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Сформулируем теперь общую ситуацию, в которой можно вычислять вероятности всех событий описанными выше методами, без обращения к опыту. Рассмотрим случайный эксперимент, который **может завершиться одним из n элементарных исходов, причём все эти исходы равновозможны**, т. е. нет никаких оснований считать один исход правдоподобнее другого. Пусть **ровно m из этих n исходов являются благоприятными для события** A, то есть приводят к его наступлению. Тогда вероятность случайного события A может быть найдена по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Действительно, если все исходы равновозможны, а всего исходов n, то вероятность каждого исхода $\frac{1}{n}$. Событие A состоит из m исходов; сложив их вероятности, получим вероятность A:

$$P(A)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m\text{ раз}}=\frac{m}{n}.$$

Обратите внимание, что равенство здесь уже точное, а не приближённое. Ещё раз повторим: важнейшим условием применимости этой формулы является требование *равновозможности всех элементарных исходов*. Основанием для этого служит чаще всего симметрия объекта, который участвует в опыте.

Пример 19. Коробка с шарами. Из коробки, в которой 5 красных, 3 жёлтых и 4 зелёных шара, не глядя, вытаскивают один шар. Для каждого из следующих событий найдём его вероятность:

$A=\{$вытянут красный шар$\}$;

$B=\{$вытянут жёлтый шар$\}$;

$C=\{$вытянут зелёный шар$\}$;

$D=\{$вытянут не красный шар$\}$.

Опыт может закончиться одним из $n = 5 + 3 + 4 = 12$ элементарных исходов. Слова «не глядя» дают основание считать все эти исходы равновозможными, следовательно, можно использовать классическую вероятностную модель. Для события A благоприятный исход — любой из 5 красных шаров, значит, $m = 5$ и

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{12}.$$

Для события B благоприятный исход — любой из 3 жёлтых шаров:

$$P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$

а для события C — любой из 4 зелёных:

$$P(C) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность события D можно найти двумя способами. Число благоприятных исходов для события D будет $m = 3 + 4 = 7$, поэтому

$$P(D) = \frac{7}{12}.$$

Событие D является противоположным к событию A, поэтому

$$P(D) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Пример 20. Колода карт. Колоду из 36 игральных карт хорошо перетасовали и вытянули из неё одну карту. Для каждого из следующих событий найдём его вероятность:

A = {вытянут красную масть};
B = {вытянут пики};
C = {вытянут красную пику};
D = {вытянут даму};
E = {вытянут даму пик}.

Опыт может закончиться одним из $n = 36$ элементарных исходов. Слова «хорошо перетасовали» дают основание считать все эти исходы равновозможными, следовательно, можно использовать классическую вероятностную модель. Для события A благоприятный исход — любая карта красной масти. В колоде 18 карт красной масти, значит, $m = 18$ и $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Для события B благоприятный исход — любая пика. Таких исходов 9 (столько в колоде карт пиковой масти). Отсюда $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Совершенно аналогично находим число благоприятных исходов и вероятности для оставшихся событий:

$$P(C) = \frac{0}{36} = 0; \quad P(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}; \quad P(E) = \frac{1}{36}.$$

Рассмотренные выше случайные эксперименты были простыми: бросали один кубик, вытаскивали один шар или одну карту. Более интересные ситуации возникают, если перейти к сложным экспериментам:

бросать два кубика (или один кубик — дважды), вытаскивать несколько шаров или карт.

Пример 21. Подбрасывание двух кубиков. Рассмотрим эксперимент, в котором подбрасывают два игральных кубика. Каково наиболее вероятное значение суммы очков, выпавших на кубиках?

В примере 14 мы уже выяснили, что элементарными исходами этого опыта будут пары (a, b), где a и b — числа от 1 до 6. Всего таких пар 36, и из симметрии кубиков все они равновозможны. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно вычислить вероятности (то есть найти количество благоприятных исходов) для всех возможных значений суммы и сравнить их между собой. Нарисуем для нашего опыта таблицу размером 6×6, строки и столбцы которой занумеруем числами от 1 до 6. Тогда каждой клетке этой таблицы будет соответствовать свой элементарный исход (например, клетке во 2-й строке, 4-м столбце — исход $(2,4)$). А в клетки этой таблицы впишем соответствующие этим исходам суммы очков:

1-й кубик \ 2-й кубик	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Теперь легко посчитать количество благоприятных исходов для каждой суммы:

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кол-во благоприятных исходов	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Из последней таблицы находим, что самое вероятное значение суммы равно 7, а его вероятность равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Использованный здесь приём — перечисление всех элементарных исходов опыта и связанных с ними величин в виде таблицы — удобно использовать *во всех задачах, где участвуют два объекта или производятся два действия*: в строках перечисляем возможные результаты первого действия, в столбцах — второго. Тогда каждая клетка таблицы — один из возможных исходов всего опыта.

Пример 22. Двукратное подбрасывание кубика. Игральный кубик бросают дважды. С какой вероятностью во втором бросании число очков будет больше, чем в первом?

Здесь поможет та же таблица, что и в примере 4. Только на этот раз её клетки можно даже не заполнять, а лишь пометить те из них, в которых второе число больше первого:

2-й кубик / 1-й кубик	1	2	3	4	5	6
1		✓	✓	✓	✓	✓
2			✓	✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4					✓	✓
5						✓
6						

Благоприятных исходов оказалось 15, значит, искомая вероятность равна $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Пример 23. Две монеты. Бросают две монеты. С какой вероятностью они упадут на одну сторону?

В опыте участвуют две монеты, поэтому для перечисления его исходов удобно составить таблицу (О — орёл, Р — решка):

2-я монета / 1-я монета	О	Р
О	✓	
Р		✓

В таблице 4 клетки — это 4 равновозможных исхода нашего опыта: ОО, ОР, РО, РР. «Птичками» мы пометили два исхода, благоприятных для события «Монеты выпали на одну сторону». Остаётся найти вероятность: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Интересно, что великий французский учёный Даламбер, решая эту задачу, ошибся: он считал, что в этом опыте три элементарных исхода:

- обе монеты выпадут на орла;
- обе монеты выпадут на решку;
- одна монета выпадет на орла, а другая — на решку;

и получил ответ $\frac{2}{3}$. Ошибка Даламбера состояла в том, что он не различал монеты, и последний (третий) исход получился в его модели неэлементарным: он содержит в себе два исхода — ОР и РО.

Рассмотрим ещё один пример на эту тему.

Пример 24. Два шара из четырёх. Из коробки, в которой 2 белых и 2 чёрных шара, вытаскивают друг за другом два шара. Какова вероятность, что они окажутся одного цвета?

Неверное решение. Из коробки вытаскивают два шара, поэтому для перечисления его исходов удобно составить таблицу (Б — белый, Ч — чёрный):

1-й шар \ 2-й шар	Б	Ч
Б	✓	
Ч		✓

У опыта 4 исхода (по числу клеток в таблице), два благоприятных отмечены. Ответ: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Верное решение. Из коробки вытаскивают два шара, поэтому для перечисления его исходов удобно составить таблицу. Для каждого из четырёх шаров, находящихся в коробке, введём обозначение: $Б_1$ и $Б_2$ — белые шары, $Ч_1$ и $Ч_2$ — чёрные.

1-й шар \ 2-й шар	$Б_1$	$Б_2$	$Ч_1$	$Ч_2$
$Б_1$		✓		
$Б_2$	✓			
$Ч_1$				✓
$Ч_2$			✓	

Клетки, находящиеся на диагонали, нужно сразу исключить: им не соответствует никакой исход опыта, так как *мы не можем вытащить один и тот же шар дважды*. Поэтому получаем, что у этого опыта не 16, а только $16 - 4 = 12$ элементарных исходов. Все они равновозможны, поскольку шары вынимают наугад. Отсюда вероятность, что шары будут одного цвета, равна $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Проанализируем источник ошибки в первом решении. Мы забыли, что эксперимент проводится с четырьмя шарами, и именно шары (а не их цвета!) имеют одинаковые шансы оказаться вынутыми из коробки. Возможно, нас ввела в заблуждение ещё и полная симметрия: 2 белых, 2 чёрных, 2 шара вытаскиваем. Тем не менее выбранные исходы не будут ни элементарными, ни равновозможными. На самом деле эти четыре исхода являются случайными событиями, которые несложно выразить через элементарные исходы решения 2:

$$\text{ББ} = \{(\text{Б}_1, \text{Б}_2), (\text{Б}_2, \text{Б}_1)\};$$
$$\text{БЧ} = \{(\text{Б}_1, \text{Ч}_1), (\text{Б}_1, \text{Ч}_2), (\text{Б}_2, \text{Ч}_1), (\text{Б}_2, \text{Ч}_2)\};$$
$$\text{ЧБ} = \{(\text{Ч}_1, \text{Б}_1), (\text{Ч}_1, \text{Б}_2), (\text{Ч}_2, \text{Б}_1), (\text{Ч}_2, \text{Б}_2)\};$$
$$\text{ЧЧ} = \{(\text{Ч}_1, \text{Ч}_2), (2\text{Ч}, \text{Ч}_1)\};$$

и даже найти их вероятности:

$$P(\text{ББ}) = P(\text{ЧЧ}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};$$

$$P(\text{БЧ}) = P(\text{ЧБ}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Вероятности получились разные, что подтверждает ошибочность выбранной в первом решении модели. Существует и ещё один способ решения этой задачи — совсем короткий, но несколько отступающий от принятых схем.

Ещё одно решение. Пусть мы уже вытащили первый шар из коробки. Тогда, *независимо от того, какого он оказался цвета,* в коробке осталось три шара, из которых ровно один того же цвета, что и вынутый. Вероятность вытащить этот один шар из трёх будет $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Такие короткие и красивые решения часто встречаются в теории вероятностей, но требуют уже некоторого опыта и развитой вероятностной интуиции.

Итак, мы рассмотрели много примеров, в которых участвует уже не один, а два «источника» случайной ситуации. Если этих источников ещё больше, на помощь приходит комбинаторика.

Вероятность и комбинаторика

В сложных экспериментах для подсчёта количества исходов используют комбинаторные методы.

Пример 25. Подбрасывание трёх монет. Рассмотрим эксперимент, в котором подбрасывают три монеты. С какой вероятностью все они выпадут на одну сторону?

Теперь мы не сможем использовать для представления всех возможных исходов опыта таблицу — она получится трёхмерной. Попробуем использовать комбинаторику: каждый исход нашего опыта — это комбинация (слово) из букв О и Р длины три. Перечислим все такие слова в алфавитном порядке:

ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР.

Получили 8 исходов, из них 2 благоприятных: ООО и РРР. Вероятность равна $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Пример 26. Подбрасывание десяти монет. Теперь подбрасываем сразу 10 монет. Вопрос тот же: с какой вероятностью все они выпадут на одну сторону?

Перечислить все возможные исходы, как в примере 25, уже невозможно (их слишком много), но их можно посчитать, используя комбинаторное правило умножения. Каждый исход опыта — это слово длины 10, составленное из двух букв О и Р. По правилу умножения таких слов будет

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{10\text{ раз}}=2^{10}=1024.$$

Из этих исходов по-прежнему только два благоприятных: ОО...О и РР...Р. Вероятность равна $\frac{2}{1024}=\frac{1}{512}$.

Пример 27. Подбрасывание трёх кубиков. Подбрасывают три кубика. С какой вероятностью на них выпадут одинаковые числа?

Снова воспользуемся правилом умножения. Каждый исход опыта — это три цифры от 1 до 6 (можно сказать — трёхзначное число из цифр от 1 до 6). По правилу умножения таких чисел будет

$6\cdot 6\cdot 6=6^3=216.$

Из этих исходов благоприятными будут шесть: 111, 222, 333, 444, 555, 666. Вероятность равна $\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$.

Пример 28. Компакт-диски. Работая за компьютером, ученик использовал 4 разных компакт-диска, которые по окончании работы, не глядя, сложил в коробки. С какой вероятностью

а) каждый диск попал в свою коробку;

б) ни один диск не попал в свою коробку;

в) хотя бы один диск оказался в своей коробке.

Обозначим диски цифрами 1, 2, 3, 4. Исходами опыта будут все возможные комбинации, которые можно получить, переставляя эти цифры между собой. Например, комбинация 2413 означает: в первой коробке — диск №2, во второй — диск №4 и т. д. Количество таких комбинаций найдём по правилу умножения: на первое место можно поставить любую из четырёх цифр, на второе — любую из трёх оставшихся и т. д. Всего получаем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ равновозможных исхода. Все диски оказываются в своих коробках только в одном случае: 1234. Ни один диск не попадает в свою коробку в следующих случаях (перечислим их все по возрастанию):

2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4213, 4312, 4321

— всего 10 исходов. Чтобы не перечислять все исходы, благоприятные для события в), воспользуемся тем, что событие «Хотя бы один диск оказался в своей коробке» будет противоположным к событию «Ни один диск не попал в свою коробку». Вычислим вероятности:

а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$; в) $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.

Пример 29. Колода карт. Вы получаете 4 карты из перетасованной колоды. Какова вероятность, что среди них есть хотя бы один туз?

Посчитаем количество всех возможных исходов опыта по правилу умножения. Первой можно вытянуть любую из 36 карт, второй — любую из 35 оставшихся, третьей — любую из 34 и четвёртой — любую из 33 оставшихся. Общее количество исходов $n = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33$. Обозначим событие, о котором идёт речь в задаче, через A и найдём вероятность противоположного события

$\bar{A}$ = {среди четырёх вынутых карт нет ни одного туза}.

Благоприятными для $\bar{A}$ будут комбинации, которые не содержат тузов. Первый элемент такой комбинации можно выбрать 32 способами (годится любая карта, кроме 4 тузов), второй — 31 способом (любая, кроме 4 тузов и уже выбранной) и т. д. Всего по правилу умножения будет $m = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$ исходов, благоприятных для $\bar{A}$. Теперь можно найти вероятности:

$$P(\bar{A}) = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} \approx 0{,}61;$$

$$P(A) \approx 1 - 0{,}61 = 0{,}39.$$

Вообще запомните, что во всех задачах, где в условии присутствует фраза «хотя бы один...», проще найти ответ через вероятность противоположного события — «ни один...».

Пример 30. Случайное слово. Из 4 карточек, на каждой из которых написана некоторая буква, составлено слово. Карточки перемешивают и случайным образом выкладывают в ряд. Какова вероятность, что получится то же самое слово? Решим эту задачу для слов

а) МЫЛО; б) РАМА; в) МАМА.

Элементарными исходами в этом эксперименте для всех приведённых слов являются все возможные перестановки из 4 карточек. Их количество, как и в примере 28, легко найти по правилу умножения: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. А вот количество благоприятных исходов для каждого слова будет своим. Для слова МЫЛО существует только одна перестановка карточек, которая даёт это слово; для слова РАМА — две таких перестановки (можно поменять карточки с буквами А местами); для слова МАМА — четыре перестановки (можно поменять карточки с буквами А и карточки с буквами М). Отсюда получаем вероятности:

а) $\frac{1}{24}$; б) $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$; в) $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

Пример 31. Билеты в театр. Среди сотрудников лаборатории, в которой работают 5 мужчин и 3 женщины, разыгрывают по жребию 2 билета в театр. С какой вероятностью в театр пойдут мужчина и женщина?

Жребий состоит в том, что из 8 сотрудников случайно выбираются 2. Таким образом, элементарными исходами опыта являются неупорядоченные пары из 8 элементов. Количество таких пар равно $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$. Посчитаем количество пар, в которые входит один мужчина и одна женщина: мужчину можно выбрать 5 способами, женщину — 3. Всего таких пар по правилу умножения будет $5 \cdot 3 = 15$. Отсюда вероятность равна $\frac{15}{28}$.

Пример 32. Кодовый замок. На подъезде установлен кодовый замок с цифрами от 0 до 9. Он открывается одновременным нажатием на определённые три цифры. С какой вероятностью, не зная кода замка, его можно открыть с первого раза?

Исходами опыта являются все возможные неупорядоченные тройки чисел от 1 до 10. Их количество можно найти, если использовать правило умножения и правило деления (см. пример 16 из раздела «Комбинаторика»): $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$. Благоприятной из них является только одна комбинация — истинный код замка. Получаем, что искомая вероятность равна $\frac{1}{120}$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Доля брака при производстве процессоров составляет 0,05%. С какой вероятностью процессор только что купленного компьютера окажется исправным?

1) 0,05; 2) 0,95; 3) 0,0095; 4) 0,9995.

2. Из коробки, в которой a белых и b чёрных шаров, наугад вынимают один шар. Вероятность, что он будет белым, равна:

1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{a}{a+b}$; 3) $\frac{b}{a}$; 4) $\frac{b}{a+b}$.

3. Из слова ЭКЗАМЕН случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что она окажется гласной?

4. Из класса, в котором учатся 15 мальчиков и 10 девочек, выбирают по жребию одного дежурного. Какова вероятность, что это будет девочка?

5. Подбрасывают два кубика. Какова вероятность, что в сумме выпадет меньше 6 очков?

6. Подбрасывают два кубика. Какова вероятность, что оба числа окажутся меньше 5?

7. В ящике 3 красных и 3 синих шара. Из него, не глядя, вытаскивают друг за другом два шара. Какова вероятность, что они будут одного цвета?

8. Карточки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 перемешивают и выкладывают в ряд. Какова вероятность, что получится чётное число?

9. Буквы слова АКТЁР перемешивают и случайным образом выкладывают в ряд. С какой вероятностью при этом получится слово ТЁРКА?

10. Буквы слова КУБИК перемешивают и случайным образом выкладывают в ряд. С какой вероятностью снова получится это же самое слово?

11. Из Наташиного класса, в котором 25 учеников, по жребию выбирают двух дежурных. Какова вероятность, что она будет дежурить?

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

12. Два человека садятся в электричку, в которой 8 вагонов. С какой вероятностью они окажутся в разных вагонах, если каждый из них выбирает вагон случайным образом?

13. Два мальчика и две девочки разыгрывают по жребию два билета в кино. С какой вероятностью в кино пойдут мальчик и девочка?

14. В урне 10 шаров белого и чёрного цвета. Вероятность, что среди двух одновременно вынутых из неё шаров оба будут чёрные равна $\frac{1}{15}$. Сколько в урне белых шаров?

15. Одновременно бросают 3 монеты. С какой вероятностью выпадет хотя бы один орёл?

16. Двум мужчинам и двум женщинам достались железнодорожные билеты в одном четырёхместном купе. С какой вероятностью женщины окажутся на нижних полках, а мужчины на верхних, если места в билетах распределяются случайно?

17. Номера паспортов состоят из 6 цифр. С какой вероятностью случайно выбранный номер будет палиндромом, т. е. будет одинаково читаться в обе стороны (например: 089980)?

18. Номера паспортов состоят из 6 цифр. С какой вероятностью в случайно выбранном номере хотя бы две цифры совпадают?

Решения и ответы

1. 4. **2.** 2. Опыт имеет $a+b$ равновозможных исходов (шаров), из которых a благоприятных (белых). Поэтому вероятность равна $\frac{a}{a+b}$. **3.** $\frac{3}{7}$. Опыт имеет 7 равновозможных исходов (букв), из которых 3 благоприятных (гласные буквы). Поэтому вероятность равна $\frac{3}{7}$. **4.** $\frac{2}{5}$. Опыт имеет 25 равновозможных исходов (учеников), из которых 10 благоприятных (девочек). Поэтому вероятность равна $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$. **5.** $\frac{5}{18}$. Опыт имеет 36 равновозможных исходов. Для их представления составим таблицу, в клетки которой впишем соответствующие значения суммы очков (см. таблицу из примера 21). В 10 клетках из 36 сумма будет меньше 6, поэтому искомая вероятность равна $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$. **6.** $\frac{4}{9}$. *Решение 1.* Опыт имеет 36 равновозможных исходов. Для их представления составим таблицу (см. пример 22), в которой пометим благоприятные исходы — их будет 16. Получаем, что вероятность равна $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$. *Решение 2.* По правилу умножения опыт имеет 36 равновозможных исходов. Чтобы получился благоприятный исход, на первом кубике должно выпасть любое число от 1 до 4 (4 варианта) и на втором кубике — любое число от 1 до 4 (4 варианта). Всего по правилу умножения $4 \cdot 4 = 16$ благоприятных исходов. Отсюда вероятность равна $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$. **7.** $\frac{2}{5}$. *Решение 1.* Введём для шаров следующие обозначения: $к_1$, $к_2$, $к_3$, $с_1$, $с_2$, $с_3$ (к — красный, с — синий). Для перечисления всех возможных исходов опыта составим таблицу 6×6, аналогичную таблице для двух кубиков, только вместо цифр от 1 до 6 используем обозначения, выбранные для шаров. Клетки на диагонали исключим, так как выбор производится без возвращения. Благоприятные исходы отметим. Получаем $36 - 6 = 30$ равновозможных исходов опыта, из которых 12 благоприятных. Искомая вероятность равна $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$. *Решение 2.* Количество всех возможных исходов опыта найдём по правилу умножения: первым можно вынуть любой из 6 шаров, вторым — любой из 5 оставшихся, всего исходов получится $6 \cdot 5 = 30$. Благоприятными будут комбинации, в которых шары имеют одинаковый цвет. Найдём их количество снова по правилу умножения: первым можно вытащить любой из 6 шаров, после чего вторым нужно вытащить один из 2 оставшихся шаров того же цвета; всего таких комбинаций будет $6 \cdot 2 = 12$. Искомая вероятность равна $\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$. *Решение 3.* Пусть мы уже вытащили первый шар из коробки. Тогда, ***независимо от того, какого он оказался цвета***, в коробке осталось два шара из пяти того же самого цвета. Поэтому вероятность вытащить второй шар того же цвета будет $\frac{2}{5}$. **8.** $\frac{2}{5}$. *Решение 1.* Исходами опыта будут перестановки из 5 цифр, количество которых легко найти по правилу умножения: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Чтобы получить благоприятный исход (т. е. перестановку с чётной цифрой на конце), нужно поставить на последнее место любую из двух чётных цифр (2 варианта), на предпоследнее — любую из четырёх оставшихся (4 варианта), перед ней — любую из трёх оставшихся (3 варианта) и т. д. Всего по правилу умножения $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ благоприятных исходов. Отсюда вероятность равна $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$. *Решение 2.* Поскольку чётность числа зависит только от последней цифры, то будем выкладывать наше число именно с неё. Вероятность вытащить из 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5 чётную цифру равна $\frac{2}{5}$. Это и будет искомой вероятностью, так как от остальных четырёх цифр чётность числа уже не зависит. **9.** $\frac{1}{120}$. Опыт имеет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ равновозможных исходов — это перестановки из 5 букв. Благоприятная из них только одна — ТЁРКА.

