ГИА и ЕГЭ

Большая перемена

Э.Н. Балаян

РЕПЕТИТОР ПО ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА и ЕГЭ

- краткие теоретические сведения и справочные материалы
- более 1500 задач
- ответы ко всем заданиям
- 20 учебно-тренировочных тестов к ГИА
- подробное решение трех вариантов

7–11 классы

Большая перемена

Э.Н. Балаян

РЕПЕТИТОР ПО ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА И ЕГЭ

7–11 КЛАССЫ

- *Краткие теоретические сведения и справочные материалы*
- *Более 1500 задач*
- *Ответы ко всем заданиям*
- *20 учебно-тренировочных тестов к ГИА*
- *Подробное решение трех вариантов*

Ростов-на-Дону
Феникс
2012

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.
Б20 Репетитор по геометрии для подготовки к ГИА и ЕГЭ: 7–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2012. — 351 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-18858-3

Предлагаемая вниманию читателя книга ставит целью выпускникам эффективно подготовиться к сдаче ГИА и ЕГЭ по геометрии.

Книга содержит 20 вариантов тестов к сдаче ГИА, из которых 3 варианта приводятся с подробными решениями и пояснениями.

Наличие большого количества задач с решениями дает возможность решать остальные задачи самостоятельно.

Задачи подобраны по принципу однородности тем, типов и методов решения и разбиты на части 1 и 2 по уровню сложности.

Наличие изложения краткой теории и справочных материалов даст возможность выпускникам отработать как все темы в целом, так и только те, которые покажутся сложными.

Ко всем задачам даны ответы.

Использование подобной книги позволит абитуриентам и выпускникам получить на экзамене максимальное количество баллов, необходимых для поступления в вузы с достаточно высокими требованиями к математической подготовке поступающих.

Пособие рассчитано на выпускников общеобразовательных школ, абитуриентов, слушателей подготовительных отделений вузов, для самостоятельной подготовки к сдаче ГИА и ЕГЭ по геометрии, а также учителям математики, студентам педвузов и репетиторам.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-18858-3 ББК 22.1я721

ПРЕДИСЛОВИЕ

Не секрет, что геометрия как предмет является объективно более сложной для изучения, чем алгебра. На ее изучение дается по программе меньше времени, чем по алгебре. Поэтому решение геометрических задач на ГИА и ЕГЭ вызывает у выпускников большие затруднения.

Более того, на ЕГЭ многие абитуриенты, как правило, обходят решение геометрических задач. По этим причинам многие учителя основное внимание уделяют решению задач по математике и алгебре, так как в настоящее время в тестах соотношение алгебраических заданий к геометрическому составляет 14 : 4 (всего 18 задач).

Предлагаемая вниманию читателя книга предназначена для самостоятельного повторения школьного курса геометрии. Она окажет неоценимую помощь не только в устранении пробелов в знаниях учеников 7–11 классов, но и поможет выпускникам 9 и 11 классов эффективно подготовиться соответственно к ГИА и ЕГЭ.

Учитывая различный уровень подготовки каждого выпускника, автор счел необходимым расположить задачи для самостоятельного решения на две части.

Задачи части 1 соответствуют заданиям базового и среднего уровней, а задачи части 2 являются более сложными и направлены на выработку умений и навыков на высоком уровне программных требований. Упражнения этой части могут быть использованы для организации индивидуальной работы на уроках с сильными учениками, на факультативных занятиях, а также в работе математического кружка. Эти задачи дают возможность учителю вести дифференцированное обучение учащихся.

Книга состоит из 7 глав, каждая глава содержит несколько параграфов, а параграфы разбиты на пункты и подпункты, что дает возможность быстро найти нужную информацию.

В I и V главах содержатся соответственно краткие теоретические сведения по планиметрии (7–9 классы) и стереометрии (10–11 классы). Изложение материала сжатое, в конспективной форме, но достаточное, чтобы им мог пользоваться и тот, кто незнаком с каким-либо разделом, и тот, кто окончил школу ранее и забыл материал.

Во II и VI главах приводятся образцы решения задач по планиметрии и стереометрии, а также для самостоятельного решения практически по всему курсу геометрии 7–11 классов.

Для подготовки к ГИА в главе III приводятся 20 новых авторских тестов, разработанных на основе нового общего плана, шкала пересчета первичного балла в отметку по пятибалльной шкале и инструкция по выполнению работы. Кроме того, в IV главе варианты №1, 10 и 20 даются с полными решениями и обоснованиями, чтобы ученик имел возможность самостоятельно справиться с остальными вариантами.

В заключительной, VII главе для подготовки к ЕГЭ приводятся задачи базового и повышенного уровней. Базовый уровень представлен задачами типа B4, B6 и B9, а повышенный — задачами типа C2 и C4.

В дополнение к этой книге и для основательной подготовки к ГИА и ЕГЭ, автор настоятельно рекомендует использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги автора «Репетитор по математике для старшеклассников и поступающих в вузы» (10-е издание) и «Геометрия. Задачи на готовых чертежах. 7–9 классы».

Глава 1

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ ГЕОМЕТРИИ VII–XI КЛАССОВ

§ 1. Планиметрия

1.1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

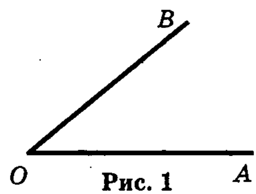


Рис. 1

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

Рис. 2

Рис. 3

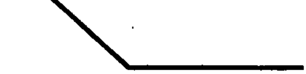


Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

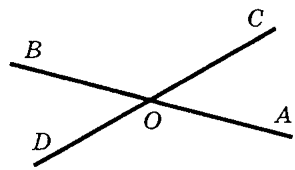


Рис. 5

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

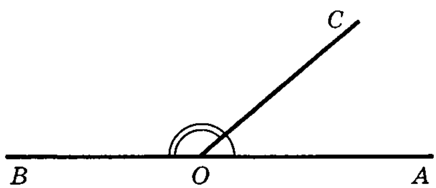


Рис. 6

Сумма смежных углов равна 180°.

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

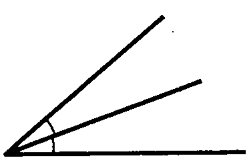


Рис. 7

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

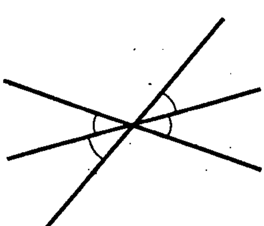


Рис. 8

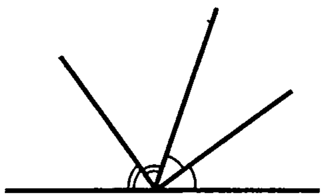


Рис. 9

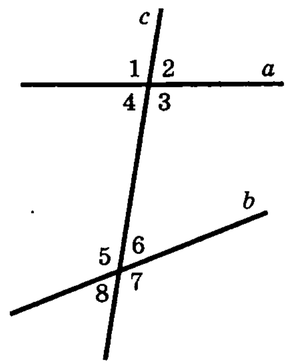


Рис. 10

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

- **соответственные углы:**
  $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;
- **внутренние накрест лежащие:**
  $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;
- **внешние накрест лежащие:**
  $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;
- **внутренние односторонние:**
  $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;
- **внешние односторонние:**
  $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

1.2. Многоугольник

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ — углы многоугольника; AB, BC, CD и т. д. — стороны многоугольника; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + ... + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

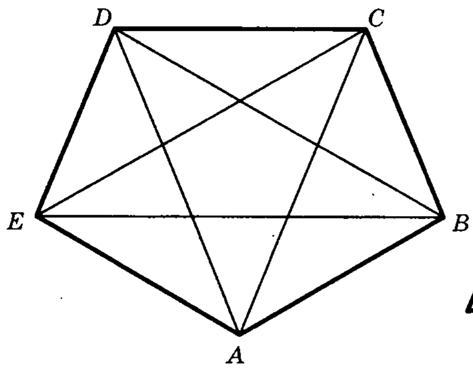


Рис. 11

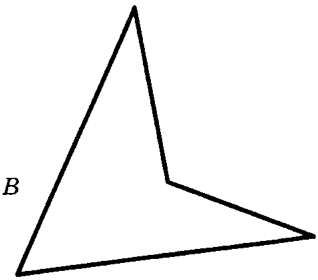


Рис. 12

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$.
2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.
3. В выпуклом n-угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n-угольник на $(n - 2)$ треугольников.
4. В выпуклом n-угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n-3)$.

1.3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и все стороны, называется **правильным**.

Свойства:

1. Каждый угол правильного n-угольника равен
$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}.$$
2. Около правильного n-угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n-угольник можно вписать окружность, и притом только одну.
4. Окружность, вписанная в правильный n-угольник, касается всех сторон n-угольника в их серединах.
5. Центр окружности, описанной около правильного n-угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n-угольник.
6. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, равна
$$a = 2R\sin\frac{180°}{n}.$$
7. Длина стороны правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r,
$$a = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}.$$

1.4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

Точки A, B, C — **вершины** ΔABC.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — углы.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c,\quad BC = a,\quad AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой** (c).