Поэтому вероятность равна $\frac{1}{120}$. **10.** $\frac{1}{60}$. Опыт имеет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ равновозможных исходов — это перестановки из 5 букв. Если бы все буквы были различными, то благоприятный исход был бы только один. Но поскольку две буквы К совпадают, то при двух разных перестановках получится одно и то же слово КУБИК. Таким образом, благоприятных исходов будет два, поэтому вероятность равна $\frac{2}{120} = \frac{1}{60}$. **11.** $\frac{2}{25}$. *Решение 1.* Исходами опыта будем считать упорядоченные пары, которые можно составить из 25 человек. Их количество по правилу умножения будет $25 \cdot 24 = 600$. Благоприятными исходами будут пары, в которые входит Наташа. Благоприятных пар с Наташей на первом месте будет 24 и с Наташей на втором месте — тоже 24. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{24+24}{25 \cdot 24} = \frac{2}{25}$. *Решение 2.* Исходами опыта будем считать неупорядоченные пары, которые можно составить из 25 человек. Всего таких пар будет $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$. Благоприятными исходами будут неупорядоченные пары, в которые входит Наташа. Таких пар 24 (Наташу можно поставить в пару с любым из 24 её одноклассников). Поэтому искомая вероятность равна $\frac{24}{300} = \frac{2}{25}$. **12.** $\frac{7}{8}$. *Решение 1.* Опыт представляет собой выбор двух вагонов из восьми с повторением: первый человек может выбрать любой из 8 вагонов, второй человек тоже может выбрать любой из 8 вагонов. Общее количество исходов равно $8 \cdot 8$. Чтобы исход был благоприятным, первый человек может сесть в любой из 8 вагонов, а второй — в любой из 7 оставшихся, поэтому количество благоприятных исходов равно $8 \cdot 7$. Отсюда искомая вероятность будет $\frac{8 \cdot 7}{8 \cdot 8} = \frac{7}{8}$. *Решение 2.* Пусть первый человек уже сел в какой-нибудь вагон. Если второй человек выбирает вагон наугад, то у него остаётся 7 шансов из 8 выбрать его так, чтобы не попасть в тот же вагон. Поэтому вероятность равна $\frac{7}{8}$. **13.** $\frac{2}{3}$. *Решение 1.* Введём для детей следующие обозначения: $м_1$, $м_2$, $д_1$, $д_2$ (м — мальчик, д — девочка). Для перечисления всех возможных исходов опыта составим таблицу 4×4 (см. решение задачи 7). Клетки на диагонали исключим, так как один и тот же человек не может получить два билета. Благоприятные исходы отметим. Получаем $16 - 4 = 12$ равновозможных исходов опыта, из которых 8 благоприятных. Искомая вероятность равна $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. *Решение 2.* Исходами опыта будем считать упорядоченные пары, которые можно составить из 4 человек. Всего таких пар по правилу умножения будет $4 \cdot 3 = 12$. Благоприятными будут пары, в которых дети имеют разный пол. На первое место в такой паре можно поставить любого из 4 детей, на второе — любого из 2 детей противоположного пола. По правилу умножения благоприятных комбинаций будет $4 \cdot 2 = 8$. Искомая вероятность равна $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. *Решение 3.* Будем считать, что двух «счастливчиков» выбирают последовательно. После того как выбрали первого, среди оставшихся трёх детей осталось двое детей противоположного пола. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$. **14.** 7. Обозначим неизвестное количество чёрных шаров в урне через x. Исходами опыта будут всевозможные неупорядоченные пары, которые можно составить из 10 шаров. Количество таких пар равно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$. Благоприятными будут всевозможные пары, которые можно составить из x чёрных шаров. Количество таких пар равно $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$. Значит, вероятность вытащить 2 чёрных шара из такой урны равна $\frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 45}$. Получаем уравнение, которое нужно решить в натуральных числах: $\frac{x \cdot (x-1)}{90} = \frac{1}{15}$, $x \cdot (x-1) = 6$, $x = 3$. Значит, в урне 3 чёрных шара и 7 белых.

15. $\frac{7}{8}$. *Решение 1.* Выпишем в алфавитном порядке все возможные исходы опыта: ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР. Получили 8 исходов, из которых 7 содержат хотя бы одного орла. Получаем, что вероятность равна $\frac{7}{8}$. *Решение 2.* Опыт имеет $2^3 = 8$ равновозможных исходов. Вместо события A = «Выпадет хотя бы один орёл» рассмотрим противоположное ему событие $\bar{A}$ = «Не выпадет ни одного орла». Но это означает, что выпадут все три решки. Таким образом, для $\bar{A}$ имеем единственный благоприятный исход: РРР. Отсюда $P(\bar{A}) = \frac{1}{8}$, следовательно, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{7}{8}$. **16.** $\frac{1}{6}$. Переформулируем задачу: из двух мужчин и двух женщин случайно выбираем двух человек, которые будут спать на нижних полках. С какой вероятностью это будут две женщины? Получили ситуацию, которая уже рассматривалась в задаче 13. **17.** 0,001. Общее количество исходов равно 10^6. Палиндром из шести цифр однозначно определяется первыми тремя цифрами, каждую из которых можно выбрать 10 способами, поэтому количество благоприятных исходов равно 10^3. Искомая вероятность: $\frac{10^3}{10^6} = 0{,}001$. **18.** 0,8488. Пусть A — требуемое в условии событие (есть совпадающие цифры). Найдём вероятность противоположного события $\bar{A}$ = «Все цифры в номере паспорта разные». Общее количество исходов равно 10^6. Количество номеров, в которых все цифры разные, — $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$, отсюда $P(\bar{A}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0{,}1512$ и $P(A) = 1 - 0{,}1512 = 0{,}8488$.

8.3. Статистика

Теоретические сведения

Что изучает статистика

Теория вероятностей изучает математические модели массовых случайных явлений (см. 8.2). Но откуда эти модели берутся? В некоторых случаях модель может быть построена умозрительно, исходя, например, из равновозможности всех исходов эксперимента. Именно так обстоит дело в опытах с монетой, кубиком и другими идеальными объектами. Но в более сложных реальных ситуациях построение модели происходит только после тщательного анализа большого количества экспериментальных данных.

Сбором, систематизацией и анализом этих данных занимается **статистика**. Статистика в большей степени, чем теория вероятностей, связана с предметной областью, к которой относятся статистические данные. Поэтому статистика бывает экономический, медицинской, демографический и т. д.

Школьный курс математики ограничивается понятиями и методами *описательной статистики*, которая занимается первичной обработкой статистической информации:

- представлением её в виде удобно читаемых таблиц;
- изображением на диаграммах;
- вычислением наиболее показательных числовых характеристик.

Более тонкими исследованиями — оценкой неизвестных параметров, проверкой гипотез, изучением статистических связей и зависимостей — занимается *математическая статистика*, изучение которой не входит в программу общеобразовательной школы.

Таблицы и диаграммы

Статистических данных всегда нужно много. Чтобы не утонуть в этом море цифр, их представляют в удобном для человека виде. Наиболее простая и употребительная форма такого представления — **таблица**.

В самом простом случае таблица делится на *строки* и *столбцы* (иногда их называют *колонками*). Чаще всего каждый столбец имеет название, которое указывается в верхней клетке каждого столбца. Очень часто к обычным строкам и столбцам в таблицах добавляются так называемые *итоговые строки* или *столбцы*. Они отмечаются словами ВСЕГО или ИТОГО и содержат суммарные значения соответствующих ячеек таблицы.

Пример 1. Население мира. В таблице приведена динамика роста населения на каждом из континентов и частей света:

Название	**Площадь (млн км^2)**	**Население (млн чел.)**						
		1950	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
Африка	30,4	224	282	364	480	637	821	965
Южная Америка	17,8	168	220	288	364	444	523	572
Северная Америка	24,5	172	204	232	256	284	316	339
Азия	43,8	1411	1704	2139	2636	3181	3705	4030
Европа	10,2	548	605	657	693	721	729	731
Австралия	7,6	13	16	20	23	27	31	34
Антарктида	13,7	—	—	—	—	—	—	—
ИТОГО	**148**	**2535**	**3032**	**3699**	**4451**	**5295**	**6124**	**6671**

Таблица позволяет ответить на многие вопросы:
1) Какая из частей света имеет максимальное население?
Ответ: Азия.

2) Какой из материков имеет минимальную площадь?
Ответ: Австралия.

3) На каком из материков или частей света на данный момент максимальная плотность населения? Для ответа на этот вопрос к таблице придётся пристроить дополнительный столбец, в котором необходимо посчитать плотность населения, т. е. отношение населения к площади:

Название	**Площадь (млн км^2)**	**Население (млн чел.)**	**Плотность**
Африка	30,4	965	31,74
Южная Америка	17,8	572	32,13
Северная Америка	24,5	339	13,84
Азия	43,8	4030	92,01
Европа	10,2	731	71,67
Австралия	7,6	34	4,47

Ответ: Азия.

4) Какую часть земной суши занимает Австралия?

Ответ: $\frac{7,6}{148} \approx 0,05$.

5) Какую часть населения Земли составляет население Африки?

Ответ: $\frac{965}{6671} \approx 0,14$.

6) На сколько процентов возросло за последние полвека население Европы?

Ответ: $\frac{(731-605)}{605} \cdot 100\% \approx 21\%$.

Таблицы позволяют представить статистическую информацию в компактной и удобной для восприятия форме. Ещё более наглядным способом представления информации является графический.

Пример 2. Население мира. Посмотрим на рисунки, построенные по данным из примера 1:

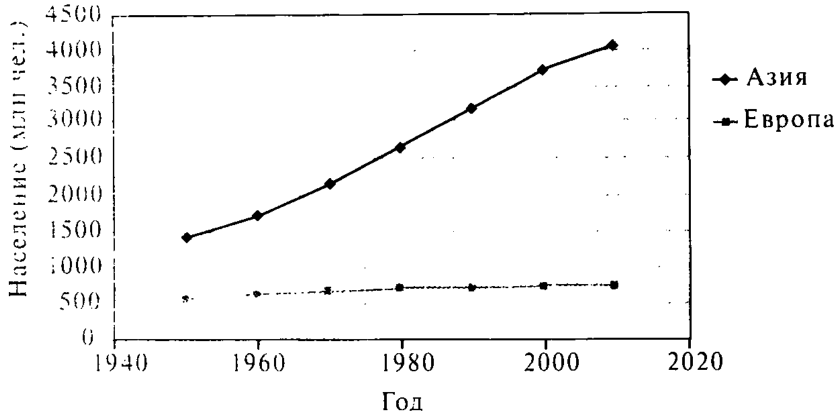


Рис. 8.1. Рост населения Европы и Азии.

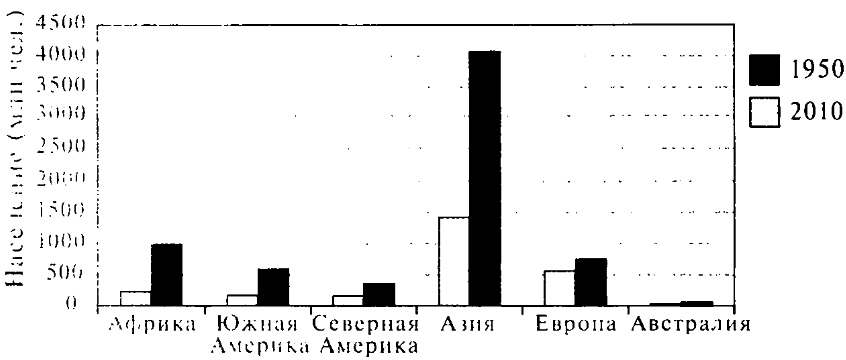


Рис. 8.2. Распределение населения в 1950-м и 2010 годах.

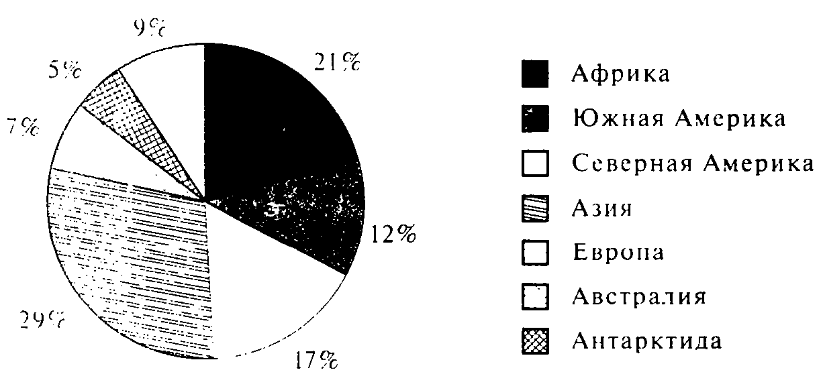


Рис. 8.3. Распределение земной суши.

По рисунку 8.1 удобно прослеживать динамику изменения населения с течением времени, по рисунку 8.2 можно сравнить население континентов, а по рисунку 8.3 — соотношение между занимаемыми ими территориями. Эти рисунки называют **диаграммами**.

Диаграмма на рисунке 8.1 — это обычный **график** кусочно-линейной функции. Такого рода диаграммы часто используют, чтобы показать изменение какой-либо величины с течением времени: на горизонтальной прямой отмечают даты или моменты времени, а по вертикали откладывают значения изучаемой величины (в нашем примере — население, измеряемое в *млн чел.*). Потом соединяют полученные точки ломаной линией.

Диаграмма на рисунке 8.2 называется **столбчатой** (или **столбиковой**). По горизонтали расставляют метки с названиями каких-либо объектов (в нашем случае — континентов или частей света) и над каждой меткой рисуют столбик, высота которого равна интересующей нас величине (населению). На столбиковой диаграмме хорошо видны количественные соотношения величин друг с другом. При этом можно построить два и более рядов на одной диаграмме (в нашем примере первый ряд соответствует 1950 году, а второй — 2010-му).

Диаграмма на рисунке 8.3 — **круговая**. Французы называют её «камамбером», поскольку она действительно напоминает головку знаменитого французского сыра, разрезанную на дольки. Каждая долька соответствует одному из рассматриваемых объектов (континенту или части света), а её размер пропорционален интересующей вас величине (площади). Чтобы построить круговую диаграмму, нужно поделить весь круг на секторы так, чтобы их угловые меры оказались в том же соотношении, что и представленные на диаграмме величины.

Генеральная совокупность и случайная выборка

Основным методом статистики является *выборочный метод*. Суть его состоит в том, что в реальном опыте мы наблюдаем не всю совокупность явлений или объектов, которые хотели бы изучить, а лишь какую-то их часть. Например, при определении уровня розничных цен на бензин практически невозможно выяснить цены на всех бензоколонках, поэтому проводят выборочное обследование лишь малой их части.

Вся совокупность явлений или объектов, подлежащих статистическому исследованию, называется **генеральной совокупностью**. Элементами генеральной совокупности могут быть неодушевлённые предметы, живые люди, природные явления, физические эксперименты и т. д. Однако в каждом конкретном исследовании генеральная совокупность должна быть достаточно однородной — по крайней мере, в отношении тех характеристик, которые мы собираемся изучать. В этом случае каждый элемент генеральной совокупности описывается определённым набором признаков, поведение которых изучается. В простейших ситуациях этот признак всего один и описывается целым или действительным числом.

Пример 3. Цены на бензин. Генеральная совокупность — все бензоколонки России (или какого-либо региона). Исследуемый признак — цена на 92-й бензин.

Пример 4. Состав семьи. Генеральная совокупность — семьи россиян (или какая-то категория таких семей). Исследуемый признак — количество человек в семье.

И в том и в другом примере практически невозможно подвергнуть обследованию всю совокупность явлений или объектов — это или слишком дорого, или вообще невозможно. Поэтому из всей генеральной совокупности для обследования выбирают небольшое (по сравнению с генеральной совокупностью) конечное множество элементов, которые составляют **случайную выборку**. Эти элементы изучают, выявляют различные характеристики и закономерности, а затем переносят полученные результаты на всю генеральную совокупность. В этом и состоит суть выборочного метода — по результатам, полученным в выборке, попытаться сделать выводы обо всей генеральной совокупности. Если выборка *репрезентативна* (по-русски — представительна), то такой метод оказывается вполне успешным.

Пример 5. Выборы мэра. Генеральная совокупность — все жители города, достигшие избирательного возраста. Перед выборами провели выборочный опрос для того, чтобы определить, сколько человек придёт на избирательные участки в день выборов. Из 2000 опрошенных 850 человек заявили, что придут на выборы. Сколько избирателей следует ожидать на участках, если в городе около 350 тыс. жителей, достигших избирательного возраста?

Воспользуемся выборочным методом и перенесём данные, полученные в выборке, на всю генеральную совокупность: $\frac{850}{2000}=\frac{17}{40}$ — такова доля в выборке тех, кто придёт на выборы; отсюда $350000\cdot\frac{17}{40}=148\,750$ — примерно столько людей следует ожидать на избирательных участках.

В статистическом исследовании каждый элемент генеральной совокупности предстаёт как набор определённых, чаще всего числовых, характеристик, поэтому, когда дело доходит до обработки результатов выборки, от предметов, людей или явлений остаются только числа. С этой точки зрения *выборкой можно считать набор чисел*, полученный в результате статистического наблюдения.

Пример 6. Цены на бензин. При выборочном исследовании розничных цен на 92-й бензин была получена следующая выборка:

22,4; 22,8; 22,4; 23,0; 22,5; 22,1; 22,5; 22,4; 22,95; 22,6.

От 10 бензоколонок, попавших в выборку, остались только 10 чисел — цены на 92-й бензин, выраженные в рублях.

Пример 7. Состав семьи. Среди учеников, посещающих кружок по социологии, был проведён опрос: из скольких человек состоят их семьи? В результате была получена следующая выборка:

2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 3 4 3 3 2 3 5 3

Здесь каждое число означает количество человек в семье соответствующего ученика.

После того как проведено любое выборочное обследование, встаёт проблема обработки полученных результатов. Первый шаг, который может значительно облегчить работу с большими массивами данных, — это их упорядочение. Упорядочим числа, полученные в нашей выборке, по возрастанию:

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5

Числовой набор, в котором все элементы упорядочены по возрастанию, называется *ранжированным*. Для анализа он гораздо удобнее: теперь мы ясно видим, что минимальное значение в нём равно 2, а максимальное — 5. Видно, как часто повторяется каждое из значений. Правда, последнее замечание справедливо только благодаря тому, что выписанный набор содержит не очень много чисел. А что делать, если этих чисел сотни или тысячи?

Совершенно очевидно, что такой набор можно представить более компактно, если указывать только *различные значения*, встречающиеся в наборе, и *количество повторений* каждого из них. Соответствующая таблица называется **частотной таблицей** или **таблицей распределения частот**:

Состав семьи	Количество семей	Частота
2	14	0,35
3	19	0,475
4	5	0,125
5	2	0,05

Первый столбец частотной таблицы содержит различные значения наблюдаемой величины, упорядоченные по возрастанию, второй столбец — сколько раз это значение повторилось в выборке, а третий — какую долю эти значения составляют от всей выборки, т. е. их **частоту**.