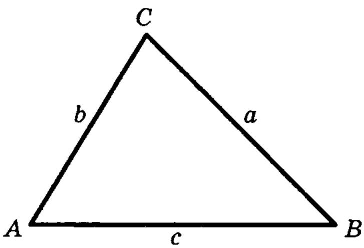


Рис. 13

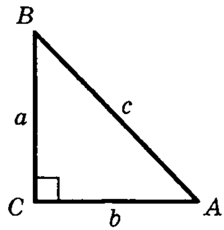


Рис. 14

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

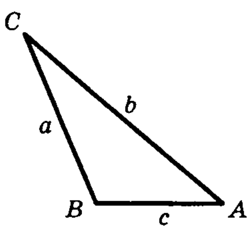


Рис. 15

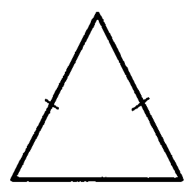


Рис. 16

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

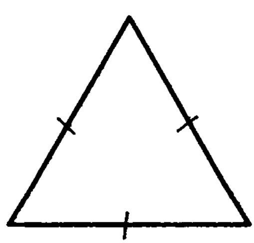


Рис. 17

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.
4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18):

$$\angle CBD = \angle A + \angle C.$$

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

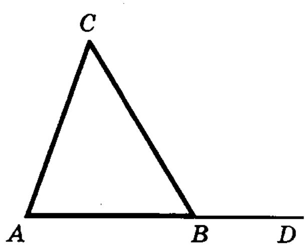


Рис. 18

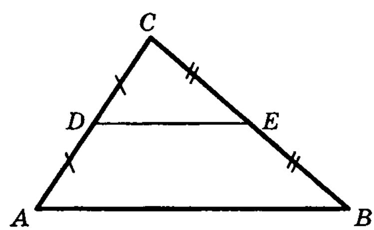


Рис. 19

1.5. Признаки равенства треугольников

I признак (признак равенства по двум сторонам и углу между ними):

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$$AB = A_1B_1,\quad AC = A_1C_1,\quad \angle A = \angle A_1.$$

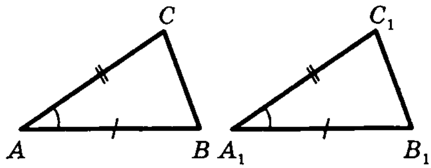


Рис. 20

II признак (признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам):

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$$AB = A_1B_1, \quad \angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1.$$

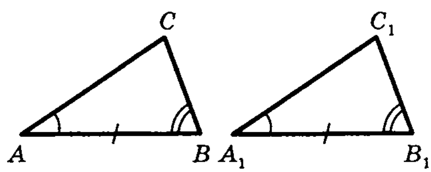


Рис. 21

III признак (признак равенства по трем сторонам):

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1, \quad AC = A_1C_1.$$

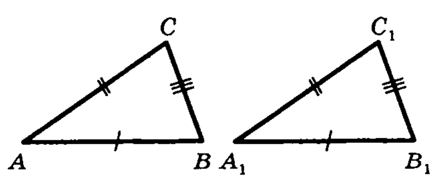


Рис. 22

1.6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

1.7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный:
в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

1.8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

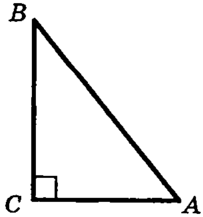


Рис. 23

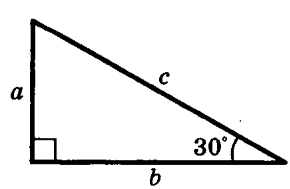


Рис. 24

1.9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. *Если катеты одного прямоугольного треугольника* соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1, \quad BC = B_1C_1.$$

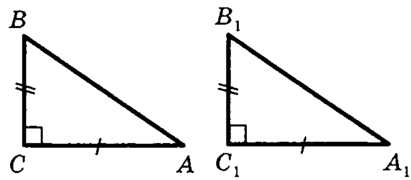


Рис. 25

2. *Если катет и прилежащий к нему острый угол* одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

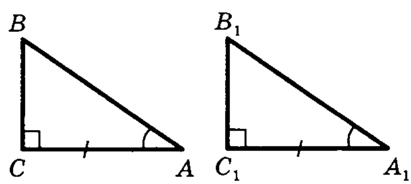


Рис. 26

3. *Если гипотенуза и острый угол* одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

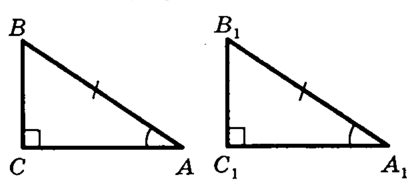


Рис. 27

4. *Если гипотенуза и катет* одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1, \quad AC = A_1C_1.$$

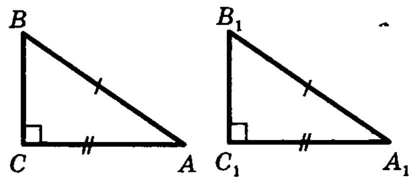


Рис. 28

1.10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

1) точка пересечения медиан;
2) точка пересечения биссектрис;
3) точка пересечения высот (или их продолжений);
4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или на ее продолжение.

В тупоугольном треугольнике (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри треугольника.