Числовые характеристики набора чисел

Английский статистик Р.Фишер писал: «Статистика может быть охарактеризована как наука о *сокращении* и *анализе* материала, полученного в наблюдениях». В предыдущих пунктах мы научились представлять статистические данные в виде таблиц и диаграмм. Можно пойти ещё дальше и заменить всю совокупность данных, полученных в выборке, одним-двумя числовыми параметрами, которые будут своеобразной квинтэссенцией всего набора чисел.

Средние характеристики описывают положение всего числового набора в целом на числовой прямой. Наиболее известной и употребительной такой характеристикой является **среднее арифметическое**, которое можно получить, если разделить сумму всех чисел на их количество. В статистике эту величину называют ещё **средним значением** или **выборочным средним**. Если наблюдаемая при этом величина обозначается буквой x, то среднее арифметическое — $\overline{x}$.

В большинстве реальных исследований именно среднее арифметическое несёт наиболее важную (но, разумеется, не всю!) информацию об изучаемом явлении. Достаточно вспомнить выражения «средний балл», «средняя зарплата», «средний доход», хорошо знакомые и понятные большинству людей, далёких от математики.

Пример 8. Отметки по алгебре. Пусть ученик получил в течение первой учебной четверти следующие оценки по алгебре:

$$5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5$$

Найдём его средний балл, т. е. среднее арифметическое всех оценок:

$$\overline{x} = \frac{5+2+4+5+5+4+4+5+5+5}{10} = 4{,}4.$$

Именно эта величина, скорее всего, будет главным ориентиром для учителя при выставлении четвертной оценки. Заметьте, что среднее значение числового набора вполне может не совпадать ни с одним из его чисел. В нашем примере средний балл получился 4,4, хотя все оценки выражались целыми числами. Следуя полученному результату и известному вам правилу округления, ученику придётся поставить 4.

Но можно привести весомые аргументы в пользу другой итоговой оценки — пятёрки. Ведь именно такую оценку ученик получал в течение четверти чаще всего. Такая числовая характеристика называется в статистике модой. **Модой** числового набора называют число, которое встречается в этом наборе наиболее часто. Можно сказать, что оно в этом наборе самое «модное». Для нашего примера мода равна 5. В отличие от среднего арифметического, которое можно вычислить для любого числового набора, *моды может вообще не быть*. Например, пусть тот же ученик получил по русскому языку следующие отметки:

$$4, 2, 3, 5.$$

Каждая отметка встречается в этом наборе только один раз, и среди них нет числа, встречающегося чаще других. Значит, у этого набора нет моды.

Ещё одной важной средней характеристикой числового набора является его медиана — число, которое делит весь набор на две равные по количеству чисел части. Более точно, **медианой** числового набора называют число из этого набора (или полусумму двух его чисел), слева и справа от которого на числовой прямой лежит одинаковое количество чисел из этого набора. Чтобы найти медиану числового набора, нужно сначала упорядочить его по возрастанию. В нашем примере с оценками это выглядит так:

$$2, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5.$$

Если набор содержит нечётное число чисел, то нужно взять число, которое находится ровно посередине. Если набор содержит чётное число чисел (как в нашем примере), то нужно взять два средних числа и найти их полусумму: $\frac{5+5}{2} = 5$.

Отметим важные свойства среднего арифметического, моды и медианы, вытекающие из их определения:

- все средние характеристики попадают на отрезок от минимального до максимального значений числового набора;
- при умножении всех чисел набора на одно и то же число все средние характеристики умножаются на это же число;
- при прибавлении ко всем числам набора одного и того же числа ко всем средним характеристикам прибавляется это же число;
- медиана является более устойчивой, чем среднее арифметическое, характеристикой по отношению к исходным данным (а значит, и к ошибкам в этих данных).

Последнее свойство объясним на примере.

Пример 9. Цены на бензин. Найдём среднее арифметическое и медиану цен на бензин, приведённых в примере 6:

$$\bar{x} = \frac{22{,}4 + 22{,}8 + 22{,}4 + 23 + 22{,}5 + 22{,}1 + 22{,}5 + 22{,}4 + 22{,}95 + 22{,}6}{10} = \frac{225{,}65}{10} = 22{,}565.$$

Чтобы найти медиану, упорядочим цены по возрастанию:

22,1; 22,4; 22,4; 22,4; 22,5; 22,5; 22,6; 22,8; 22,95; 23;

откуда медиана равна 22,5.

Представим себе, что при переписывании (или при вводе в компьютер) в нашу выборку вкралась досадная оплошность: при записи одного из чисел мы пропустили десятичную запятую и вместо 22,8 написали 228. Тогда среднее арифметическое результатов возрастёт с 22,565 до 43,085 (почти в два раза!), а медиана будет по-прежнему 22,5 рубля.

Среднее арифметическое, медиана и мода позволяют оценить поведение числового набора в среднем. Понятно, что это далеко не всегда даёт полное представление о поведении изучаемой величины. Например, на планете Меркурий средняя температура +15°. Исходя из этого статистического показателя, можно подумать, что на Меркурии умеренный климат, удобный для жизни людей. Однако на самом деле это не так. Температура на Меркурии колеблется от –150° до +350°. Значит, чтобы получить представление о поведении наблюдаемой величины, помимо средних характеристик надо знать *характеристики разброса* или *рассеяния*, показывающие, насколько значения в наборе различаются между собой, как сильно они разбросаны, рассеяны вокруг средних.

Простейшей такой характеристикой является размах. **Размах** — это разность наибольшего и наименьшего значений числового набора. Для температуры на Меркурии, например, размах равен 350° – (–150°) = 500°. Конечно, такого перепада температур человек выдержать не может.

Пример 10. Цены на бензин. Найдём размах цен из примера 6 (или 9):

$$23 - 22{,}1 = 0{,}9.$$

Понятно, что чем меньше размах цен, тем устойчивее рынок. Размах очень просто вычисляется, но не всегда несёт достоверную информацию, так как на его величину может сильно повлиять какое-то одно (возможно, ошибочное) значение выборки. Если снова вернуться к примеру 9 и предположить, что в наши данные вкралась ошибка, то размах увеличится с 0,9 до 228 – 22,1 = 205,9 (более чем в 200 раз!). Вот почему в реальных статистических исследованиях чаще используют другие характеристики разброса, но они будут рассматриваться только в старшей школе.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. В таблице приведены данные опроса, который проводился среди девятиклассников, о количество детей в их семьях:

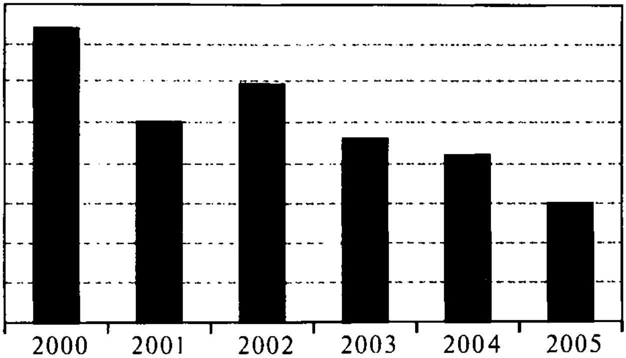
Количество детей	1	2	3	4	5 и более
Количество семей	31	12	5	0	2

Какова доля многодетных (то есть имеющих 3 и более детей) семей среди опрошенных?

2. Перед вами данные Росстата об обеспеченности населения врачами в четырёх областях России с 2000-го по 2005 год (количество врачей на 10 000 человек):

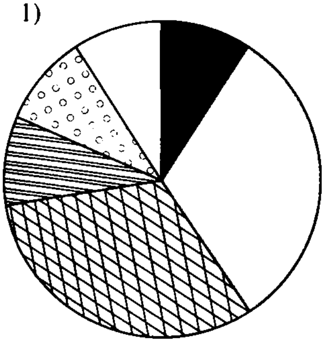
ОБЛАСТЬ	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Белгородская	38,2	38,3	39,2	38,9	39,2	39,6
Брянская	36,6	36,5	36,3	36,9	37,1	36,3
Владимирская	36,2	35	35,5	34,8	34,6	34
Орловская	36,7	36,9	37,3	37,6	37,5	37,1

Какой из четырёх областей соответствует следующая диаграмма?

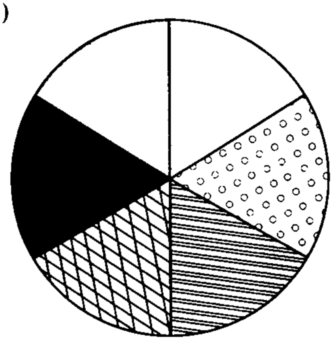


3. Известно, что Австралия занимает около 5% всей земной суши, Азия — 30%, Америка — 29%, Антарктида — 9%, Африка — 20% и Европа — 7%. Какая из следующих круговых диаграмм показывает распределение земной суши между частями света?

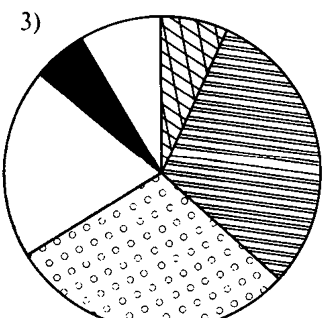
1)



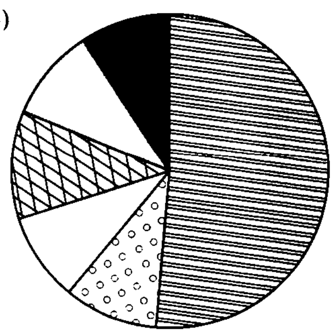
2)



3)



4)



4. Перед вами итоговая таблица группового этапа лиги чемпионов 2009/2010 годов в группе С:

	И	В	Н	П	Гз	Гп	О
Реал	6	4	1	1	15	7	13
Милан	6	2	3	1	8	7	9
Марсель	6	2	1	3	10	10	7
Цюрих	6	1	1	4	5	14	4

(И — количество игр, В — выигрышей, Н — ничьих, П — поражений, Гз — забитых голов, Гп — пропущенных голов, О — набранных очков.) Сколько голов забивалось в среднем за одну игру в этой группе?

5. В таблице указано количество книг, прочитанных каждым из учеников за летние каникулы:

Аня	Витя	Игорь	Оля	Петя	Катя	Лена	Саша
8	10	6	1	0	8	5	3

Найдите среднее арифметическое, медиану и моду этого набора чисел.

6. Ученик засекал в течение недели время, которое он тратит на дорогу в школу и из школы:

День	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
В школу (мин)	19	20	21	17	22	24
Из школы (мин)	28	22	20	25	24	22

На сколько минут в среднем дорога из школы дольше дороги в школу?

7. В течение четверти Таня получила следующие отметки по физике: одну «2», шесть «3», три «4» и пять «5». Найдите среднее арифметическое и моду её оценок.

8. Президент компании получает зарплату 100 000 р. в месяц, четверо его заместителей получают по 20 000 р., а 20 служащих компании — по 10 000 р. Найдите среднее арифметическое и медиану зарплат в компании.

9. Какое из следующих утверждений неверно:

1) если набор состоит из одинаковых чисел, то его размах равен 0;

2) если набор состоит из одинаковых чисел, то его среднее арифметическое и медиана равны;

3) если размах набора равен 0, то он состоит из одинаковых чисел;

4) если среднее арифметическое и медиана набора равны, то он состоит из одинаковых чисел.

10. Средний возраст участников школьного хора составляет 14 лет. Каких участников в хоре больше: старше 14 лет или младше 14 лет?

1) старше 14; 3) поровну;

2) младше 14; 4) невозможно ответить по этим данным.

11. Среднее арифметическое числового набора равнялось 10, медиана 12, размах 5. Все числа набора умножили на 3, после чего прибавили к каждому из них 5. Чему стало равно среднее арифметическое, медиана, размах полученного набора?

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

12. Завод по производству компакт-дисков в течение рабочей недели (5 дней) проводил проверку качества своей продукции. Для этого ежедневно тестировалось 200 случайно отобранных дисков. В каждый из пяти дней было обнаружено соответственно 8, 12, 5, 7, 10 бракованных дисков. Сколько бракованных дисков можно ожидать в партии из 10 000 дисков?

13. В таблице показаны средний балл и количество участников выпускного экзамена в каждой из пяти школ города:

Школа	1	2	3	4	5
Количество участников	60	70	30	50	70
Средний балл	60	54	68	72	54

Найдите средний балл выпускного экзамена по всему городу.

14. Поезда прибывали на станцию метро со следующими интервалами:

2 мин 8 с; 1 мин 58 с; 2 мин 10 с; 1 мин 57 с; 2 мин 12 с.

Найдите среднее арифметическое и медиану интервалов движения поездов.

15. Средний возраст 11 игроков футбольного клуба «Динамо», вышедших на игру, составил 26 лет. После замены одного из игроков средний возраст уменьшился и стал равен 25. На сколько лет игрок, вышедший на замену, младше игрока, ушедшего с поля?

16. Числовой набор состоит из всех двузначных нечётных чисел:

$$11, 13, 15, ..., 97, 99.$$

Найдите его среднее арифметическое и медиану.

17. Средний рост в 9 «А» классе составляет 156 см, а медиана — 154 см. Какое из следующих утверждений справедливо?

1) в классе обязательно есть ученик с ростом 156 см;
2) в классе обязательно есть ученик с ростом 154 см;
3) в классе обязательно есть ученик с ростом менее 154 см;
4) в классе обязательно есть ученик с ростом более 156 см.

18. При каких значениях a в числовом наборе

$$1, 2, 3, 4, a$$

а) медиана будет равняться 3?
б) среднее арифметическое будет равняться 3?
в) среднее арифметическое будет совпадать с медианой?

19. Три девятых класса писали итоговую контрольную работу по математике. После выставления оценок были посчитаны числовые характеристики полученных числовых наборов и занесены в таблицу:

Класс	**Среднее**	**Мода**	**Медиана**	**Размах**
9 «А»	4,2	4	4	3
9 «Б»	4	4	4	2
9 «В»	3,9	3	4	2

Очевидно, что полностью восстановить числовые наборы по этим данным невозможно. А можно ли определить, в каких классах были двойки, а в каких не было?

Решения и ответы

1. 0,14. Чтобы найти долю многодетных семей, поделим количество многодетных семей на их общее количество: $\frac{5+0+2}{31+12+5+0+2}=\frac{7}{50}=0{,}14$.

2. Владимирской. **3.** 3. **4.** $3\frac{1}{6}$. Чтобы найти среднее количество голов за игру, нужно поделить общее количество голов на количество игр. Каждая команда сыграла по 6 игр, всего команд 4, в каждой игре участвовало 2 команды, поэтому количество игр равно $\frac{6\cdot 4}{2}=12$. Чтобы найти количество голов, нужно сложить числа в столбце «Гз» или «Гп» (но не то и другое вместе!): $15+8+10+5=38$. Среднее количество голов за игру — $\frac{38}{12}=3\frac{1}{6}$. **5.** 5,125; 5,5; 8. Среднее арифметическое $=\frac{8+10+6+1+0+8+5+3}{8}=$

$= 5\frac{1}{8} = 5,125$. Чтобы найти медиану, числа нужно упорядочить: 0, 1, 3, 5, 6, 8, 8, 10. Количество чисел чётно, поэтому нужно взять среднее арифметическое двух чисел, стоящих в центре ряда: медиана равна $\frac{5+6}{5} = 5,5$. Мода — это число, которое повторяется чаще остальных, т. е. 8. **6.** 3. Найдём ежедневную разность между дорогой из школы и в школу, а затем вычислим среднее арифметическое этих разностей: $\frac{9+2-1+8+2-2}{6} = \frac{18}{6} = 3$.

День	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
В школу (мин)	19	20	21	17	22	24
Из школы (мин)	28	22	20	25	24	22
Разность	9	2	—1	8	2	—2

7. 3,8; 3. Каждую из оценок нужно взять в том количестве, сколько раз она повторялась! Среднее арифметическое равно $\frac{2+3\cdot6+4\cdot3+5\cdot5}{1+6+3+5} = \frac{57}{15} = \frac{19}{5} = 3,8$; чаще всего повторялась оценка «3», поэтому мода равна 3. **8.** 15200; 10000. Как и в предыдущей задаче, каждую зарплату нужно взять с её кратностью. Среднее арифметическое равно $\frac{100000+20000\cdot4+10000\cdot20}{1+4+20} = \frac{380000}{25} = 15200$. Чтобы найти медиану, представим, что все 25 зарплат выписаны по возрастанию. Тогда в середине, очевидно, окажутся зарплаты по 10000 рублей, поэтому медиана равна 10000. **9.** 4. Любой симметричный ряд обладает таким свойством, например: 1, 2, 3, 4, 5. Среднее арифметическое равно медиане и равно 3. **10.** 4. Возможны все три ситуации, например: если возраста участников равны 12, 14, 15, 15 лет, то больше тех, кто старше 14; а если возраста равны 13, 13, 14, 16, то больше тех, кто младше 14; а если возраста равны 13, 14, 15, то поровну. **11.** 35; 41; 15. После умножения на 3 все характеристики тоже умножились на 3: 30, 36, 15. После прибавления числа 5 среднее арифметическое и медиана увеличились на 5, а размах не изменился: 35, 41, 15. **12.** 420. Найдём долю бракованных среди всех отобранных: $\frac{8+12+5+7+10}{200\cdot5} = \frac{42}{1000} = 0,042$. В партии из 10 000 дисков следует ожидать $10000\cdot0,042 = 420$ бракованных. **13.** 60. Чтобы найти среднее по городу, нужно взять средний балл по каждой школе с кратностью, равной числу её выпускников: $\frac{60\cdot60+54\cdot70+68\cdot30+72\cdot50+54\cdot70}{60+70+30+50+70} = \frac{16800}{280} = 60$. **14.** 2 мин 5 с; 2 мин 8 с. Исходный набор не совсем числовой: каждый интервал выражен в смешанных единицах — минутах и секундах. Переведём все интервалы в секунды: 128, 118, 130, 117, 132. Теперь найдём среднее в секундах:

$\frac{128+118+130+117+132}{5}=\frac{625}{5}=125$ с. Можно снова перейти к смешанным единицам: среднее арифметическое равно 2 мин 5 с. Медиана равна 2 мин 8 с. **15.** На 11. Если обозначить через x возраст игрока, ушедшего с поля, а через y — вышедшего на замену, то разность средних арифметических до замены и после будет равна $\frac{x-y}{11}$. По условию задачи эта разность равна $26-25=1$. Отсюда $x-y=11$. **16.** 55; 55. Данный набор образует арифметическую прогрессию с первым членом 11 и разностью 2. Всего в наборе 45 чисел. Посередине на 23-м месте находится число 55 (23-й член прогрессии). Сумму всех чисел набора можно найти как сумму арифметической прогрессии: $\frac{11+99}{2}\cdot 50=2750$. Отсюда среднее арифметическое равно $\frac{2750}{50}=55$; медиана равна 55. **17.** 4. Чтобы показать, что утверждения 1—3 не обязательно должны выполняться, приведём соответствующие примеры: 1) 154, 154, 160; 2) 153, 153, 155, 163; 3) см. пример для 1). А вот утверждение 4 будет выполнено: если в классе нет учеников выше 156 см, то их средний рост может равняться 156 см только в том случае, если все они имеют такой рост. Но тогда и медиана будет равна 156, а не 154. **18.** а) $a\geq 3$. При $a<3$ медиана будет равняться 2 или a; б) $a=5$. Так как $\frac{1+2+3+4+a}{5}=3$, то $a=5$; в) $a=0$; $a=2{,}5$; $a=5$. Медина приведённого числового набора равна: 2 при $a\leqslant 2$, a при $2<a<3$, 3 при $a\geq 3$. Среднее арифметическое равно $\frac{1+2+3+4+a}{5}$. Получаем три уравнения с соответствующими условиями на a: $\frac{1+2+3+4+a}{5}=2$ $(a\leqslant 2)$; $\frac{1+2+3+4+a}{5}=a$ $(2<a<3)$; $\frac{1+2+3+4+a}{5}=3$ $(a\geq 3)$. Их корни и будут ответом. **19.** 9 «А» — были, 9 «Б» и 9 «В» — не было. Объясним ответ для каждого класса: 9 «А»: если размах 3, то обязательно были 2 и 5; 9 «Б»: поскольку размах 2, то все оценки лежат либо от 2 до 4, либо от 3 до 5 (причём концы диапазонов обязательно присутствуют). Для диапазона от 2 до 4 среднее не может равняться 4, поэтому все оценки лежат от 3 до 5; 9 «В»: поскольку размах 2, то все оценки лежат либо от 2 до 4, либо от 3 до 5 (причём концы диапазонов обязательно присутствуют). Предположим, что это диапазон от 2 до 4; тогда четвёрок должно быть больше половины всех оценок (ведь 4 — медиана, а пятёрок в этом случае нет вообще), но тогда 3 не может быть модой — пришли к противоречию. Значит, все оценки лежат от 3 до 5.