В остроугольном треугольнике (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В прямоугольном треугольнике катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром.** В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В пря-

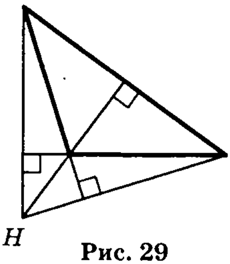


Рис. 29

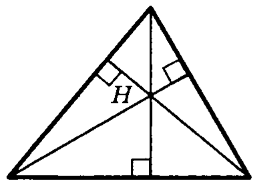


Рис. 30

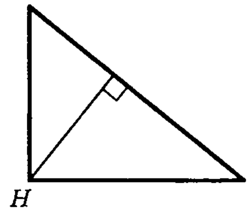


Рис. 31

моугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

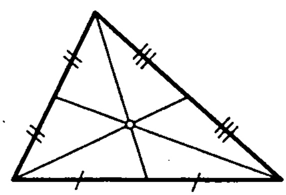


Рис. 32

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

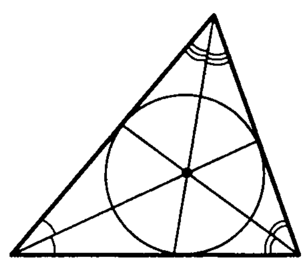


Рис. 33

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34–36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит вне треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине** гипотенузы.

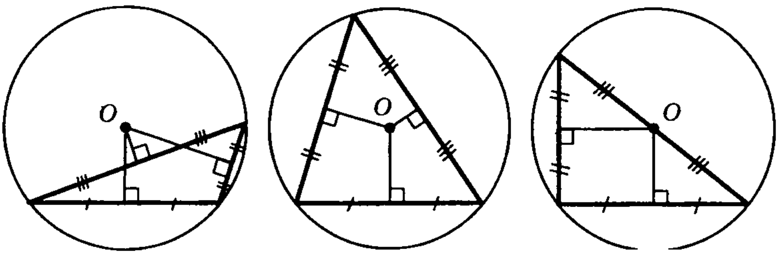


Рис. 34 **Рис. 35** **Рис. 36**

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

1.11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

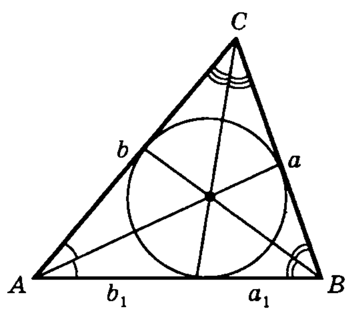


Рис. 37

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

3) **Длина медианы:**

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

4) **Длина высоты:**

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр,

h_c — высота, проведенная к стороне c.

5) **Зависимость между сторонами и высотами:**

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

6) **Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:**

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

1.12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE, AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

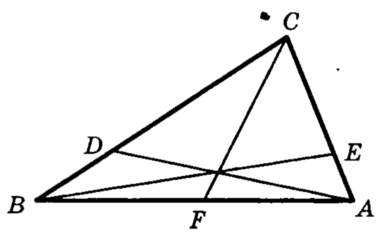


Рис. 38

1.13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC ΔABC за точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

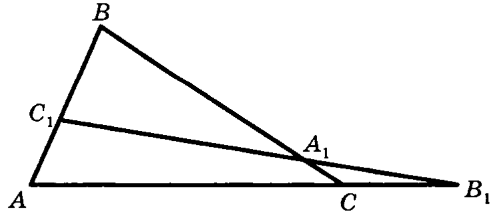


Рис. 39

1.14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

1.15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

1.16. Площадь треугольника

1) $S = \frac{1}{2}ah_a$; 2) $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

4) $S = p\cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;

5) $S = \frac{abc}{4R}$;

6) $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$.

1.17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

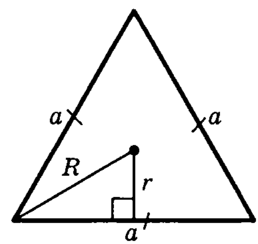


Рис. 40

1.18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

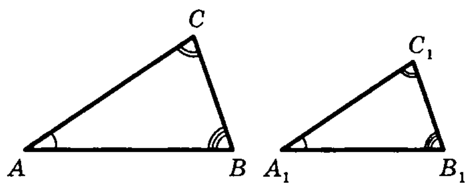


Рис. 41

AB и A_1B_1, BC и и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2, т. е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$.

1.19. Признаки подобия треугольников

I признак. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1.$$

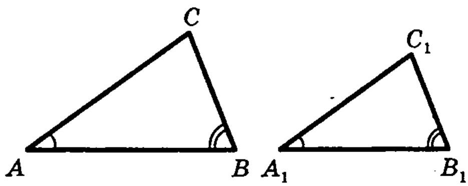


Рис. 42

II признак. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого *и углы*, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\angle A = \angle A_1, \ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

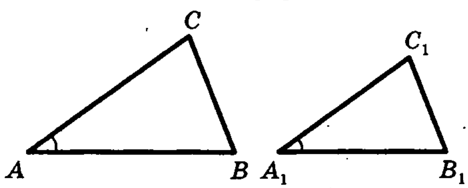


Рис. 43

III признак. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

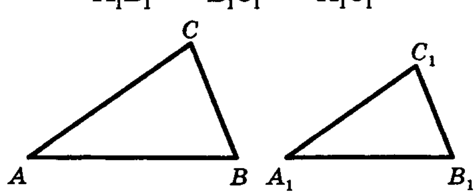


Рис. 44

Площади подобных фигур (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, **площади кругов** относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