§ 9. Геометрические фигуры и их свойства

Что надо знать и уметь:

- распознавать геометрические фигуры (плоские и пространственные), различать их взаимное расположение; изображать геометрические фигуры; выполнять чертежи по условиям задач;
- вычислять значения геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов), используя известные формулы;
- решать геометрические задачи на вычисление геометрических величин, опираясь на изученные свойства фигур и отношений между ними, применяя дополнительные построения, алгебраический и тригонометрический аппарат, соображения симметрии;
- проводить доказательные рассуждения при решении задач, используя известные теоремы, обнаруживая возможности для их использования;
- проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами;
- использовать приобретённые знания и умения для описания реальных ситуаций на языке геометрии, для решения практических задач, связанных с нахождением геометрических величин (используя при необходимости справочники и технические средства).

9.1. Прямые и углы

Теоретические сведения

Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла. Параллельные и пересекающиеся прямые

При пересечении параллельных прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны. Обратно (признак параллельности): если внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух прямых третьей, равны, то эти прямые параллельны. Прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины данного угла и разбивающий его на два равных угла. Точка принадлежит биссектрисе тогда и только тогда, когда она равноудалена от сторон данного угла.

Задача 1. На прямой a взята точка A, а на параллельной ей прямой b — точки B и C так, что $\angle ABC = 130°$. Биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает прямую a в точке D. Найдите угол $\angle ADB$.

Решение: Из определения биссектрисы следует, что $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle CBA = 65°$. Но $\angle ADB = \angle CBD$, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых a и b. Значит, $\angle ADB = 65°$.

Сумма углов треугольника, свойство внешнего угла треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, с ним не смежных.

Задача 2. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что $\angle ADE = 110°$, $\angle CED = 140°$. Найдите угол $\angle ABC$.

Решение: Угол $\angle BDE = 180° - \angle ADE = 70°$, как смежный с углом $\angle ADE$. Так же $\angle BED = 180° - \angle CED = 40°$. Искомый угол находим из треугольника DBE: $\angle DBE = 180° - \angle BDE - \angle BED = 180° - 70° - 40° = 70°$.

Другое решение использует свойство внешнего угла. После того как был вычислен $\angle BDE = 70°$, по свойству внешнего угла получаем:

$$\angle DBE = \angle DEC - \angle BDE = 140° - 70° = 70°.$$

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Прямая c пересекает прямые a и b, образуя с ними углы в 90°. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

2. Прямая c пересекает прямые a и b, образуя с ними углы в 60°. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны, если указанные углы являются:

а) внутренними накрест лежащими?

б) внутренними односторонними?

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что $DE \parallel AC$. Найдите угол $\angle ABC$, если $\angle BAC = 30°$, $\angle BED = 40°$.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

4. Угол при вершине B остроугольного треугольника ABC равен 70°. Какие углы образуются при пересечении высот треугольника, проведённых из вершин A и C?

5. Из точки P, лежащей между параллельными прямыми a и b, проведены два луча, пересекающие: первый — прямую a, образуя с ней угол в 30°, второй — прямую b, образуя с ней угол в 40°. Какой угол образуют данные лучи? (Рассматриваются углы меньше развёрнутого.)

Решения и ответы

1. Можно. *Решение*. Это следует из теоремы: если прямая перпендикулярна двум прямым, то эти прямые параллельны. В нашем примере $c \perp a$ и $c \perp b$. **2.** а) Можно; б) нельзя. В п. а) утверждение следует из признака параллельности прямых, сформулированного в начале параграфа. В п. б) внутренние накрест лежащие углы, образуемые прямой c и прямыми a и b, являются один — углом в 60°, другой — углом в 120° (смежный с углом в 60°) и не являются равными. (В действительности данные три прямые содержат стороны равностороннего треугольника.) **3.** $\angle ABC = 110°$. *Решение*. Из параллельности прямых DE и AC следует, что $\angle BCA = \angle BED = 40°$. Тогда $\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA = 180° - 30° - 40° = 110°$. **4.** 70°, 110°. *Решение*. Если AP и CQ — указанные высоты, H — точка их пересечения, то из прямоугольного треугольника BAP имеем: $\angle BAP = 90° - \angle PBA = 20°$. Но тогда из прямоугольного треугольника AHQ получаем: $\angle AHQ = 90° - \angle QAH = 90° - 20° = 70°$. Углы, смежные с $\angle AHQ$, равны 110°. *Комментарий*. Фактически мы доказали свойство: углы с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо в сумме дают 180°. **5.** 70° или 170°. *Решение*. Проведём через точку P внутри рассматриваемого угла луч, параллельный данным прямым a и b. Этот луч разобьёт рассматриваемый угол на два угла, каждый из которых является либо внутренним накрест лежащим, либо внутренним односторонним с данными углами в 30° и в 40°. Значит, его значение есть либо сумма $30° + 40° = 70°$, либо сумма $30° + 140° = 170°$ (в остальных случаях получаем угол, больший развёрнутого).

9.2. Треугольник

Теоретические сведения

Признаки равенства треугольников. Равнобедренные треугольники

Первый признак: если две стороны и заключённый между ними угол одного треугольника равны двум сторонам и заключённому между ними углу другого треугольника, то эти треугольники равны.

Второй признак: если сторона и прилегающие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилегающим к ней углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Третий признак: если три стороны одного треугольника равны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Если две стороны треугольника равны, то такой треугольник называется *равнобедренным*. Биссектриса угла, образованного двумя равными сторонами равнобедренного треугольника, является одновременно высотой и медианой данного треугольника.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH. Найдите угол $\angle BAC$, если $\angle HAC = 2\angle HAB$.

Решение: Пусть $\angle HAB = \alpha$, тогда $\angle HAC = 2\alpha$, значит, $\angle BAC = 3\alpha$. Но $\angle BCA = \angle BAC$, значит, $\angle BCA = 3\alpha$. Из прямоугольного треугольника HAC получаем: $\angle HAC + \angle HCA = 90°$, т. е. $5\alpha = 90°$, $\alpha = 18°$. Поэтому $\angle BAC = 3\alpha = 54°$.

Средняя линия треугольника. Теорема Фалеса. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников

Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Задача 2. В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана CM. Найдите длину отрезка HM и периметр треугольника ABC, если $AM = 3$, $AH = HC = 2$.

Решение: Из условия следует, что $AB = 2AM = 6$. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$), так как BH одновременно является для него высотой и медианой. Поэтому $BC = 6$ и периметр треугольника ABC равен 16. Отрезок HM — средняя линия треугольника ABC, поэтому $HM = \frac{1}{2}BC = 3$.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые, то эти прямые высекают на другой стороне угла также равные отрезки.

Первый признак подобия треугольников. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников. Если два стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а заключённые между этими сторонами углы равны, то эти треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.

Задача 3. Прямая, параллельная основанию AC треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и BC соответственно в точках M и N. Найдите длину стороны AC, если $CN = MN = 2$, $BN = 1$.

Решение: Треугольники ABC и MBN подобны по первому признаку: $\angle BMN = \angle BAC$, $\angle BNM = \angle BCA$ в силу параллельности прямых MN и AC. Коэффициент подобия $k = \frac{BC}{BN} = 3$. Поэтому $AC = k \cdot MN = 3 \cdot 2 = 6$.

Теорема Пифагора. Тригонометрические функции углов. Формулы приведения. Решение прямоугольного треугольника. Теоремы косинусов и синусов

Основные формулы приведения:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$,

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике (см. рис. 9.1) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $a^2 + b^2 = c^2$. Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

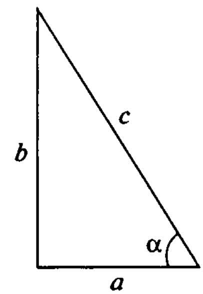


Рис. 9.1.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника позволяют, зная одну из сторон треугольника и острый угол, находить две другие стороны; зная две стороны, находить острые углы, иначе говоря, ***решать прямоугольные треугольники.***

Например, катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на $\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 4. Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника, если его катеты равны a и $a\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е: Найдём гипотенузу прямоугольного треугольника по теореме Пифагора. Она равна $\sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$. Пусть катет, длина которого a, противолежит углу α. Тогда $\sin\alpha$ равен отношению катета a к гипотенузе $2a$: $\sin\alpha = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, т. е. $\alpha = 30^\circ$. Отсюда второй острый угол треугольника равен 60°.

Теорема косинусов. Если a, b и c — длины сторон треугольника, α — угол, лежащий против стороны c, то выполняется равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

Задача 5. Найдите длину медианы BM треугольника ABC, если $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$.

Р е ш е н и е: Имеем: $AM = \frac{1}{2}AC = 2$. Применим теорему косинусов к треугольнику ABM:

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos\angle BAM = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 7.$$

Значит, $BM = \sqrt{7}$.

Теорема синусов. Если a, b и c — длины сторон треугольника, а α, β, γ — соответственно углы, лежащие против этих сторон, то $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. (Причём эти отношения равны $2R$, где R — радиус окружности, описанной около этого треугольника.)

Задача 6. Дан равнобедренный треугольник ABC: $AB=BC=\sqrt{2}$, $\angle ABC=120°$. Найдите длину биссектрисы AL и угол $\angle BLA$.

Решение: (Простой вопрос о величине угла $\angle BLA$ является подсказкой к решению задачи.) В треугольнике BAL имеем: $\angle ABL=120°$, $\angle BAL=15°$, поэтому $\angle BLA=45°$. По теореме синусов из треугольника BAL получаем: $\frac{AB}{\sin\angle BLA}=\frac{AL}{\sin\angle ABL}$, т. е. $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°}=\frac{AL}{\sin 120°}$. Но $\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 120°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, отсюда $AL=\sqrt{3}$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) равен 80°. Какие углы образуются при пересечении биссектрисы, проведённой из вершины A, со стороной BC?

2. В треугольнике ABC точки M, N, K — соответственно середины сторон AB, BC и CA. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр четырёхугольника $KMBN$ равен 10 и $AC=4$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC=10$) длина высоты AH равна 6. Найдите длину основания AC.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

4. Угол между биссектрисой и высотой равнобедренного остроугольного треугольника ABC ($AB=BC$), проведёнными из вершины A, равен 18°. Найдите углы треугольника ABC.

5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка E так, что $\angle BEA=\angle BAC$. Найдите длину отрезка BE, если $AB=4$, $BC=8$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) длина биссектрисы BL равна 8, а длина основания AC равна 12. Найдите длины медианы AM и высоты CH этого треугольника.

Решения и ответы

1. 75°, 105°. *Решение*. Вначале вычислим углы при вершинах A и C треугольника ABC: $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180° - \angle B) = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$. Поэтому если AL — биссектриса треугольника ABC, то $\angle BAL = \angle CAL = \frac{1}{2}\angle BAC = 25°$. Тогда $\angle BLA = 180° - \angle BAL - \angle ABL = 180° - 25° - 80° = 75°$. **2.** 14. *Решение*. Отрезки MK и NK — средние линии треугольника ABC, поэтому $BC = 2MK$ и $AC = 2NK$, следовательно, $AB + BC = 2\,(MK + NK)$. С другой стороны, четырёхугольник $KMBN$ — параллелограмм, так как средняя линия треугольника параллельна стороне, которую она не пересекает. Противоположные стороны параллелограмма равны, поэтому его периметр равен удвоенной сумме соседних сторон. Значит, $10 = 2\,(MK + NK)$. Тогда периметр треугольника ABC есть $AC + (AC + BC) = 4 + 10 = 14$. **3.** $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. *Решение*. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора находим $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 100 - 36 = 64$, значит, $BH = 8$. Тогда $CH = 10 - 8 = 2$, и из треугольника ACH получаем: $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 36 + 4 = 40$. **4.** 48°, 48°, 84° или 72°, 72°, 36°. *Решение*. Пусть 2α — величина угла A, тогда $\angle C = 2\alpha$, $\angle B = 180° - 4\alpha$, поэтому высота AH образует со стороной AB угол, равный $90° - (180° - 4\alpha) = 4\alpha - 90°$. Биссектриса AL образует со стороной AB угол, равный α. Поэтому $\alpha - (4\alpha - 90°) = 18°$ или $(4\alpha - 90°) - \alpha = 18°$. В первом случае $\alpha = 24°$, во втором — $\alpha = 36°$. **5.** 2. *Решение*. Треугольники CBA и ABE подобны по первому признаку подобия, так как у них есть общий угол B и выполняется равенство $\angle BEA = \angle BAC$. Тогда $BE : BA = BA : BC$, т. е. $BE : 4 = 4 : 8$, откуда $BE = 2$. **6.** $AM = \sqrt{97}$, $CH = 9{,}6$. *Решение*. В равнобедренном треугольнике биссектриса BL является одновременно медианой и высотой, поэтому $CL = 6$ и $BL \perp AC$. Опустим из точки M перпендикуляр MP на сторону AC. Тогда отрезок MP — средняя линия треугольника BCL, так как MP и BL — перпендикуляры к одной прямой AC, а значит, параллельны, кроме того, точка M — середина стороны BC треугольника BCL. Отсюда $MP = \frac{1}{2}BL = 4$, $LP = \frac{1}{2}LC = 3$. Тогда по теореме Пифагора из треугольника AMP получаем: $AM^2 = AP^2 + PM^2 = (6 + 3)^2 + 4^2 = 97$. Для нахождения высоты CH заметим, что треугольники CHA и BLA подобны по первому признаку, поэтому $CH : BL = CA : BA$. Вычислим сторону AB по теореме Пифагора: $AB^2 = AL^2 + LB^2 = 36 + 64 = 100$, откуда $AB = 10$, далее получаем: $CH : 8 = 12 : 10$, т. е. $CH = 9{,}6$.

9.3. Четырёхугольники и многоугольники

Теоретические сведения

Параллелограмм и его свойства. Признаки параллелограмма. Ромб, прямоугольник, квадрат

Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны. Свойства: противоположные стороны параллелограмма равны, противоположные углы параллелограмма равны, диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Признак параллелограмма: если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Ромб — параллелограмм, все стороны которого равны. Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами углов, из которых они проведены.

Прямоугольник — параллелограмм, все углы которого прямые. Диагонали прямоугольника равны. Следствие: медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Задача 1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, $AC = 4$, $BD = 2$, $\angle AOB = 60°$. Найдите периметр параллелограмма.

Решение: Из треугольника AOB, в котором $AO = \frac{1}{2}AC = 2$, $BO = \frac{1}{2}BD = 1$, $\angle AOB = 60°$, по теореме косинусов находим $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB = 4+1-2\cdot2\cdot1\cdot\frac{1}{2} = 3$, откуда $AB = \sqrt{3}$.

Из треугольника AOD, в котором $AO = 2$, $DO = 1$, $\angle AOD = 120°$, по теореме косинусов находим

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 - 2AO \cdot DO \cdot \cos\angle AOD = 4+1-2\cdot2\cdot1\cdot(-\tfrac{1}{2}) = 7,$$

откуда $AD = \sqrt{7}$. Значит, периметр параллелограмма равен $2\sqrt{3}+2\sqrt{7}$.

Задача 2. Вершина M ромба $AMND$ является серединой стороны BC прямоугольника $ABCD$. Найдите отношение периметров прямоугольника и ромба, а также углы ромба.

Решение: Пусть $BM = a$, тогда из условия $BC = 2a$, отсюда $AD = 2a$. Значит, сторона ромба имеет длину $2a$, его периметр равен $8a$. Поэтому в прямоугольном треугольнике ABM катет BM в два раза меньше гипотенузы AM. Отсюда $\angle BAM = 30°$, значит, $\angle MAD = 60°$, т. е. углы ромба равны 60° и 120°. Кроме того, из треугольника ABM получаем $AB = a\sqrt{3}$, поэтому периметр прямоугольника равен $2(2a + a\sqrt{3})$. Отношение периметров прямоугольника и ромба равно $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Трапеция и её свойства

Трапеция — это четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие — не параллельны.

Пусть диагонали произвольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Основным свойством трапеции является подобие треугольников AOD и COB. Другое важное свойство: средняя линия трапеции (отрезок, соединяющий середины её боковых сторон) параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Трапеция называется *равнобокой*, если длины её боковых сторон равны. В равнобокой трапеции углы при одном основании равны, длины диагоналей равны.

Задача 3. В равнобокой трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, а диагонали перпендикулярны и имеют длину 3. Найдите периметр трапеции.

Решение: Пусть O — точка пересечения диагоналей. Тогда из подобия треугольников AOD и COB с коэффициентом $k = \frac{AD}{BC} = 2$ следует, что $AO : OC = 2$, откуда $AO = 2$, $OC = 1$. Аналогично, $DO = 2$, $OB = 1$. Теперь по теореме Пифагора находим длины сторон трапеции: $AB = CD = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $AD = 2\sqrt{2}$. Значит, периметр трапеции равен $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

Задача 4. Три стороны трапеции имеют длину 2, а одно из оснований — длину 4. Найдите длины диагоналей трапеции.

Решение: Здесь мы воспользуемся свойством равнобокой трапеции (равенство боковых сторон следует из условия): высоты, проведённые из вершин меньшего её основания, отсекают от равнобокой трапеции два равных треугольника (у этих треугольников равны острые углы — углы при основании и гипотенузы — боковые стороны трапеции). Итак, пусть $ABCD$ — данная трапеция и $AD = 4$, $AB = BC = CD = 2$. Пусть BM и CN — высоты трапеции. Тогда $MBCN$ — прямоугольник, поэтому $MN = BC = 2$. Но тогда $AM = DN = \frac{1}{2}(AD - MN) = 1$. Значит, из треугольника ABM получаем $BM = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Кроме того, $DM = DA - AM = 3$. Теперь из треугольника BDM получаем $BD = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$. Диагональ AC имеет такую же длину.

Сумма углов выпуклого многоугольника. Правильные многоугольники

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

Правильный многоугольник — это выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой.

Задача 5. Угол правильного n-угольника равен 162°. Найдите n.

Решение: Поскольку все углы правильного многоугольника равны, получаем: $162 = \frac{180(n-2)}{n}$, откуда $n = 20$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Найдите периметр ромба, длины диагоналей которого равны 10 и 24 см.

2. Найдите периметр прямоугольника, одна из диагоналей которого имеет длину 10 и образует с другой диагональю угол 60°.

3. Найдите длины диагоналей равнобокой трапеции $ABCD$, длины сторон которой равны $AB = BC = CD = 5$, $AD = 11$.

4. В правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан треугольник KLM, вершины K, L, M которого являются соответственно серединами сторон AF, BC, DE шестиугольника. Найдите периметр шестиугольника, если периметр треугольника равен 18.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL, а прямые, проходящие через точку L параллельно сторонам треугольника, пересекают сторону AB в точке M, сторону BC в точке N. Найдите AM, если $LM = 6$, $NC = 9$.

6. Сумма углов при основании AD трапеции $ABCD$ равна 90°, а разность длин оснований трапеции равна 4. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

7. В правильном восьмиугольнике $ABCDEFGH$ найдите отношение диагонали AE к диагонали CE.

Решения и ответы

1. 52 см. *Решение.* Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому сторона ромба — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами длины 5 см и 12 см. По теореме Пифагора находим $a=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$ (см). Длины сторон ромба равны, поэтому его периметр равен $4\cdot 13=52$ (см). **2.** $10+10\sqrt{3}$. *Решение.* Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD прямоугольника $ABCD$, $\angle AOB=60°$. Диагонали прямоугольника равны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому $AO=BO=5$. Тогда из равностороннего треугольника AOB находим $AB=5$. Сторону AD найдём из треугольника ABD по теореме Пифагора: $AD^2=BD^2-AB^2=100-25=75$, откуда $AD=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$. Поэтому периметр равен $2\cdot(5+5\sqrt{3})$. **3.** $4\sqrt{5}$. *Решение.* Боковые стороны равнобокой трапеции равны, поэтому их длина равна 5, значит, BC и AD — основания трапеции. Опустим перпендикуляры BP и CQ на AD. Тогда треугольники ABP и DCQ равны, следовательно, $DQ=\frac{1}{2}(AD-BC)=3$. Тогда $AQ=AD-DQ=8$, и из прямоугольного треугольника DCQ получаем: $CQ^2=CD^2-DQ^2=16$. Теперь из прямоугольного треугольника ACQ находим: $AC^2=AQ^2+CQ^2=80$. **4.** 24. *Решение.* Отрезок KL — средняя линия трапеции $FABC$, основание FC которой вдвое больше основания AB, откуда $KL=\frac{3}{2}a$, где $a=AB$. Треугольник KLM — равносторонний, значит, его периметр равен $3\cdot\frac{3}{2}a=18$, откуда $a=4$. **5.** 4. *Решение.* Четырёхугольник $LMBN$ — ромб, так как он по построению параллелограмм, а его диагональ BL делит угол при вершине B пополам. Тогда $LM=LN=6$. Отрезок AM найдём теперь из подобия треугольников AML и LNC, имеющих соответственно параллельные стороны: $AM:LN=LM:CN$. **6.** 2. *Решение.* Пусть M — середина меньшего основания BC трапеции $ABCL$, N — середина другого основания. Проведём через точку M прямые, параллельные боковым сторонам трапеции. Они пересекут основание AD в точках P и Q так, что $ABMP$ и $DCMQ$ — параллелограммы. Тогда $AP=BM=MC=DQ$, поэтому $PN=NQ$. Кроме того, сумма углов при основании PQ треугольника PMQ равна 90°, так как она равна сумме углов при вершинах A и D трапеции. Значит, MN — медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, откуда $MN=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}(AD-AP-DQ)=\frac{1}{2}(AD-BM-CM)$, значит, $MN=\frac{1}{2}(AD-BC)=2$. **7.** $\sqrt{2}$. *Решение.* Рассмотрим треугольник ACE. Он — равнобедренный в силу равенства диагоналей AC и CE. С другой стороны, любой правильный многоугольник можно вписать в окружность. Поэтому $\angle ACE=90°$, как угол с вершиной на окружности, опирающийся на диаметр. Значит, $AE^2=AC^2+CE^2=2CE^2$, откуда $AE=\sqrt{2}CE$.