1.20. Четырехугольник

1. **Произвольный выпуклый** (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

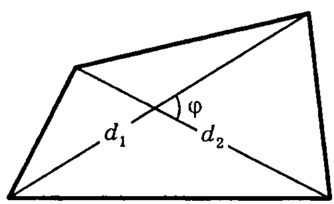


Рис. 45

2. **Вписанный** (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

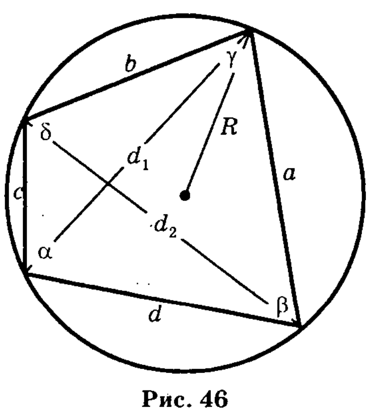


Рис. 46

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1d_2 \text{ (теорема Птолемея).}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

3. Описанный.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

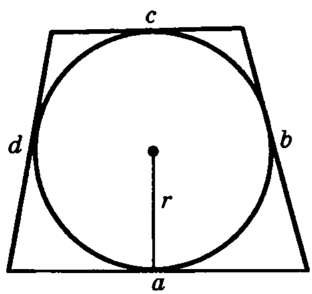


Рис. 47

1.21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

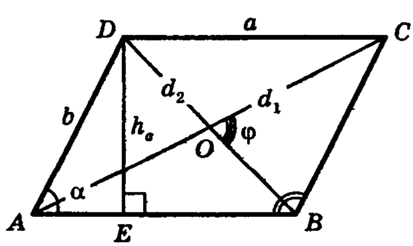


Рис. 48

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь параллелограмма.

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).
2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).
3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $180°$ ($\angle A + \angle B = 180°$ и т. д.).
4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\Delta ADC = \Delta ABC$, $\Delta ABD = \Delta BCD$).
5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

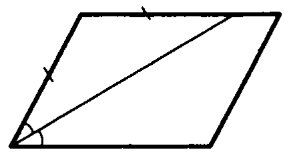


Рис. 49

Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то такой четырехугольник — параллелограмм.
2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = DC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.
4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

1.22. Трапеция

a и b — основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 50).

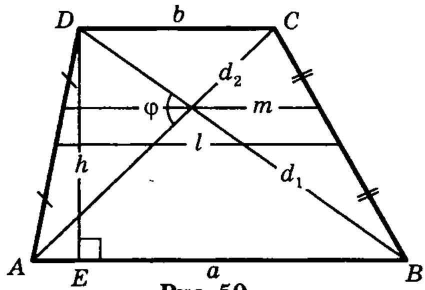


Рис. 50

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции.**

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$m \parallel a \parallel b$, $m = \dfrac{2ab}{a+b}$.

$\angle A + \angle D = 180^\circ$; $\angle B + \angle C = 180^\circ$.

$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$ — площадь трапеции.

1. Равнобедренная трапеция.

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется **равнобедренной** (рис. 51).

$AD = BC$.

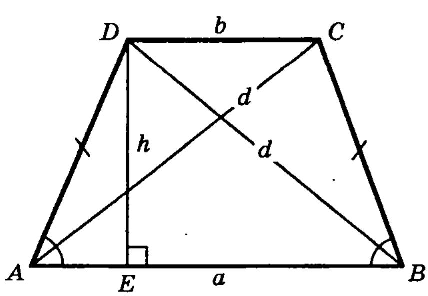


Рис. 51

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$AB + CD = 2AD$ (рис. 52).

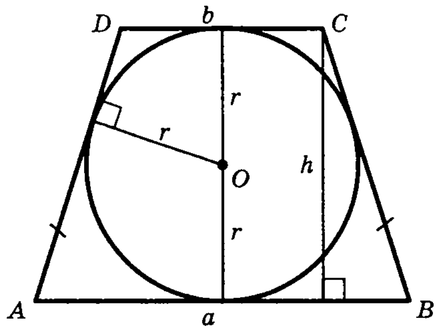


Рис. 52

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

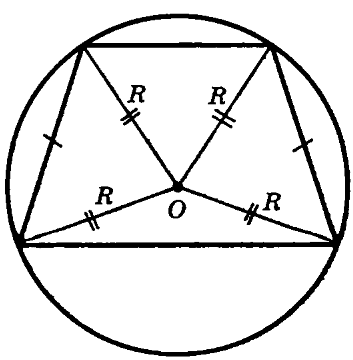


Рис. 53

2. Прямоугольная трапеция.

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется **прямоугольной** (рис. 54).

$\angle D = \angle C = 90°$.

$BE = CD = h$ (высота трапеции).

$AE = a - b$.