9.4. Окружность и круг

Теоретические сведения

Окружность и круг. Центральный, вписанный угол; величина вписанного угла

В этом разделе содержатся сразу несколько важнейших теорем планиметрии.

Величина центрального угла (угла, образованного двумя радиусами окружности) равна градусной мере дуги, на которую он опирается (дуги, заключённой между концами радиусов). Величина вписанного угла (угла, образованного двумя хордами, выходящими из одной точки на окружности) равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается (дуги, заключённой между концами хорд). Следствие: вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, — прямой.

Задача 1. Вершины треугольника разбивают описанную около него окружность на три дуги, отношение градусных мер которых равно 1 : 2 : 3. Найдите углы треугольника.

Р е ш е н и е: Градусная мера окружности равна 360°, поэтому указанные дуги имеют соответственно меру 60°, 120°, 180°. А опирающиеся на эти дуги углы треугольника равны соответственно 30°, 60°, 90°.

Задача 2. Три точки пересечения продолжений биссектрис треугольника с описанной около него окружностью делят эту окружность на три дуги, отношение градусных мер которых равно 2 : 3 : 4. Найдите углы треугольника.

Р е ш е н и е: Пусть A, B, C — вершины треугольника, A_1, B_1, C_1 — точки пересечения выходящих из этих вершин биссектрис с описанной окружностью. Аналогично предыдущей задаче получаем, что точки разбили окружность на дуги 80°, 120°, 160°, можем считать, что это дуги A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1. Тогда сумма градусных мер дуг A_1C и CB_1 равна 80°, значит, сумма углов $\angle A_1AC$ и $\angle B_1BC$ равна 40°. Но эти углы составляют половины от углов A и B треугольника ABC, значит, $\angle A + \angle B = 80°$. Но тогда $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 100°$. Аналогично $\angle B + \angle C = 120°$, $\angle C + \angle A = 160°$, поэтому $\angle A = 60°$, $\angle B = 20°$.

Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей. Касательная и секущая к окружности, их свойства

Прямая называется *касательной* к окружности, если она имеет с ней ровно одну общую точку (это точка касания). Прямая, пересекающая окружность в двух точках, называется *секущей*. Прямая, проходящая через точку на окружности, является касательной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку.

Задача 3. Прямая касается окружности в точке K. На прямой выбрана точка A так, что $AK = 3$. Известно, что $AL = 5$, где KL — диаметр окружности. Найдите расстояние от точки A до центра окружности.

Р е ш е н и е: Из прямоугольного треугольника AKL (отрезок LK — диаметр, а потому проходит через центр O окружности, поэтому $LK \perp AK$) находим $LK = \sqrt{25-9} = 4$. Тогда $OK = \frac{1}{2} LK = 2$. Теперь из прямоугольного треугольника OKA получаем: $AO = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Это — искомое расстояние.

Если из точки A проведены касательные AK и AL к одной окружности и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, то выполняются равенства:

а) $AK = AL$;

б) $AK^2 = AB \cdot AC$.

Задача 4. Окружность, диаметром которой является катет AB прямоугольного треугольника, пересекает его гипотенузу AC в точке P. Найдите радиус окружности, если $AP = 5$, $CP = 4$.

Р е ш е н и е: Прямая CB перпендикулярна диаметру AB окружности, поэтому является касательной. Значит, $CB^2 = CA \cdot CP = (4 + 5) \cdot 4 = 36$. Следовательно, $CB = 6$. Из прямоугольного треугольника ABC находим $AB = \sqrt{81-36} = 3\sqrt{5}$. Радиус окружности равен $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Две окружности называются ***касающимися***, если они имеют одну общую точку (точка касания). Если одна из окружностей при этом лежит внутри другой, то такое касание называется ***внутренним***, если нет — ***внешним***. Точка касания окружностей лежит на линии центров, т. е. на прямой, проходящей через центры этих окружностей. Для того чтобы окружности касались внешним образом, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между их центрами равнялось сумме радиусов окружностей, для внутреннего касания — разности радиусов (из большего вычитается меньший радиус).

Задача 5. Три окружности одинакового радиуса R попарно касаются друг друга, т. е. расположены так, что каждая касается двух других. Найдите периметр треугольника, образованного точками касания этих окружностей.

Р е ш е н и е: Как следует из теоремы, каждая сторона треугольника с вершинами в центрах этих окружностей имеет длину $2R$, а точки касания являются серединами сторон такого треугольника. Значит, стороны искомого треугольника — средние линии треугольника со сторонами $2R$, и их длина равна R. Периметр треугольника равен $3R$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Найдите радиус окружности, в которую можно вписать прямоугольник со сторонами длины 10 и 24.

2. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности радиуса 3 в точке K. Найдите расстояние от точки A до ближайшей к ней точки окружности, если $AK = 4$.

3. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон квадрата со стороной 4, делят его на четыре равных квадратика. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в два квадратика, не имеющих общей стороны.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

4. Две окружности одинакового радиуса пересекаются в точках A и B. Касательные к первой окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются в точке C, лежащей на второй окружности. Найдите угол ACB.

5. Две окружности радиусов 2 и 3 касаются внешним образом. Общие внешние касательные к окружностям пересекаются в точке A. Найдите расстояние от точки A до центров окружностей и длины касательных, проведённых из точки A к этим окружностям.

Решения и ответы

1. 13. *Решение.* Диагональ прямоугольника — диаметр окружности. Диагональ вычислим по теореме Пифагора: $d^2 = 10^2 + 24^2 = 676 = 26^2$, откуда $d = 2R = 26$. **2.** 2. *Решение.* Пусть O — центр окружности. Тогда по свойству касательной $\angle OKA = 90°$, поэтому $OA^2 = OK^2 + AK^2 = 9 + 16 = 25$, откуда $OA = 5$. Ближайшая к A точка окружности — это точка P пересечения отрезка OA с окружностью. Значит, искомое расстояние: $AP = AO - OP = 5 - 3 = 2$. **3.** $2\sqrt{2}$. *Решение.* Полученные четыре квадратика имеют стороны длиной 2. Центры рассматриваемых окружностей являются центрами двух противолежащих квадратиков, поэтому расстояние между ними равно удвоенной сумме половин диагоналей этих квадратиков, т. е. равно диагонали квадратика. **4.** 60°. *Решение.* Если O_1 и O_2 — центры окружностей, то $\angle AO_1B = \angle AO_2B$. С другой стороны, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AO_2B$ (первый угол — вписанный, второй — центральный).

Итак, если α — искомый угол, то $\angle AO_1B = 2\alpha$. В четырёхугольнике O_1BCA два угла — прямые (O_1A и O_1B — радиусы, проведённые в точки касания), значит, $\angle ACB + \angle AO_1B = 180°$, т. е. $3\alpha = 180°$. ***Комментарий.*** Более простое решение получится, если воспользоваться теоремой об измерении угла с вершиной вне окружности (он равен полуразности градусной меры дуг, высекаемых сторонами угла на окружности). **5.** 10 и 15, $4\sqrt{6}$ и $6\sqrt{6}$. ***Решение.*** Пусть O_2 и O_3 — центры окружностей радиуса 2 и 3 соответственно. Тогда условие внешнего касания окружностей означает, что $O_2O_3 = 2 + 3 = 5$. Пусть одна из общих касательных касается окружностей соответственно в точках K_2 и K_3. Положим: $AO_2 = x$. Тогда из подобия прямоугольных треугольников AO_2K_2 и AO_3K_3 (радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной) получаем: $AO_2 : AO_3 = O_2K_2 : O_3K_3$, т. е. $x : (x + 5) = 2 : 3$, откуда $x = 10$. Отрезки AK_2 и AK_3 вычисляются по теореме Пифагора: $AK_2^2 = AO_2^2 - O_2K_2^2 = 100 - 4 = 96$, откуда $AK = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$. Два других отрезка, AO_3 и AK_3, находятся из подобия треугольников AO_2K_2 и AO_3K_3, а именно $AK_3 = 6\sqrt{6}$, $AO_3 = 15$.

§ 10. Измерение геометрических величин

Теоретические сведения

Площади плоских фигур. Площадь прямоугольника. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции (основные формулы)

Этот раздел посвящён одному из ключевых понятий планиметрии — площади плоской фигуры. Основные формулы: площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон; площадь параллелограмма равна произведению длины его стороны на расстояние от этой стороны до параллельной ей стороны (высоты параллелограмма); площадь трапеции равна произведению её высоты на полусумму оснований; площадь треугольника равна половине произведения его высоты на длину стороны, к которой эта высота проведена.

Задача 1. На стороне AB треугольника ABC взята точка K так, что $AK : KB = 2 : 1$. Через точку K проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Одна из них пересекла сторону BC в точке L, вторая пересекла сторону AC в точке N. Найдите площадь четырёхугольника $KLCN$, если площадь треугольника ABC равна 36.

Четырёхугольник $KLCN$ — параллелограмм, из подобия треугольников KBL и ABC находим, что $KL : AC = BK : BA = 1 : 3$, т. е. $KL = \frac{1}{3}AC$. Кроме того, если h — длина высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B, то высота треугольника KBL равна $\frac{h}{3}$, и тогда высота параллелограмма $KLCN$, проведённая к основанию CN, равна $h - \frac{h}{3} = \frac{2h}{3}$. Значит, площадь параллелограмма равна $\frac{1}{3}AC \cdot \frac{2h}{3} = \frac{2}{9}AC \cdot h = \frac{4}{9} \cdot 36 = 16$, так как по условию $\frac{1}{2}AC \cdot h = 36$.

Другое решение задачи получается из свойства подобных фигур: отношение их площадей равно квадрату отношения их коэффициента подобия. Для треугольников это свойство сразу следует из того, что в подобных треугольниках отношение оснований, а также отношение проведённых к ним высот равно коэффициенту подобия. Отсюда получаем, что площадь треугольника BKL составляет $\frac{1}{9}$ площади треугольника ABC, т. е. равна 4, а площадь треугольника AKN составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC, т. е. равна 16. Тогда площадь параллелограмма есть $36 - 4 - 16 = 16$.

Задача 2. Высота трапеции с основаниями длины 3 и 5 равна 4. Определите площади частей трапеции, на которые она разбивается средней линией.

Длина средней линии равна полусумме длин оснований, т. е. 4. Кроме того, средняя линия делит трапецию на две трапеции (она параллельна основаниям) и делит высоту трапеции пополам. Значит, части, о которых идёт речь, — это трапеция с основаниями 3 и 4 и высотой 2, а также с основаниями 4 и 5 и высотой 2. По формуле площади трапеции получаем ответ: $S_1 = \frac{3+4}{2} \cdot 2 = 7$, $S_2 = \frac{4+5}{2} \cdot 2 = 9$.

Задача 3. В треугольнике ABC медиана AM и биссектриса BL перпендикулярны. Определите площади частей, на которые треугольник разбивается этими медианой и биссектрисой, если его площадь равна S.

Замечание: приведённая задача является сложной, но в ней содержатся сразу несколько полезных идей.

Пусть H — точка пересечения медианы AM и биссектрисы BL. Тогда BH — одновременно биссектриса и высота треугольника ABM. Значит, он — равнобедренный, поэтому треугольники ABH и MBH равны, а значит, равновелики (равновеликими называются фигуры, имеющие равные площади). Заметим, что медиана треугольника всегда делит его площадь пополам (действительно, например, у треугольников BAM и CAM общая высота, проведённая из вершины A, а длины оснований равны ($BM = CM$). Значит, если площадь треугольника ABC равна S, то площадь треугольника ABM равна $\frac{S}{2}$, а площади треугольников ABH и MBH равны $\frac{S}{4}$. Теперь воспользуемся свойством биссектрисы треугольника, которое гласит, что биссектриса делит основание треугольника в отношении, равном отношению боковых сторон. Поэтому $AL : CL = AB : BC = 1 : 2$, так как $AB = BM = MC$. Но тогда отношение площадей треугольников ABL и CBL также равно $1 : 2$ (у них общая высота). Значит, площадь треугольника ABL равна $\frac{S}{3}$. Поэтому площадь треугольника AHL есть $\frac{S}{3} - \frac{S}{4} = \frac{S}{12}$. Наконец, площадь четырёхугольника $HLCM$ равна $\frac{2S}{3} - \frac{S}{4} = \frac{5S}{12}$.

Формулы, выражающие площадь треугольника: через две стороны и угол между ними; через периметр и радиус вписанной окружности; формула Герона

Справедливы следующие формулы площади треугольника: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$, где a и b — длины двух сторон треугольника, γ — угол, заключённый между этими сторонами; $S = p \cdot r$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в этот треугольник окружности; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр (формула Герона).

Задача 4. Определите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами длины 13, 14, 15.

Полупериметр треугольника равен 21, поэтому по формуле Герона, его площадь равна $S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{3\cdot7\cdot8\cdot7\cdot6}=$ $=3\cdot7\cdot4=84$. Значит, $84=p\cdot r=21\cdot r$, откуда $r=4$.

Задача 5. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, имеет длину 1 и образует с гипотенузой угол 60°. Найдите площадь этого треугольника.

Медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы, значит, она разбила исходный треугольник на два равнобедренных с боковыми сторонами длины 1, у одного из которых угол при вершине равен 60°, у другого — 120°. Площадь первого треугольника найдём по первой формуле раздела: $S=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Второй треугольник имеет такую же площадь (можно использовать ту же формулу и для второго треугольника). Итак, искомая площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Площадь круга

Площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi r^2$, где r — радиус окружности, π — константа, равная отношению длины окружности к её диаметру. Её значение приближенно равно 3,14 (π = 3,1415...).

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. В треугольнике ABC известны длины двух сторон: $AB=6$, $BC=8$, а длина высоты, проведённой к стороне BC, равна $3\sqrt{3}$. Найдите длину высоты, проведённой к стороне AB.

2. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой длина меньшей боковой стороны равна 4, а длина средней линии равна 15.

3. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении эта прямая делит высоту треугольника?

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

4. В остроугольном треугольнике ABC известны длины двух сторон: $AB = 6$, $BC = 8$, а длина высоты, проведённой к стороне BC, равна $3\sqrt{3}$. Найдите длину высоты, проведённой к стороне AC.

5. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит его на два треугольника площади 12 и 27. Определите длину этой высоты и длину гипотенузы треугольника.

Решения и ответы

1. $4\sqrt{3}$. *Решение.* Из формулы площади треугольника получаем: $2S = h_1 \cdot BC = h_2 \cdot AB$, где h_1 и h_2 — соответственно длины высот, проведённых к сторонам BC и AB, откуда $h_2 = h_1 \cdot \frac{BC}{AB}$, т. е. $h_2 = 3\sqrt{3} \cdot \frac{8}{6} = 4\sqrt{3}$.

2. 60. *Решение.* В прямоугольной трапеции меньшую длину имеет боковая сторона, перпендикулярная её основанию. Значит, высота трапеции равна 4. Средняя линия трапеции по длине равна полусумме длин её оснований, значит, полусумма длин оснований равна 15. В то же время площадь трапеции равна произведению её высоты на полусумму оснований, т. е. $S = 4 \cdot 15 = 60$. **3.** $(\sqrt{2}+1):1$. *Решение.* Из условия следует, что прямая отсекает от данного треугольника ABC подобный ему треугольник MBN ($MN \parallel AC$), площадь которого равна половине площади треугольника ABC. Но в подобных треугольниках отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия, откуда $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отношение высот подобных треугольников равно коэффициенту их подобия. Значит, отношение высот треугольников MBN и ABC равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому прямая делит высоту на части, отношение которых равно $\frac{1}{\sqrt{2}} : (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 : (\sqrt{2} - 1) =$ $= (\sqrt{2}+1) : \left((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\right) = (\sqrt{2}+1):1$. **4.** $\frac{12\sqrt{39}}{13}$. *Решение.* Пусть AH — высота треугольника ABC, проведённая к стороне BC. Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора получаем: $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 36 - 27 = 9$, т. е. $BH = 3$ — катет треугольника, вдвое меньший гипотенузы AB. Поэтому $\angle BAH = 30°$, тогда $\angle ABH = 60°$, и по теореме косинусов из треугольника ABC получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2 -$ $-2 \cdot AB \cdot BC \cos 60° = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 52$, т. е. $AC = \sqrt{52}$. Теперь, повторив рассуждения, приведённые в решении задачи 1, получаем: $h_3 = h_1 \cdot \frac{BC}{AC} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{52}} = \frac{12\sqrt{39}}{13}$. **5.** 6 и 13. *Решение.* Пусть CH — высота данного треугольника ABC, и треугольники ACH и BCH имеют соответственно площади 12 и 27. Тогда $\frac{1}{2}CH \cdot AH = 12$ и $\frac{1}{2}CH \cdot BH = 27$. Перемножив эти равенства, получаем: $\left(\frac{1}{2}CH \cdot AH\right) \cdot \left(\frac{1}{2}CH \cdot BH\right) = 12 \cdot 27 = 4 \cdot 81$, откуда $CH^2 \cdot (AH \cdot BH) = 16 \cdot 81$. По свойству высоты прямоугольного треугольника $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$, следовательно, $CH^4 = 16 \cdot 81$, т. е. $CH = 2 \cdot 3 = 6$. Теперь из равенства $\frac{1}{2}CH \cdot AH = 12$ находим $AH = 4$, из равенства $\frac{1}{2}CH \cdot BH = 27$ находим $BH = 9$. Наконец, гипотенуза $AB = AH + HB = 4 + 9 = 13$.

§ 11. Координаты и векторы

11.1. Координаты

Теоретические сведения

Уравнение прямой

Линейное уравнение $y = kx + b$ задаёт на координатной плоскости Oxy (Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат) прямую. Эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс угол, тангенс которого равен k ($\operatorname{tg} \alpha = k$). В случае $k = 0$ эта прямая горизонтальна. При любом k прямая пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; b)$. Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ в случае $k_1 \neq k_2$ пересекаются, в случае $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$ параллельны, наконец, в случае $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ совпадают. Вертикальная прямая задаётся уравнением $x = c$.

Прямая однозначно строится по двум точкам.

Задача 1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A\,(2; -3)$ и $B\,(5; 3)$.

Решение: Пусть уравнение искомой прямой $y = kx + b$. Подставив в него координаты точек A и B, получаем систему линейных уравнений:

$\begin{cases} -3 = 2k + b, \\ 3 = 5k + b, \end{cases}$ решив которую, получаем $k = 2$, $b = -7$. Прямая имеет уравнение $y = 2x - 7$.

Задача 2. Напишите уравнение горизонтальной прямой, проходящей через точку $A\,(2; -3)$.

Решение: Прямая имеет уравнение $y = b$, т. е. $y = -3$, так как ордината точки A равна -3.

Задача 3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A\,(2; -3)$ и $B\,(2; 7)$.

Решение: Эта прямая — вертикальная (абсциссы двух точек прямой совпадают), она задаётся уравнением $x = c$. В нашем примере $c = 2$, поэтому прямая AB имеет уравнение $x = 2$.

Задача 4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A\,(2; -3)$ и параллельной прямой $y = -4x + 2$.

Решение: В силу параллельности эта прямая задаётся уравнением $y = -4x + b$. Подставив в это уравнение координаты точки A, получаем $-3 = -4 \cdot 2 + b$, откуда $b = 5$, а искомая прямая имеет уравнение $y = -4x + 5$.

Координаты середины отрезка

Середина отрезка, концы которого имеют координаты $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2; y_2)$, имеет координаты $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Задача 5. Напишите уравнение прямых, проходящих через точку $C(3;\ 2)$ и равноудалённых от точек $A(2;\ -3)$ и $B(5;\ 3)$.