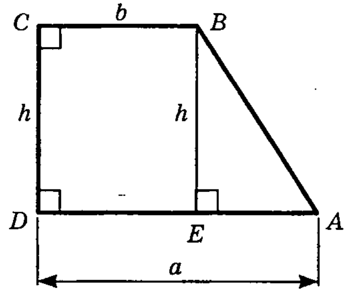


Рис. 54

1.23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у **прямоугольника диагонали равны.**

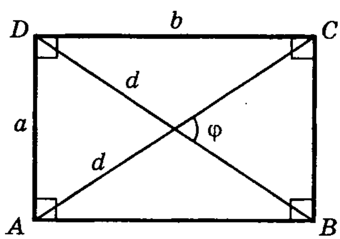


Рис. 55

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

1.24. Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

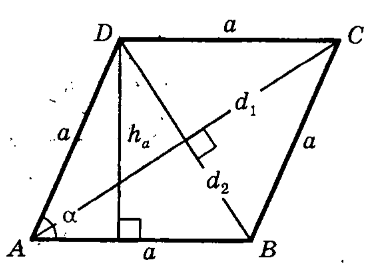


Рис. 56

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов A и C; BD — биссектриса углов B и D.

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

1.25. Квадрат

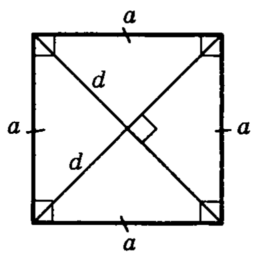


Рис. 57

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

1.26. Окружность

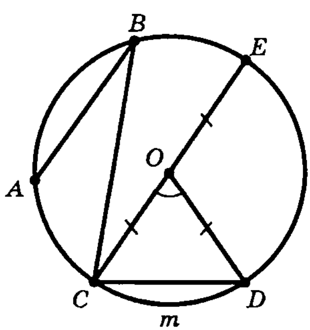


Рис. 58

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

Обозначение: r или R.

На рис. 58 $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой.**

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, называется **диаметром**.

AB, BC, CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D.

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом.**

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом.**

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором.**

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральным** ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$).

1.27. Свойства касательных к окружности

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 59).

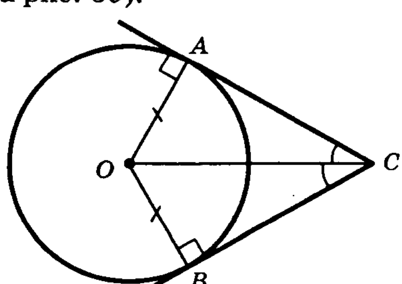


Рис. 59

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.
2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

1.28. Окружность и треугольник

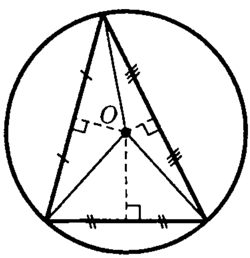


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

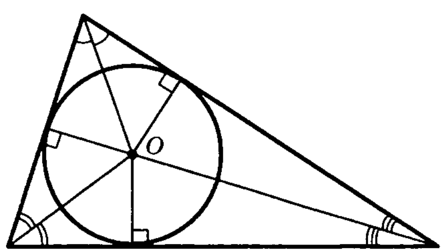


Рис. 61

1.29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

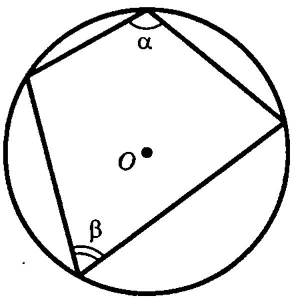


Рис. 62

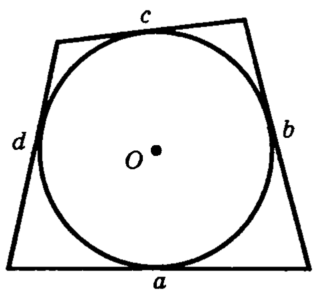


Рис. 63

1.30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64):

$$\angle AOB = \smile AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AmC.$$

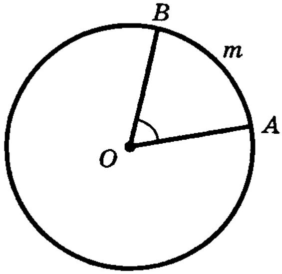


Рис. 64

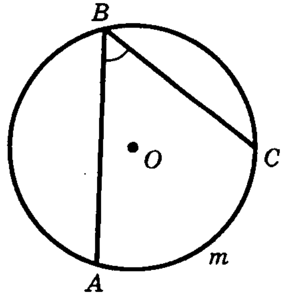


Рис. 65

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnC).$$

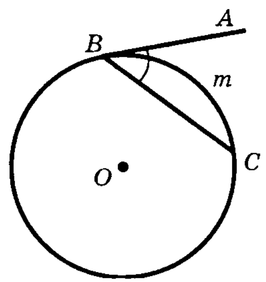


Рис. 66

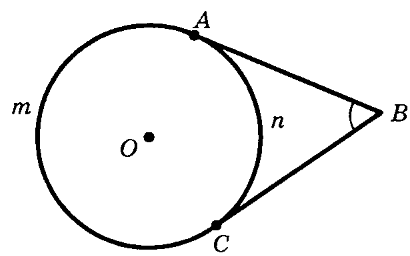


Рис. 67

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68):