Решение: Если точки A и B расположены по одну сторону от искомой прямой a, то $a \parallel AB$. Прямая AB имеет уравнение $y = 2x - 7$ (см. задачу 1), поэтому a имеет уравнение $y = 2x + b$. Подставив в это уравнение координаты точки C, находим $2 = 2 \cdot 3 + b$, откуда $b = -4$. Если же точки A и B расположены по разные стороны от искомой прямой b, то прямая b проходит через середину отрезка AB. Эта середина имеет координаты $M\left(\frac{2+5}{2}; \frac{-3+3}{2}\right)$, т. е. прямая b проходит через точки $M\left(\frac{7}{2};0\right)$ и $C(3;\ 2)$.

Как и в задаче 1, находим её уравнение: $y = -4x + 14$. Итак, искомыми являются прямые $y = 2x - 4$ и $y = -4x + 14$.

Формула расстояния между двумя точками. Уравнение окружности

Расстояние между точками с координатами $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Окружность с центром в точке $O(x_0;\ y_0)$ и радиусом R имеет уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Задача 6. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(3;\ 2)$, проходящей через точку $A(2;\ -3)$.

Решение: Вначале найдём радиус окружности: $R = AC = \sqrt{(2-3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{26}$. Теперь можем написать уравнение окружности: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2$.

Искомое уравнение $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 26$.

Задача 7. Установите взаимное расположение прямых $y = x$, $y = x - 2$ и $y = x + 3$ и окружности $x^2 + y^2 = 2$.

Решение: Центр окружности имеет координаты $O(0;\ 0)$, а первая прямая проходит через точку O. Значит, первая прямая пересекает окружность и содержит её диаметр. Найдём точки пересечения второй прямой и окружности: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x - 2. \end{cases}$ Решив эту систему методом подстановки, получаем единственное решение $x = 1$, $y = -1$. Значит, прямая касается окружности в точке $K(1,\ -1)$. Наконец, система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x + 3 \end{cases}$ не имеет решений, поэтому третья прямая не пересекает окружность (на координатной плоскости она расположена выше окружности).

Задачу можно было решить и графически, изобразив на координатной плоскости эти прямые и окружность.

Задача 8. Напишите уравнения окружностей с центром в точке $A\,(2;\,-3)$ так, чтобы первая окружность касалась прямой $x = 5$, а вторая — прямой $y = x - 7$.

Решение: Первая прямая — вертикальная, и расстояние от точки A до неё есть разность $5 - 2 = 3$. Но это и есть радиус окружности, поэтому первая окружность имеет уравнение $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$. Радиус второй окружности вычислим алгебраически. Уравнение окружности имеет вид: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = R^2$, и она имеет единственную общую точку с прямой $y = x - 7$. Значит, система $\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=R^2,\\ y=x-7\end{cases}$ должна иметь единственное решение. Имеем: $(x-2)^2 + (x-7+3)^2 = R^2$, $2x^2 - 12x + 20 - R^2 = 0$. Отсюда $\frac{D}{4} = 6^2 - 2(20 - R^2) = 2R^2 - 4 = 0$, т. е. $R = \sqrt{2}$. (Отметим, что уравнение $R^2 = 2$ имеет также решение $R = -\sqrt{2}$, но оно — постороннее, так радиус R не может принимать отрицательных значений.) Итак, вторая окружность имеет уравнение $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -4x + 5$ и проходящей через середину отрезка с концами $A\,(2;\,-3)$ и $B\,(6;\,-1)$.

2. Напишите уравнение вертикальной прямой, удалённой от точки $A\,(2;\,-3)$ на расстояние 5. Сколько ответов имеет задача?

3. Напишите уравнение окружности с центром $O\,(2;\,5)$, проходящей через центр окружности $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 11$.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

4. При каких значениях параметра a система $\begin{cases}x+2y=1,\\ 3x-y=17,\\ x-ay=2a^2+5\end{cases}$ имеет решения?

5. Напишите уравнения окружностей, проходящих через точки $A(2; -3)$ и $B(10; -3)$, радиус которых равен 5.

Решения и ответы

1. $y = -4x + 14$. *Решение.* Середина M отрезка AB имеет координаты $M\left(\frac{2+6}{2}; \frac{-3-1}{2}\right)$. Искомая прямая имеет уравнение $y = -4x + d$; подставляя в это уравнение координаты точки $M(4; -2)$, получаем: $-2 = -4 \cdot 4 + d$, откуда $d = 14$. **2.** Две прямые $x = -3$ и $x = 7$. *Решение.* Вертикальная прямая задаётся уравнением $x = a$, а расстояние от точки $P(x_0; y_0)$ до прямой $x = a$ вычисляется по формуле $r = |x_0 - a|$. **3.** $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 13$. *Решение.* Выделив полные квадраты, получаем, что вторая окружность имеет уравнение: $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 11 + 1 + 9 = 21$, т. е. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 21$. Её центр имеет координаты $O(-1; 3)$. Искомая окружность имеет уравнение $(x-2)^2 + (y-5)^2 = R^2$. Подставив в это уравнение координаты точки O, найдём радиус окружности: $(-1-2)^2 + (3-5)^2 = R^2$, откуда $R^2 = 13$. **4.** $a = 0$ и $a = 2$. *Решение.* Уравнения системы являются уравнениями прямых на координатной плоскости. Найдём точку пересечения первых двух из них. Выразив из первого уравнения x и подставив во второе, получаем: $3(1 - 2y) - y = 17$, откуда $y = -2$. Тогда $x = 5$. Итак, система имеет решения, если прямая $x - ay = a^2 + 5$ проходит через точку $P(5; -2)$, т. е. выполняется равенство $5 - a \cdot (-2) = a^2 + 5$, верное при $a = 0$ и $a = 2$. **5.** $(x-6)^2 + y^2 = 25$ и $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 25$. *Решение.* Центр каждой из окружностей лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, параллельному оси Ox, поэтому он лежит на прямой, параллельной оси Oy и проходящей через середину M отрезка AB. Точка M имеет координаты $M(6; -3)$, поэтому центр C окружности лежит на прямой $x = 6$, т. е. точка C имеет координаты $C(6; y_0)$. Тогда $5 = R = AC = \sqrt{(6-2)^2 + (y_0 - (-3))^2}$, откуда $(y_0 + 3)^2 = 9$, т. е. $y_0 = 0$ или $y_0 = -6$. Условию удовлетворяют две окружности: $(x-6)^2 + y^2 = 25$ и $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 25$.

11.2. Векторы

Теоретические сведения

Длина вектора. Координаты вектора

Пусть задана упорядоченная пара точек на плоскости: A и B. Они задают направленный отрезок AB, у которого точка A — начало, точка B — конец. Этот направленный отрезок называется вектором и обозначается $\overrightarrow{AB}$. Длина отрезка AB называется длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается модулем: $|\overrightarrow{AB}|$. Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых, имеют одинаковую длину и сонаправлены. Напомним, что два параллельных луча называются сонаправленными, если они расположены в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начала. В случае, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм. Обозначение: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Если два вектора равны третьему, то они равны между собой. Множество равных между собой векторов также называют вектором (или свободным вектором) и, как правило, обозначают $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{u}, \dots$, не указывая его начало и конец, т. е. подчёркивая то обстоятельство, что вектор может начинаться (заканчиваться) в любой точке плоскости. Если начало вектора совпадает с его концом, то такой вектор называется *нулевым* (обозначается $\vec{0}$).

Пусть $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ — координаты начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ называется пара чисел: $\overrightarrow{AB}=\{a; b\}$, где $a=x_2-x_1$, $b=y_2-y_1$. Равные векторы имеют равные координаты. Длина вектора вычисляется по той же формуле, что и длина отрезка, т. е. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, или $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 1. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(2; -3)$ и $B(5; 3)$ — координаты его начала и конца.

Решение: По формуле получаем: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(5-2)^2+(3-(-3))^2} = 3\sqrt{5}$.

Задача 2. Найдите координаты точки D, если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, где $A(2; -3)$, $B(5; 3)$, $C(3; 2)$ — координаты остальных точек.

Решение: Найдём вначале координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, а именно: $\overrightarrow{AB}=\{5-2; 3-(-3)\}=\{3; 6\}$. Из равенства $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ следует, что если точка D имеет координаты $D(x; y)$, то $\overrightarrow{CD}=\{x-3, y-2\}=\{3,6\}$. Отсюда $x=6$, $y=8$, координаты точки D есть $D(6; 8)$.

Умножение вектора на число, сумма векторов. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой. Вектор $\vec{b}$ получен из вектора $\vec{a}$ умножением на число k, что обозначается равенством $\vec{b}=k\vec{a}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (обозначение $\vec{a} \parallel \vec{b}$), $\left|\vec{b}\right| = |k| \cdot \left|\vec{a}\right|$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $k<0$, и противоположно направлены, если $k<0$. Обратно, для любых двух коллинеарных векторов $\vec{b}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, найдётся, притом единственная, константа k такая, что $\vec{b}=k\vec{a}$. При умножении вектора на число получается вектор, координаты которого получены из координат начального вектора умножением на это число.

Задача 3. Даны точки $A(2; -3)$ и $B(5; 3)$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}=-3\overrightarrow{AB}$. Найдите координаты точки C.

Р е ш е н и е: Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{3; 6\}$, поэтому $\overrightarrow{AC} = \{2\cdot 3; 2\cdot 6\} = \{6;12\}$, $\vec{c} = \{(-3)\cdot 3; (-3)\cdot 6\} = \{-9;-18\}$. Точка C имеет координаты $C\,(2+6; -3+12)$, т. е. C (8; 9).

Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, обозначение: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Суммой произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, если точки A, B и C выбраны так, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. При сложении векторов их координаты складываются.

Задача 4. Даны векторы $\vec{a} = \{-2;4\}$ и $\vec{b} = \{3;-1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Р е ш е н и е: Имеем: $\vec{c} = 3\{-2;4\} + 2\{3;-1\} = \{-6;12\} + \{6;-2\} = \{0;10\}$.

Разложением вектора $\vec{u}$ по двум ненулевым векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется его представление в виде суммы двух векторов, коллинеарных векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представление $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где α и β — некоторые числа. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то любой вектор раскладывается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, притом единственным образом. Другими словами, для любого вектора $\vec{u}$ можно найти, притом единственную, пару чисел α и β такую, что $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Задача 5. Найдите разложение вектора $\vec{u} = \{-13; 11\}$ по векторам $\vec{a} = \{-2; 4\}$ и $\vec{b} = \{3; -1\}$.

Р е ш е н и е: Во-первых, заметим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, так как их координаты не являются пропорциональными: $(-2) : 3 \neq 4 : (-1)$, поэтому искомое разложение можно найти. Подставляя в равенство $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ координаты векторов, получаем: $\{-13;\ 11\} = \alpha\{-2;\ 4\} + \beta\,\{3;\ -1\} = \{-2\alpha + 3\beta;\ 4\alpha - \beta\}$, откуда $-2\alpha + 3\beta = -13$, $4\alpha - \beta = 11$. Решив полученную систему уравнений, находим: $\alpha = 2$, $\beta = -3$. Значит, $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ — искомое разложение.

Скалярное произведение векторов

Углом между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол $\alpha = \angle AKB$, где точки A, K, B выбраны так, что $\overrightarrow{KA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KB} = \vec{b}$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между этими векторами: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Если известны координаты векторов в декартовой системе координат: $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$.

Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ равен нулю, то их скалярное произведение полагают равным нулю.

Задача 6. Найдите угол между векторами $\vec{a} = \{-2; 4\}$ и $\vec{b} = \{3; -1\}$.

Решение: По формуле скалярное произведение равно
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -10.$$
С другой стороны, $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.
Поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = \sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha = 10\sqrt{2}\cos\alpha$.
Отсюда $\cos\alpha = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, искомый угол $\alpha = 135°$.

Задача 7. Даны точки A (2; –3) и B (5; 3). Найдите координаты такой точки C на прямой $y = 3x + 2$, что $\angle ABC = 90°$.

Решение: Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{AB} = \{3; 6\}$ и $\overrightarrow{BC}$ перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю. Если $C(x;\ y)$ — координаты искомой точки, то $\overrightarrow{BC} = \{x - 5, y - 3\}$, поэтому $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot (x - 5) + 6 \cdot (y - 3) = 3x + 6y - 33 = 0$, т. е. $x + 2y - 11 = 0$. Подставляя это в уравнение $y = 3x + 2$, получаем: $x = 1, y = 5$.

Тренировочные задания

ЗАДАНИЯ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1. Даны точки A (12; –1) и B (4; 5). Найдите координаты вектора $\vec{a}$ длины 5, сонаправленного вектору $\overrightarrow{AB}$.

2. Даны неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите разложение вектора $\vec{u} + \vec{v}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{v} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$.

3. Определите угол, который образует вектор $\vec{a} = \{-1; \sqrt{3}\}$ с положительным направлением оси Ox.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ

4. Даны точки A (2; –1), B (10; 9) и C (7; 3). Найдите длину отрезка AD, где точка D делит отрезок BC в отношении 2 : 1, считая от вершины B.

5. Дан треугольник ABC с вершинами A (2; –1), B (10; 6), C (7; 3). Найдите координаты точки H, где AH — высота треугольника ABC.

Решения и ответы

1. $\vec{a}=\{-4;3\}$. *Решение.* Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\overrightarrow{AB}=\{4-12;5-(-1)\}=\{-8;6\}$. Его длина равна 10: $\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$. Значит, $\vec{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\{-4;3\}$. **2.** $\vec{u}+\vec{v}=5\vec{a}+\vec{b}$ *Решение.* При сложении векторов коэффициенты их разложений по векторам складываются. Поэтому $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{a}+4\vec{b}=5\vec{a}+\vec{b}$. **3.** $120°$. *Решение.* Искомый угол равен углу, образуемому вектором $\vec{a}$ с вектором $\vec{b}=\{1;0\}$, сонаправленным положительному направлению оси Ox. По формуле скалярное произведение равно $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 0=-1$. С другой стороны, $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$, $|\vec{b}|=1$. Поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha=2\cdot 1\cdot\cos\alpha=$ $=2\cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha=\frac{-1}{2}$, значит, искомый угол $\alpha=120°$. **4.** $6\sqrt{2}$. *Решение.* Из условия следует, что $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\{7-10;3-9\}=\{-2;-4\}$, поэтому $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\{10-2;9-(-1)\}+\{-2;-4\}=\{6;6\}$. Длина вектора $\overrightarrow{AD}$ и есть искомая длина отрезка AD: $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$. **5.** $H\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$. *Решение.* Подставив координаты точек B и C в уравнение $y=kx+b$ прямой BC, получаем: $6=10k+b$ и $3=7k+b$, откуда $k=1$, $b=-4$. Значит, прямая BC имеет уравнение $y=x-4$, следовательно, точка H имеет координаты $H(x;x-4)$, поэтому $\overrightarrow{AH}=\{x-2;x-4-(-1)\}=\{x-2;x-3\}$. По условию векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BC}=\{7-10;3-6\}=\{-3;-3\}$ перпендикулярны, значит, их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=-3\cdot(x-2)-3\cdot(x-3)=-6x+15=0$, откуда $x=\frac{5}{2}$. Значит, точка H имеет координаты $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}-4\right)$.

§ 12. Проверочные работы для самостоятельного решения

Работа № 1. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ[1]

1. Укажите наибольшее из данных чисел: $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{14}$; 0,6; 0,58.

1) $\frac{5}{8}$	2) $\frac{3}{14}$	3) 0,6	4) 0,58

2. Значение какой суммы меньше 1?

1) $0{,}503 + \frac{1}{2}$	2) $0{,}37 + \frac{3}{4}$	3) $0{,}495 + 0{,}49$	4) $0{,}627 + 0{,}4$

3. Известно, что a — число чётное, b — число нечётное. Какое из следующих чисел является чётным?

1) $a + b + 2$	2) $ab + 1$	3) $(a + 1)(b + 1)$	4) $(a + 1)b$

4. Соотнесите дроби, которые выражают доли некоторой величины, и соответствующие им проценты.

А) $\frac{1}{2}$	Б) $\frac{2}{5}$	В) 0,9	Г) 0,09
1) 9%	2) 90%	3) 50%	4) 40%

Ответ:

А	Б	В	Г

5. Полиграфическая фирма «Лого» выполняет нанесение разноцветных надписей и рисунков на полиэтиленовые пакеты. В таблице приведены расценки на работы в зависимости от величины заказа. При печати на двух сторонах пакета цена увеличивается на 20%.

Количество цветов	**Цена в рублях за печать на 1 пакете (в зависимости от величины заказа)**			
	Менее 300	**От 301 до 500**	**От 501 до 1000**	**От 1001 до 2000**
Один цвет	0,45 р.	0,40 р.	0,35 р.	0,30 р.
Два цвета	0,55 р.	0,50 р.	0,45 р.	0,40 р.

[1] Данный материал проверяется только на базовом уровне.

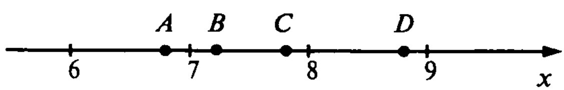
Сколько придётся заплатить за заказ, если число пакетов равно 800, рисунок двухцветный на двух сторонах пакета?

Ответ: ________________ .

6. Тест по математике содержит 30 заданий, из которых 18 заданий по алгебре, остальные — по геометрии. Какое из утверждений **неверно**?

1) Алгебраические и геометрические задания содержатся в тесте в отношении 3:2.
2) Алгебраических заданий в тесте в 1,5 раза больше, чем геометрических.
3) Геометрические задания составляют $\frac{2}{3}$ всех заданий теста.
4) Алгебраические задания составляют $\frac{3}{5}$ всех заданий теста.

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{52}$. Какая это точка?



1) Точка A 2) Точка B 3) Точка C 4) Точка D

8. Вычислите: $\sqrt{0,16+0,09}$.

Ответ: ________________ .

9. Какое из чисел $\sqrt{14400}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{1\frac{1}{9}}$ является иррациональным?

1) $\sqrt{14400}$ 2) $\sqrt{0,04}$ 3) $\sqrt{1\frac{1}{9}}$ 4) Ни одно из этих чисел здесь

10. Вычислите: $1+(-4)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

Ответ: ________________ .

11. Население Франции составляет $6,1\cdot10^7$ человек. Сколько миллионов человек проживает во Франции?

1) 6,1 млн 2) 61 млн 3) 610 млн 4) 0,61 млн

12. В каком случае число 0,000972 записано в стандартном виде?

1) $9{,}7 \cdot 10^{-6}$ 2) $9{,}7 \cdot 10^{-5}$ 3) $9{,}7 \cdot 10^{-4}$ 4) $9{,}7 \cdot 10^{-3}$

Ответы: **1.** 1. **2.** 3. **3.** 3. **4.** А3, Б4, В2, Г1. **5.** 432 р. **6.** 3. **7.** 2. **8.** 0,5. **9.** 3. **10.** –1. **11.** 2. **12.** 3.

Работа № 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Из формулы $v = v_0 + at$ выразите переменную t.

1) $t = a(v - v_0)$ 2) $t = \frac{v_0 - v}{a}$ 3) $t = \frac{v - v_0}{a}$ 4) $t = \frac{a}{v - v_0}$

2. Найдите значение выражения $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ при $x = -1$.

Ответ: ________________ .

3. Период колебания математического маятника (в секундах) приближённо можно вычислить по формуле $T = 2\sqrt{l}$, где l — длина нити (в метрах). На сколько примерно секунд период колебания маятника при длине нити 9 м больше, чем при длине нити 1 м?

Ответ: ________________ .

4. За 3 ч велосипедист проехал a км. Скорость пешехода в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Какое расстояние пройдёт пешеход за 2 ч?

1) $\frac{2a}{9}$ км 2) $\frac{9}{2a}$ км 3) $\frac{2}{a}$ км 4) $\frac{a}{3}$ км

5. Для каждого выражения из верхней строки укажите равное ему из нижней.

А) $(a^{-2}a^3)^2$ Б) $\left(\frac{a^8}{a^4}\right)^3$ В) $(a^2)^{-3} \cdot a$

1) a^{-6} 2) a^2 3) a^{-5} 4) a^{12}

Ответ:

А	Б	В

6. Вычислите значение выражения $\sqrt{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{15}$.

Ответ: ________________.

7. Упростите выражение $(b-2)^2 - 2b(5b-2)$.

1) $-9b^2+4$ 2) $-9b^2+8b+4$ 3) $-9b^2-8b+4$ 4) $-9b^2-6b+4$

8. В какое из выражений нельзя преобразовать произведение $(x-1)(2-x)$?

1) $-(x-1)(x-2)$
2) $(x-1)(x-2)$
3) $(1-x)(x-2)$
4) $-(1-x)(2-x)$

9. Разложите на множители квадратный трёхчлен $4x^2 - 11x + 6$.

Ответ: ________________.

10. Сократите дробь $\frac{z^2+3z}{z^2-9}$.

Ответ: ________________.

Упростите выражение (№ 11—13):

11. $\frac{12y^2}{1-4y} + 3y$.

Ответ: ________________.