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup EnD).$$

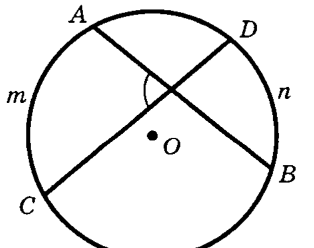


Рис. 68

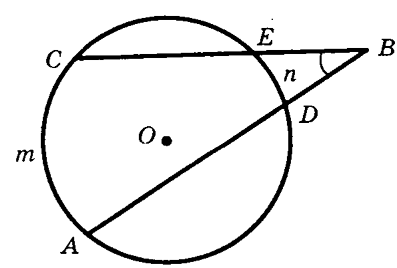


Рис. 69

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

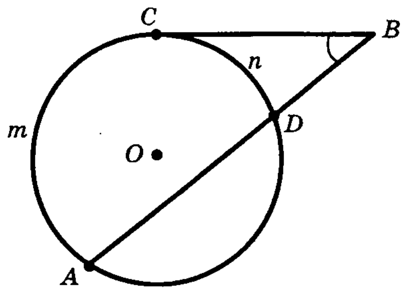


Рис. 70

1.31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то **произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой** (рис. 71):

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

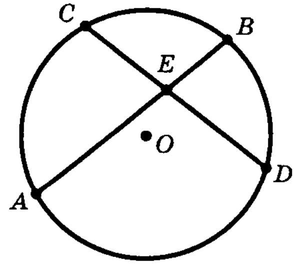


Рис. 71

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC, то **произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной** (рис. 73):

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

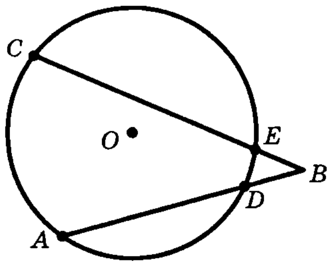


Рис. 72

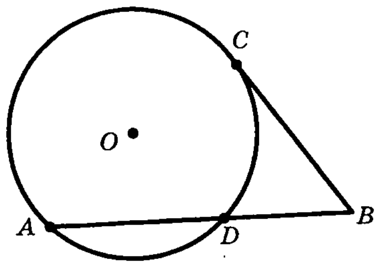


Рис. 73

1.32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi D^2 = \dfrac{1}{2}CR$ — площадь круга;

$\pi = \dfrac{C}{D} \approx 3{,}14$ — отношение длины окружности к ее диаметру.

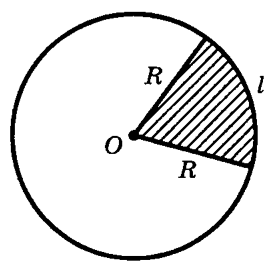


Рис. 74

1.33. Векторы на плоскости

1. Вектором называется направленный отрезок (рис. 75).

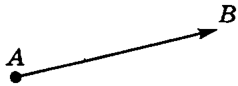


Рис. 75

A — начало вектора, B — конец.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$, $\vec{б}$ и т. д.

2. Модулем (абсолютной величиной, длиной) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$ и т. д.

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным вектором*, или *ортом*.

3. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым вектором*.
Обозначение: $\vec{0}$.
Нулевому вектору приписывается любое направление.

4. Ненулевые векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Если векторы одинаково направлены (рис. 76), их называют *сонаправленными* и пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Противоположно направленные векторы (рис. 77) обозначают символом $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

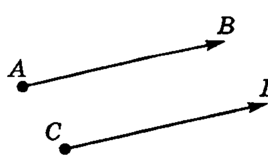


Рис. 76

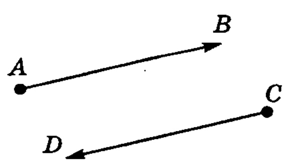


Рис. 77

Два противоположно направленных вектора с равными модулями называются *противоположными векторами*.

Два ненулевых вектора называются *равными*, если они сонаправлены и имеют равные модули.

5. Сложение и вычитание векторов.

Пусть $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$.

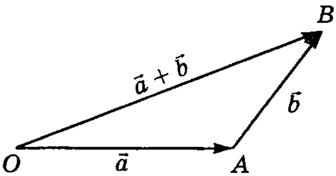


Рис. 78

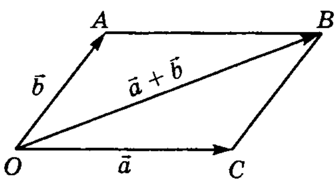


Рис. 79

Вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OB}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ (правило треугольника, рис. 78) или $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то диагональ $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$ есть сумма векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ т. е. $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ (правило параллелограмма, рис. 79), или $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$.