12. $\left(\frac{3}{y-4} + \frac{4y-6}{y^2-3y-4} + \frac{2y}{y+1}\right) \cdot \frac{y}{2y-3}$.

Ответ: ________________.

13. $\frac{\sqrt{\sqrt{10}-2} \cdot \sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$.

Ответ: ________________.

14. Разложите на множители $by^2 + 4by - cy^2 - 4cy - 4c + 4b$.

Ответ: ________________.

Ответы: **1.** 3. **2.** $\frac{5}{6}$. **3.** на 4 с. **4.** 1. **5.** А2, Б4, В3. **6.** $\sqrt{5}$. **7.** 1. **8.** 2. **9.** $(x-2)(4x-3)$. **10.** $\frac{z}{z-3}$. **11.** $\frac{3y}{1-4y}$. **12.** $\frac{y}{y-4}$. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** $(b-c)(y+2)^2$.

Работа № 3. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Какое из чисел не является корнем уравнения $x^3-4x^2+x+6=0$?

1) -1 2) 1 3) 2 4) 3

2. Решите уравнение $\frac{x+1}{2}-\frac{5x}{12}=\frac{3}{4}$.

Ответ: ________________ .

3. Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

Уравнение

А) $x^2-9=0$

Б) $\frac{x(x-3)}{x-9}=0$

В) $x^2=-3x$

Множество корней

1) 0 и -3

2) 0, 3, 9

3) 3 и -3

4) 0 и 3

Ответ:

А	Б	В

4. Решите уравнение $3x^2-7x+2=0$.

Ответ: ________________ .

5. Прочитайте задачу:

Скорость первого пешехода на 1 км/ч больше скорости второго, поэтому он прошёл расстояние, равное 5 км, на 15 мин быстрее второго. Определите скорости пешеходов.

Пусть x км/ч — скорость второго пешехода. Какое из следующих уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{5}{x+1}-\frac{5}{x}=\frac{1}{4}$

2) $\frac{5}{x}-\frac{5}{x+1}=\frac{1}{4}$

3) $\frac{5}{x}-\frac{5}{x+1}=15$

4) $5(x+1)-5x=15$

6. Площадь прямоугольника равна 120 см^2, при этом одна из сторон на 14 см больше другой. Чему равны стороны этого прямоугольника?

Ответ: ________________ .

---

7. Решите уравнение $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$.

Ответ: ________________ .

8. Один из корней уравнения $5x^2 - 2x + 3p = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

Ответ: ________________ .

9. Решите уравнение $\dfrac{2-x}{x^2+3x} + \dfrac{6}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3}$.

Ответ: ________________ .

Ответы: **1.** 2. **2.** $x = 3$. **3.** А3, Б4, В1. **4.** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **5.** 2. **6.** 6 см и 20 см. **7.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; -2; 2. **8.** $-\frac{3}{5}$. **9.** 1.

Работа № 4. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

1. Какая из прямых проходит через точки $A(5; 7)$ и $B(-1; -5)$?

1) $2x + y = 17$ 2) $x - 2y = 9$ 3) $2x - y = 3$ 4) $x + 2y = 20$

2. Для каждого уравнения укажите название его графика.

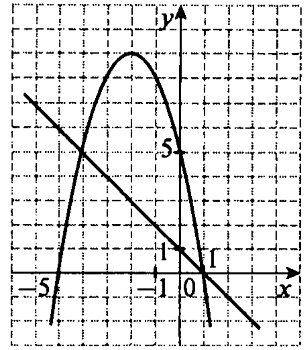
А) $y = 2x^2$ Б) $y = -10x$ В) $x^2+y^2 = 1$ Г) $y = -\frac{15}{x}$

1) прямая 2) парабола 3) гипербола 4) окружность

Ответ:

А	Б	В	Г

3. На координатной плоскости построены графики уравнений $y = 5 - 4x - x^2$ и $x + y = 1$. Используя эти графики, решите систему уравнений $\begin{cases} y = 5 - 4x - x^2, \\ x + y = 1. \end{cases}$



1) (–4; 5), (0; 1)
2) (–4; 5), (1; 0)
3) (5; –4), (0; 1)
4) (5; –4), (1; 0)

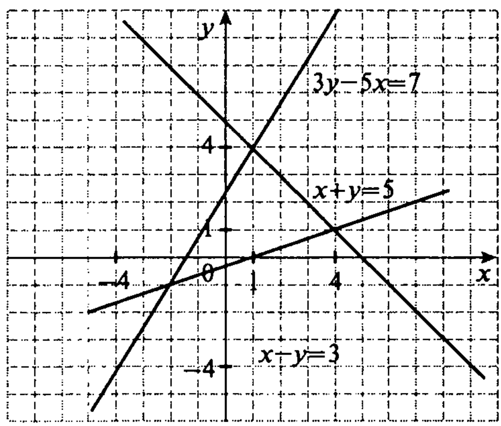
4. Используя рисунок, составьте систему двух уравнений с двумя переменными, решением которой является пара чисел (1; 4).

1) $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ x + y = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 5x = 7, \\ x + y = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y - 5x = 7, \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

4) Такой системы нет



5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = -5, \\ 4x + y = 2. \end{cases}$

Ответ: ________________ .

6. Из данных уравнений подберите второе уравнение системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ \ldots \end{cases}$ так, чтобы она имела два решения. (Используйте графические представления.)

1) $x = 4$ 2) $y = 4$ 3) $y = x$ 4) $y = -2$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y^2 = 6, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Ответ: ________________ .

8. Определите, в какой координатной четверти находится точка пересечения прямых, заданных уравнениями $5x + 4y = 14$ и $3x - 4y = 2$.

1) в I четверти 2) во II четверти 3) в III четверти 4) в IV четверти

9. Прочитайте задачу:

В тесте 25 заданий по алгебре и геометрии. За правильно решённую задачу по алгебре начисляется 2 балла, по геометрии — 3 балла. Максимальный балл, который можно получить за выполнение теста, равен 60. Сколько в тесте заданий по алгебре и сколько по геометрии?

Определите, какая система уравнений соответствует условию задачи, если буквой x обозначено число заданий по алгебре, а буквой y — число заданий по геометрии.

1) $\begin{cases} x + y = 25, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 60 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 25, \\ 2x + 3y = 60 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 25, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 60 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 25, \\ 3x + 2y = 60 \end{cases}$

10. На турбазе 15 палаток — четырёхместные и шестиместные. Всего в них можно разместить 72 человека. Сколько на турбазе четырёхместных палаток?

Ответ: ________________ .

---

11. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 + 2xy = 9. \end{cases}$

Ответ: ________________ .

12. С помощью графиков определите, сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} xy = 4, \\ y + x^2 = 6. \end{cases}$

Ответ: ________________ .

***Ответы*: 1.** 3. **2.** А2, Б1, В4, Г3. **3.** 2. **4.** 2. **5.** (1; −2). **6.** 3. **7.** (3; 0), (1; 2). **8.** 1. *Указание*. Вычислите координаты точки пересечения прямых. **9.** 2. **10.** 9 палаток. **11.** (5; −2), (2; −5). *Решение*. Способ 1. Систему можно решить, выразив из первого уравнения какую-нибудь из переменных и подставив её во второе уравнение. Способ 2. Приведём второе уравнение системы к виду $(x + y)^2 = 9$. Отсюда $x + y = 3$ или $x + y = -3$. Получаем две системы: $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = -3. \end{cases}$ Решением первой системы служит пара чисел $x = 5$, $y = -2$, второй — пара $x = 2$, $y = -5$. **12.** 3 решения. *Указание*. Представьте первое уравнение в виде $y = \frac{4}{x}$, второе — в виде $y = -x^2 + 6$.

Работа № 5. НЕРАВЕНСТВА

1. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $x - z < y$?

1) $z > x - y$ 2) $x < y + z$ 3) $y - x + z < 0$ 4) $x - y - z < 0$

2. О числах p и q известно, что $p > q$. Какое из следующих неравенств **неверно**?

1) $6 + p > 6 + q$ 2) $-\frac{p}{5} < -\frac{q}{5}$ 3) $p - 4 > q - 4$ 4) $\frac{p}{3} < \frac{q}{3}$

3. О числах x, y и z известно, что $x > y > z$. Какое из следующих чисел положительно?

1) $y - x$ 2) $x - z$ 3) $z - y$ 4) $z - x$

4. Известно, что $x < 20$, $y < 10$. Какие из следующих неравенств верны при любых значениях x и y, удовлетворяющих этому условию:

I. $x + y < 30$ II. $x + y < 15$ III. $x + y < 35$?

1) I и II 2) I и III 3) II и III 4) I, II и III

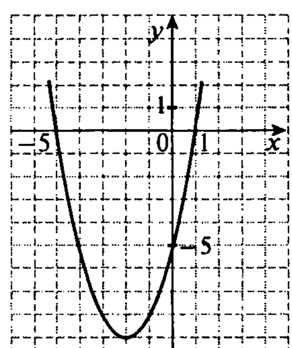
5. Решите неравенство $2x - 3(x + 4) \leqslant x + 12$.

1) $(-\infty; 12]$ 2) $[-12; +\infty)$ 3) $(-\infty; -12]$ 4) $[12; +\infty)$

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ 5 - 3x \geqslant 2x. \end{cases}$

1) $(-1; 1]$ 3) $[1; +\infty)$

2) $(-\infty; -1)$ 4) $[-1; +\infty)$



7. На рисунке изображён график функции $y = x^2 + 4x - 5$. Используя рисунок, решите неравенство $x^2 > 5 - 4x$.

Ответ: ________________ .

8. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 - 3 > 0$ 2) $x^2 - 3 < 0$ 3) $x^2 + 3 < 0$ 4) $x^2 + 3 > 0$

---

9. Решите неравенство $(2 - 3x)(x - 1) < -4$.

Ответ: ________________ .

10. Решите неравенство $\frac{-6}{(3-x)(9+2x)} > 0$.

Ответ: ________________ .

11. Найдите область определения выражения $\frac{\sqrt{10+13x-3x^2}}{x^2-4}$.

Ответ: ________________ .

***Ответы*:** **1.** 3. **2.** 4. **3.** 2. **4.** 2. **5.** 2. **6.** 1. **7.** $x < -5$ или $x > 1$. **8.** 4. **9.** $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$. **10.** $(-\infty; -4{,}5) \cup (3; +\infty)$. *Указание.* Числитель дроби — отрицательное число; значит, значение дроби отрицательно, когда отрицателен знаменатель. **11.** $\left[-\frac{2}{3}; 2\right) \cup \left(2; 5\right]$.

Работа № 6. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

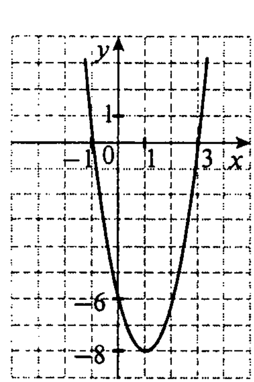
1. Функция задана формулой $y = f(x)$, где $f(x) = 6 + 12x - x^2$. Найдите $f(-\frac{1}{3})$.

Ответ: ________________ .

2. Мотоциклист едет с постоянной скоростью из одного города в другой, расстояние между которыми 300 км. Время движения t является функцией скорости v, с которой едет мотоциклист. Задайте эту функцию формулой.

Ответ: ________________ .

3. На рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Выпишите номера верных утверждений.

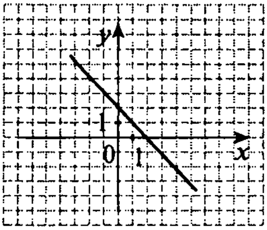


1) $f(0) = -6$
2) $f(-1) < f(3)$
3) Функция возрастает на промежутке $[1; +\infty)$
4) Наименьшее значение функции равно -6
5) При $-1 < x < 3$ значения функции отрицательны

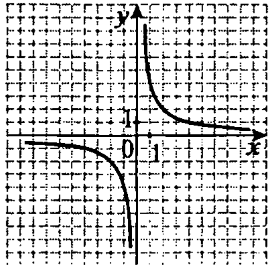
Ответ: ________________ .

4. Каждый график на рисунке соотнесите с соответствующей ему формулой.

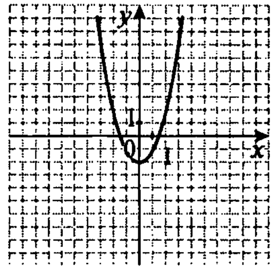
А)



Б)



В)



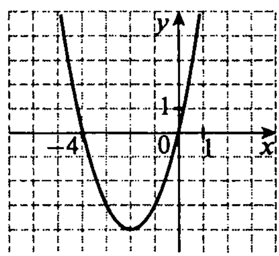
1) $y = x^2 - 2$ 2) $y = -2x$ 3) $y = -x + 2$ 4) $y = \frac{2}{x}$

Ответ:

А	Б	В

5. График какой из перечисленных ниже функций изображён на рисунке?

1) $y = x^2 - 4x$
2) $y = x^2 - 4$
3) $y = x^2 + 4x$
4) $y = x^2 + 4$



6. В какой из указанных точек расположена вершина параболы $y = 3x^2 - 12x + 5$?

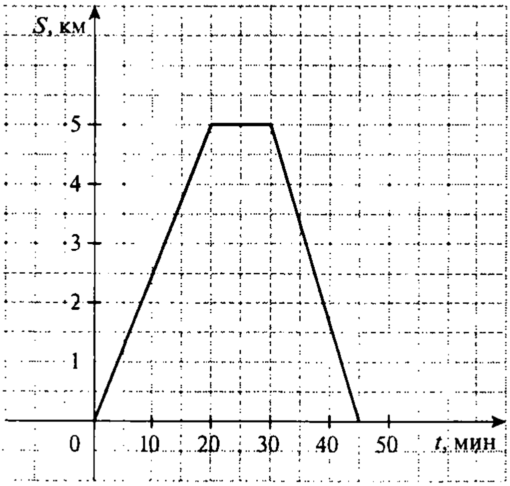
1) (4; 5) 2) (2; −7) 3) (0; 5) 4) (−2; 7)

7. Какая из данных парабол имеет с гиперболой $y = \frac{1}{x}$ три общие точки?

1) $y = -x^2$ 2) $y = x^2 + 100$ 3) $y = x^2 - 1$ 4) $y = x^2 - 100$

8. Велосипедист выехал из дома, доехал до почты и, пробыв там некоторое время, вернулся домой. Дорога от дома до почты идёт по прямолинейному шоссе. На рисунке изображён график движения велосипедиста. (По горизонтальной оси откладывается время, по вертикальной — рас-

стояние от дома, на котором находится велосипедист.) Укажите **неверное** утверждение.

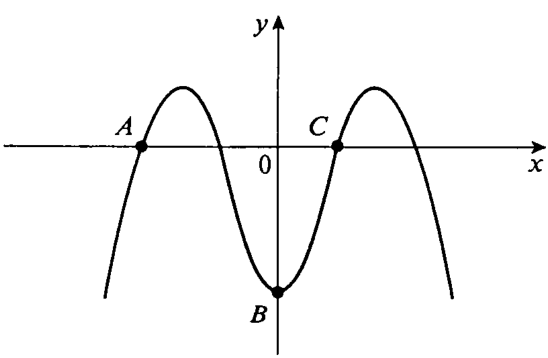


1) Велосипедист пробыл на почте 10 мин
2) От дома до почты велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч
3) Обратный путь занял у велосипедиста на 5 мин больше, чем путь до почты
4) Всего велосипедист проехал 10 км

---

9. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$. Определите, при каких значениях x функция принимает положительные значения.

10. На рисунке изображён график функции $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Найдите координаты точек A, B и C.



Ответы: **1.** $1\frac{8}{9}$. **2.** $t = \frac{300}{v}$. **3.** 1, 3, 5. **4.** А3, Б4, В1. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 3. **9.** При $x < -\sqrt{6}$ и $x > \sqrt{6}$. **10.** $A\,(-1;\,0)$, $B\,(0;\,-1)$, $C\,(\frac{1}{3};\,0)$.

Работа № 7. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

1. Какое из указанных чисел не является членом последовательности $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$?

1) $\frac{1}{17}$ 2) $\frac{1}{16}$ 3) 1 4) $-\frac{1}{2}$

2. Каждой последовательности, заданной формулой n-го члена, поставьте в соответствие верное утверждение.

Последовательность	*Утверждение*
А) $z_n = 5^n$	1) Последовательность — арифметическая прогрессия
Б) $x_n = n^5$	2) Последовательность — геометрическая прогрессия
В) $y_n = 5n - 1$	3) Последовательность не является ни арифметической, ни геометрической прогрессией

Ответ:

А	Б	В

3. Одна из данных последовательностей является арифметической прогрессией. Определите какая.

1) $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ 2) $10, 6, 2, -2, \ldots$ 3) $1, 2, 3, 5, \ldots$ 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

4. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 1$, $b_{n+1} = b_n \cdot 2$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

1) $b_n = 2n$ 2) $b_n = 2^n$ 3) $b_n = 2^{n-1}$ 4) $b_n = 2(n-1)$

5. В первом ряду кинозала 25 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в ряду с номером n?

1) $23 + 2n$ 2) $25 + 2n$ 3) $27 + 2n$ 4) $2n$

6. В геометрической прогрессии $b_1 = 243$, $q = -\frac{1}{3}$. В каком случае при сравнении членов этой последовательности знак неравенства поставлен верно?

1) $b_2 > b_3$ 2) $b_3 < b_4$ 3) $b_4 < b_6$ 4) $b_5 < b_7$

7. В геометрической прогрессии $b_{12} = 3^{15}$, $b_{14} = 3^{17}$. Найдите b_1.

Ответ: ________________ .

8. Сколько отрицательных членов в последовательности (c_n), заданной формулой $c_n = 3n - 25$?

Ответ: ________________ .

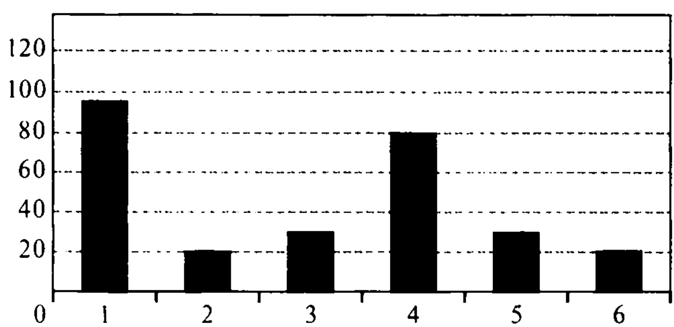
9. Арифметическая прогрессия содержит 10 членов. Сумма членов, стоящих на чётных местах, равна 55, а сумма членов, стоящих на нечётных местах, равна 40. Найдите первый член и разность прогрессии.

Ответ: ________________ .

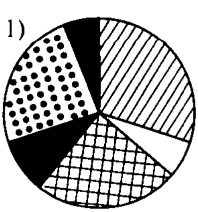
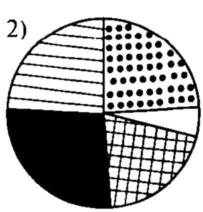
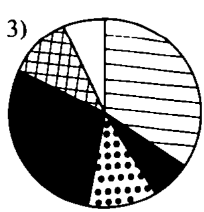
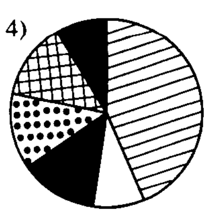
Ответы: **1.** 2. **2.** А2, Б3, В1. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 3. **7.** $b_1 = 3^4$ или $b_1 = -3^4$. **8.** 8. **9.** $a_1 = -4$, $d = 3$.

Работа № 8. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. КОМБИНАТОРИКА

1. На столбиковой диаграмме показано количество голосов, которое получил каждый из фильмов фестиваля анимационного кино в конкурсе зрительских симпатий:



Какая из круговых диаграмм соответствует полученному распределению голосов?

1)  2)  3)  4) 

2. На итоговой контрольной работе по математике в двух 9-х классах были получены следующие оценки:

9«А» — одна «2», восемь «3», семь «4»;

9«Б» — четыре «3», одиннадцать «4», пять «5».

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану оценок в каждом из классов и по двум классам вместе.

Ответ:

	Средн. арифм.	Мода	Медиана
9 «А»			
9 «Б»			
Вместе			

3. Семья из четырёх человек — папа, мама, сын и дочь — проходит через пост паспортного контроля. Сколько способов пройти через пост у них существует, если дети должны проходить контроль после родителей?

Ответ: ________________ .

4. Номера железнодорожных билетов состоят из 7 цифр. Сколько таких номеров можно составить, если использовать только нечётные цифры?

Ответ: ________________ .

5. Каждый из двух друзей показывает на руке случайное количество пальцев от 1 до 5. С какой вероятностью в сумме получится число 8?

Ответ: ________________ .

---

6. В чайном сервизе из 6 чашек две чашки с трещиной. Перед чаепитием мама случайно расставляет 6 чашек за круглым столом. С какой вероятностью 2 чашки с трещиной окажутся рядом?

Ответ: ________________ .

7. Пароль для входа в программу состоит из 8 цифр. Вова знает, что все цифры в пароле разные и идут по возрастанию. Сколько попыток ему придётся сделать, чтобы наверняка войти в программу?

Ответ: ________________ .

8. На каждом из двух кубиков 2 грани окрашены в красный цвет, 3 — в жёлтый и одна — в зелёный. С какой вероятностью при подбрасывании двух кубиков на них выпадут одинаковые цвета?

Ответы: **1.** 3.

2.

	Средн. арифм.	Мода	Медиана
9 «А»	3,375	3	3
9 «Б»	4,05	4	4
Вместе	3,75	4	4

3. 4. **4.** 5^7. **5.** $\frac{3}{25}$ или 0,12. **6.** $\frac{2}{5}$. **7.** 45. **8.** $\frac{7}{18}$.

Работа № 9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

1. Биссектриса угла BAC образует с продолжением стороны AB за точку A угол в 110°. Найдите величину угла BAC.

Ответ: ________________ .

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH. Найдите периметр треугольника ABC, если $BH = 3$, $AH = 4$.

Ответ: ________________ .

---

3. На сторонах BC и DA прямоугольника $ABCD$ поставлены соответственно точки M и N так, что $AMCN$ — ромб. Найдите отношение периметров прямоугольника и ромба, если угол при вершине A ромба равен 60°.

Ответ: ________________ .

4. Угол между двумя касательными к окружности ω, проведёнными из точки A, равен 60°, а расстояние от точки A до центра окружности ω равно 4. Найдите радиус окружности ω и расстояние между точками касания.

Ответ: ________________ .

5. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle C = \angle D = 90°$), если известно, что

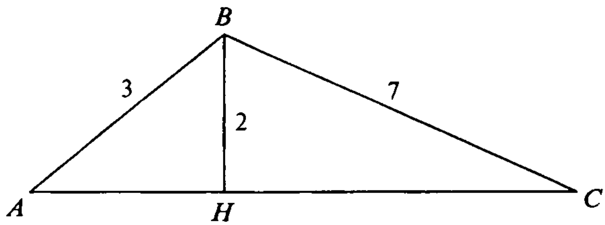
окружность касается прямой AB в точке B и длины боковых сторон трапеции равны 5 и 4.

Ответ: ________________ .

Ответы: **1.** 140°. *Указание*. Обозначьте половину угла BAC буквой x и составьте уравнение. **2.** $10 + \sqrt{20}$. **3.** $(3 + \sqrt{3}) : 4$. **4.** $2, 2\sqrt{3}$. **5.** $\frac{10}{3}$.

Работа № 10. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

1. Найдите площадь треугольника, длины боковых сторон которого равны 3 и 7, а длина высоты, проведённой к его основанию, равна 2.



Ответ: ________________ .

2. Определите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами длиной 5 и 12.

Ответ: ________________ .

---

3. Окружность с центром в точке $P(5; 3)$ касается оси Oy. Определите длину отрезка, высекаемого окружностью на оси Ox.

Ответ: ________________ .

4. Найдите угол между медианами AM и BN треугольника с вершинами $A(0; 1)$, $B(3; 0)$, $C(3; 5)$.

Ответ: ________________ .

5. Даны равносторонний треугольник ABC и круг радиуса r, касающийся прямых BA и BC в точках A и C соответственно. Найдите площадь части круга, лежащей внутри треугольника ABC.

Ответ: ________________ .

Ответы: **1.** $4\sqrt{5}$. **2.** 6,5. **3.** 8. **4.** 90°. **5.** $r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Примеры решения задач высокого уровня

Задачи, которые представлены в этом разделе, относятся к числу тех заданий, которые в экзаменационной работе помещаются на двух последних местах. Каждое задание содержит пункты а) и б). В пункте а) даётся задача с разобранным решением, в пункте б) предлагается дублирующая задача для самостоятельного решения.

1. (*Выражения и их преобразования.*)

а) Найдите наименьшее значение выражения $(4x-3y+2)^2+(5x-y-3)^2$ и значения x и y, при которых оно достигается.

Решение. При любых значениях x и y выполняется неравенство $(4x-3y+2)^2+(5x-y-3)^2 \geqslant 0$. Значение, равное 0, достигается в том и только в том случае, когда $4x-3y+2$ и $5x-y-3$ равны нулю одновременно.

Составим систему уравнений $\begin{cases}4x-3y+2=0,\\ 5x-y-3=0.\end{cases}$ Решив её, получим: $x=1, y=2$.

Таким образом, наименьшее значение выражения $(4x-3y+2)^2+(5x-y-3)^2$ равно 0, оно достигается при $x=1$, $y=2$.

О т в е т: 0; при $x=1$, $y=2$.

б) Найдите наименьшее значение выражения $(5x+6y-9)^2+(3x+2y-7)^2$ и значения x и y, при которых оно достигается.

О т в е т: 0; при $x=3$, $y=-1$.

2. (*Уравнения и системы уравнений.*)

а) Решите уравнение $(2x^2-x+1)^2+2x(2x-1)=1$.

Решение. Представим уравнение в виде $(2x^2-x+1)^2+2(2x^2-x)=1$. Введём замену $2x^2-x+1=y$, получим уравнение $y^2+2(y-1)-1=0$, т. е. $y^2+2y-3=0$. Его корни $y_1=-3$, $y_2=1$.

Уравнение $2x^2-x+1=-3$ корней не имеет, уравнение $2x^2-x+1=1$ имеет корни 0 и $\frac{1}{2}$.

Замечание. Возможны другие замены, например, $2x^2-x=y$. Тогда получается уравнение $(y+1)^2-2y-1=0$.

О т в е т: $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$.

б) Решите уравнение $(x^2-5x+7)^2-(x-3)(x-2)=1$.

О т в е т: $x_1=2$, $x_2=3$.

3. (*Уравнения и системы уравнений.*)

а) Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+x+y=1, \\ (2x+1)(y+2)=0. \end{cases}$

Решение.

На основании условия равенства произведения нулю получим:
$\begin{cases} 2x+1=0, \\ 2x^2+x+y=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y+2=0, \\ 2x^2+x+y=1. \end{cases}$ Решим первую систему. Из первого уравнения имеем $x=-0{,}5$; подставив это значение x во второе уравнение, получим $y=1$. Получили первое решение системы уравнений: $(-0{,}5; 1)$.

Решим вторую систему. Из первого уравнения имеем $y=-2$; подставив это значение y во второе уравнение, получим уравнение $2x^2+x-3=0$. Его корни: $x_1=1$, $x_2=-1{,}5$. Получим ещё два решения системы уравнений: $(1; -2)$ и $(-1{,}5; -2)$.

Ответ: $(-1{,}5; -2)$, $(1; -2)$, $(-0{,}5; 1)$.

б) Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y^2-3y-x=3, \\ (x+1)(2y-1)=0. \end{cases}$

Ответ: $(-1; 2)$, $(-1; -0{,}5)$, $(-4; 0{,}5)$.

4. (*Неравенства.*)

а) При каких значениях m система неравенств $\begin{cases} 6x-3 \leqslant 5+4x, \\ 3x-m \geqslant 2+2x \end{cases}$ имеет решения?

Решение. Приведём систему к виду: $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \geqslant 2+m. \end{cases}$ Система имеет решения, если $2+m \leqslant 4$. (К этому выводу легко прийти с помощью координатной прямой.) Отсюда $m \leqslant 2$.

Ответ: при $m \leqslant 2$.

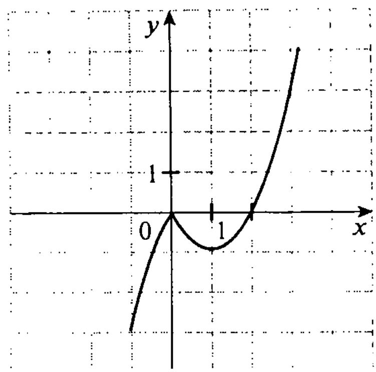
б) При каких значениях c система неравенств $\begin{cases} 3x+7<2-2x, \\ 4x-3c>3x+5 \end{cases}$ не имеет решений?

Ответ: при $c \geqslant -2$.

5. (*Функции.*)

а) При каких значениях p прямая $y=p$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases} x(x-2), \text{ если } x \geq 0, \\ x(2-x), \text{ если } x<0? \end{cases}$

Решение. Построим график функции $y = \begin{cases} x(x-2), \text{ если } x \geqslant 0, \\ x(2-x), \text{ если } x < 0. \end{cases}$



Из рисунка видно, что прямая $y = p$ имеет одну общую точку с графиком функции при $p < -1$ и $p > 0$.

Ответ: при $p < -1$ и $p > 0$ (ответ можно записать и в другом виде: $p \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$).

б) При каких значениях p прямая $y = p$ имеет три общие точки с графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x(x+2), \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x(x+2), \text{ если } x < 0? \end{cases}$

Ответ: при $0 < p < 1$.

6. (*Координаты и графики.*)

а) Найдите все значения a, при которых точка пересечения прямых $y = 4 + \frac{1}{3}x$ и $y = a - 2x$ находится в первой координатной четверти.

Решение. Найдём координаты точки пересечения этих прямых:

$$4 + \frac{1}{3}x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{3a-12}{7} \Leftrightarrow y = a - \frac{2(3a-12)}{7} = \frac{a+24}{7}.$$

Точка пересечения прямых должна находиться в I четверти, следовательно, переменная a должна удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} \frac{3a-12}{7} > 0 \\ \frac{a+24}{7} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4 \\ a > -24 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4.$$

Замечание. Задачу можно решить графически. Для этого надо построить прямую $y = 4 + \frac{1}{3}x$, прямую $y = -2x$ и «перемещать» прямую

$y = -2x$ параллельно самой себе, наблюдая, как меняется положение точки пересечения прямых. При $a = 4$ точка пересечения окажется на оси y, значит, при $a > 4$ она будет находиться в I четверти.

О т в е т: $a > 4$ (ответ можно дать в другом виде: $a \in (4; +\infty)$).

б) Найдите все значения a, при которых точка пересечения прямых $y = 1 - \frac{1}{2}x$ и $y = a + 3x$ находится во II координатной четверти.

О т в е т: $a > 1$.

7. (*Координаты и графики.*)

а) Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(0; -6)$, $B(1; -9)$ и $C(6; 6)$. Найдите координаты её вершины.

Решение. 1) Найдём коэффициенты a, b и c в уравнении параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Парабола проходит через точку $A(0; -6)$, значит, $c = -6$. Подставим координаты точек B и C в уравнение $y = ax^2 + bx - 6$, получим систему уравнений: $\begin{cases} a + b = -3, \\ 36a + 6b = 12. \end{cases}$ Отсюда: $a = 1$, $b = -4$. Уравнение параболы имеет вид: $y = x^2 - 4x - 6$.

2) Найдём координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2$, $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 - 6 = -10$.

О т в е т: $(2; -10)$.

б) Парабола проходит через точки $K(0; 2)$, $L(-5; -3)$, $M(1; 9)$. Найдите координаты её вершины.

О т в е т: $(-3; -7)$ или $x = -3$, $y = -7$.

8. (*Арифметическая и геометрическая прогрессии.*)

а) Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 27,5; сумма следующих пяти её членов равна 90. Найдите сумму членов этой прогрессии с 11-го по 15-й включительно.

Решение. Способ 1. Из условия известно, что $S_5 = 27{,}5$ и $S_{10} = 27{,}5 + 90 = 117{,}5$. Воспользовавшись формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{(2a_1 + d \cdot 4) \cdot 5}{2} = 27{,}5, \\ \dfrac{(2a_1 + d \cdot 9) \cdot 10}{2} = 117{,}5. \end{cases}$$ Решив систему, найдём, что $a_1 = 0{,}5$ и $d = 2{,}5$.

Далее: $S_{15} = \frac{(2 \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 14) \cdot 15}{2} = 270$, а сумма членов с 11-го по 15-й включительно равна $270 - 117,5 = 152,5$.

Способ 2. Суммы членов прогрессии с 1-го по 5-й, с 6-го по 10-й, с 11-го по 15-й также образуют арифметическую прогрессию. В самом деле, каждый член второй суммы отличается от соответствующего члена первой суммы на $5d$, точно так же каждый член третьей суммы отличается от соответствующего члена второй суммы на $5d$. Найдём разность этой прогрессии: $90 - 27,5 = 62,5$. Отсюда $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 90 + 62,5 = 152,5$.

Ответ: 152,5.

б) Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 95, сумма следующих десяти её членов равна 295. Найдите сумму членов этой прогрессии с 21-го по 30-й включительно.

Ответ: 495.

9. (*Текстовые задачи.*)

а) Автомобиль едет сначала 2 мин с горы, а затем 6 мин в гору. Обратный путь он проделывает за 13 мин. Во сколько раз скорость автомобиля при движении с горы больше, чем скорость при движении в гору? (Считайте, что скорость при движении с горы (в гору) одинакова в обоих направлениях.)

Решение. Пусть скорость автомобиля при движении с горы равна x км/мин, а при движении в гору — y км/мин. Тогда на пути туда автомобиль едет с горы $2x$ км, а в гору — $6y$ км.

На обратном пути расстояние $6y$ км (т. е. путь с горы) автомобиль преодолевает за $\frac{6y}{x}$ мин, а расстояние $2x$ км (т. е. путь в гору) — за $\frac{2x}{y}$ мин. Всего обратный путь занимает 13 мин. Имеем уравнение $\frac{6y}{x} + \frac{2x}{y} = 13$.

Из этого уравнения нужно найти отношение $\frac{x}{y}$. Введя замену $\frac{x}{y} = t$, получим уравнение с одной переменной: $2t + \frac{6}{t} = 13$. Решив его, найдём, что $t_1 = 6$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Так как скорость автомобиля при движении с горы больше, чем при движении в гору, то подходит только корень $t_1 = 6$. Таким образом, $\frac{x}{y} = 6$.

Ответ: в 6 раз.

б) Мотоциклист едет сначала 3 мин в гору, а затем 4 мин с горы. Этот же участок дороги в обратном направлении он проезжает за 13 мин. Во сколько раз скорость мотоциклиста при движении в гору меньше, чем при движении с горы? (Считайте, что скорость при движении с горы (в гору) одинакова в обоих направлениях.)

О т в е т: в 3 раза.

10. (*Текстовые задачи.*)

а) На аукционе одна картина была продана с прибылью 20%, а другая — с прибылью 50%. Общая прибыль от продажи двух картин составила 30%. У какой картины первоначальная цена была выше и во сколько раз?

Решение. Пусть первоначальная стоимость первой картины x р., второй — y р., тогда их общая первоначальная стоимость составляла $x+y$ р.

Первая картина была продана за $1{,}2x$ р., вторая — за $1{,}5y$ р., и вместе за них выручили $1{,}2x+1{,}5y$ р. Так как доход от продажи двух картин составил 30%, то при продаже за них выручили $1{,}3(x+y)$ р.

Составим уравнение $1{,}2x+1{,}5y=1{,}3(x+y)$. Отсюда $0{,}2y=0{,}1x$; $2y=x$.

О т в е т: первоначальная стоимость первой картины в 2 раза больше, чем второй.

б) За год число мальчиков в школьной секции самбо увеличилось на 25%, а число девочек — на 20%. В результате число занимающихся самбо увеличилось на 24%. Кого было больше в секции самбо в начале года — девочек или мальчиков, и во сколько раз?

О т в е т: мальчиков, в 4 раза.

11. (*Окружность и круг.*)

а) Основания трапеции, вписанной в окружность, равны 7 и 9, а длина хорды окружности, проходящей через середины боковых сторон трапеции, равна 10. Найдите радиус окружности.

Решение. Вписанная трапеция является равнобокой, так как параллельные хорды (основания трапеции) высекают на окружности равные дуги. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD=9$, $BC=7$, MN — хорда длиной 10, содержащая среднюю линию EF, где $EF=\dfrac{AD+BC}{2}=8$. Тогда $ME=FN=\dfrac{10-8}{2}=1$. По теореме о пересекающихся хордах $EA\cdot EB=EM\cdot EN$, т. е. $EA^2=1\cdot 9=9$, откуда $EA=3$. Значит, длины боковых сторон трапеции равны 6. Вычислим высоту CH трапеции: $CH^2=CD^2-DH^2=CD^2-\left(\dfrac{AD-BC}{2}\right)^2=36-1=35$, откуда $CH=\sqrt{35}$. Теперь из треугольника CAH: $CA^2=CH^2+HA^2=35+64=99$. Площадь S

треугольника ACD равна $S=\frac{1}{2}CH\cdot AD=\frac{1}{2}\sqrt{35}\cdot 9$. Радиус описанной около трапеции окружности есть радиус окружности, описанной около треугольника ACD. По формуле $R=\frac{abc}{4S}$ находим её радиус: $R=\frac{\sqrt{99}\cdot 6\cdot 9}{2\sqrt{35}\cdot 9}=$ $=\frac{9\sqrt{11}}{\sqrt{35}}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{11}}{\sqrt{35}}$.

б) Прямая, проходящая через середины M и N сторон AB и BC треугольника ABC, пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точках K и L. Найдите радиус окружности, если известно, что $KM=1$, $MN=4$, $NL=5$.

Ответ: 5.

12. (*Координаты.*)

а) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами длиной 3, 4, 5.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, $AB=3$, $BC=4$, $CA=5$. Данный треугольник — прямоугольный ($CA^2=AB^2+BC^2$), поэтому его площадь есть $S=\frac{1}{2}3\cdot 4=6$. По формуле $r=\frac{S}{p}$, где p — полупериметр треугольника, найдём радиус вписанной окружности: $r=\frac{6}{\frac{1}{2}(3+4+5)}=1.$

Введём прямоугольную систему координат, расположив её начало в точке B и направив оси по лучам BC и BA. Тогда точка I — центр вписанной окружности будет иметь координаты $I(1;\ 1)$, так как её расстояния до координатных осей равны радиусу вписанной окружности. Точка O — центр описанной окружности является серединой гипотенузы треугольника, поэтому её координаты равны полусумме координат точек $C(4;0)$ и $A(0;3)$, значит, $O(2;\ 1{,}5)$. По формуле расстояния между точками на координатной плоскости найдём искомое расстояние: $IO=\sqrt{(2-1)^2+(1{,}5-1)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

б) Найдите расстояние между точками пересечения биссектрис и медиан треугольника со сторонами длиной 6, 8, 10.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

13. (***Формулы площади.***)

а) Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, у которого длина основания равна $2\sqrt{3}$, а угол при вершине равен 120°?

Решение. Способ 1. Пусть a и b — длины боковых сторон треугольника. Тогда по теореме косинусов $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° =$ $= a^2 + b^2 + ab$. А площадь треугольника равна $S = \frac{1}{2}ab\sin 120° = ab\frac{\sqrt{3}}{4}$. Из неравенства $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, которое следует из неравенства $(a - b)^2 \geqslant 0$, получаем: $(2\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2 + ab \geqslant 3ab$, откуда $ab \leqslant 4$ и, значит, $S = ab\frac{\sqrt{3}}{4} \leqslant \sqrt{3}$. Наибольшая площадь $S = \sqrt{3}$ достигается, когда нестрогое неравенство обращается в равенство, т.е. в случае $a = b = 2$ (для равнобедренного треугольника).

Способ 2. Множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть дуга окружности. Поэтому вершина треугольника с данным основанием длиной $2\sqrt{3}$ лежит на дуге окружности, для которой данный отрезок является хордой. Наибольшую площадь треугольник будет иметь, если его высота имеет наибольшую длину. А наиболее удалённой от хорды точкой дуги является её середина. Значит, треугольник — равнобедренный, и из теоремы косинусов, как и выше, находим $a = b = 2$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

б) Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, у которого длина основания равна 2, а длина медианы, проведённой к другой стороне, равна 3?

Ответ: 6.

Содержание

Справочное издание

Кузнецова Людмила Викторовна
Суворова Светлана Борисовна
Булычёв Владимир Александрович
Бунимович Евгений Абрамович
Рослова Лариса Олеговна
Агаханов Назар Хангельдыевич

МАТЕМАТИКА

ГИА

Учебно-справочные материалы для 9 класса

Редактор *В. В. Черноруцкий*
Художественный редактор *Л. Г. Епифанов*
Корректоры *Е. Н. Александрова, А. А. Сазонова*
Компьютерный набор *А. В. Алексеевой*

Компьютерная вёрстка *ООО «Аргус»*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Подписано в печать с оригинал-макета 06.09.2011. Формат 60×90 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Newton. Офсетная печать.
Усл. печ. 17,5. Уч.-изд. л. 17,1. Тираж 7000 экз. Заказ 1153

Санкт-Петербургский филиал
Открытого акционерного общества
«Издательство «Просвещение».
191014, Санкт-Петербург, Литейный пр., 37-39.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП «Типография «Наука».
199034, Санкт-Петербург, 9-я линия, 12.