6. Свойства операции сложения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переместительный закон;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — сочетательный закон.

7. Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ (записывается $k\cdot\vec{a}$ или $\vec{a}\cdot k$) называется вектор, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$ и который сонаправлен вектору $\vec{a}$, если $k>0$, и направлен противоположно ему, если $k<0$.

8. Свойства операции умножения вектора на число.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и чисел k, l справедливы равенства:

1) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ — распределительный закон относительно сложения *векторов*;

2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ — распределительный закон относительно сложения *чисел*;

3) $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ — сочетательный закон;
4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ — закон умножения на единицу.

9. Для любого вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат на плоскости справедливо равенство $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где x, y — координаты вектора $\vec{a}$.

10. Пусть заданы векторы $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2)$.
Тогда сумма указанных векторов — это вектор $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$.

11. Пусть заданы вектор $\vec{a}(x;\ y)$ и некоторое число k. Тогда вектор $k\vec{a} = \vec{a}(kx;\ ky)$.

12. Если в прямоугольной системе координат заданы точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то вектор
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

13. *Скалярным произведением двух векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.
Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

По определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$.

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, т. е. $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = 90°$, то $\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = 0$ и поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Верно и обратное.

Таким образом, *скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.*

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. В частности, $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом вектора* $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

Итак, *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины*, т. е. $\vec{a}^2 = a^2$.

14. Пусть заданы векторы $\vec{a}(x_1;\ y_1)$ и $\vec{b}(x_2;\ y_2)$, тогда
1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. В частности, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2$.
2) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — длина отрезка AB.

3) $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

15. Свойства скалярного произведения.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переместительный закон;

2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — сочетательный закон относительно умножения вектора на число;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — распределительный закон относительно сложения векторов.

Глава 2

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

§ 2. Задачи с решениями

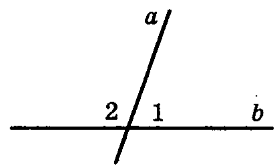
2.1. Углы

Пример 1. Разность двух углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 20°. Найти больший из этих углов.

Дано: $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные,
$\angle 2 - \angle 1 = 20°$.

Найти: $\angle 2$.

Решение.



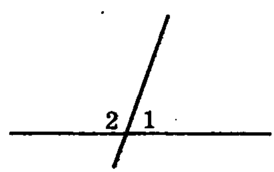
Пусть $\angle 2 > \angle 1$. Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = x + 20$.

Так как $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные, то по теореме о смежных углах имеем: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, или $x + x + 20 = 180$, или $2x = 160$, $x = 80$, тогда $\angle 2 = 80° + 20° = 100°$.

Ответ: 100°.

Пример 2. Один из смежных углов в 3 раза больше другого. Найти величину меньшего угла.

Решение.



Пусть $\angle 1 = x$ — меньший угол, тогда $\angle 2 = 3x$, а их сумма равна 180°. Имеем уравнение $x + 3x = 180$, $4x = 180$, $x = 45$.

Итак, $\angle 1 = 45°$ — величина меньшего угла.

Ответ: 45°.

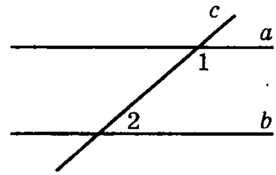
Пример 3. Один из двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей на 60° меньше другого. Найти больший из этих углов.

Дано: $a \parallel b$, c — секущая,

$\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние односторонние,

$\angle 2 = \angle 1 - 60°$.

Найти $\angle 1$.



Решение.

Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние односторонние углы при параллельных прямых a и b и секущей c. Пусть $\angle 1 > \angle 2$. Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = x + 60$, а их сумма равна 180° (по теореме о сумме односторонних углов). Имеем уравнение $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, или $x + 60 + x = 180$, $2x = 120$, $x = 60$. Тогда $\angle 1 = 60° + 60° = 120°$.

Ответ: 120°.

Пример 4. Один из двух внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей составляет 80% от другого. Найти величину большего угла.

Решение.

Пусть величина большего угла равна x, тогда величина меньшего угла будет равна $0{,}8x$, а их сумма 180°. Имеем уравнение $x + 0{,}8x = 180$; $1{,}8x = 180$, $x = 100$.

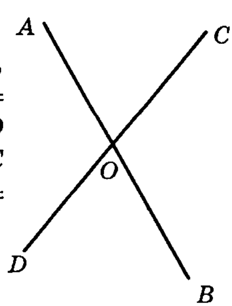
Ответ: 100°.

Пример 5. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Сумма углов AOD и COB равна 220°. Определить угол AOC.

Решение.

Так как $\angle AOD$ и $\angle COB$ вертикальные, то они равны, тогда $\angle AOD = \angle COB = 220° : 2 = 110°$. Заметим, что $\angle AOD$ и $\angle COB$ не могут быть острыми. $\angle AOC$ и $\angle AOD$ — смежные, тогда $\angle AOC = 180° - 110° = 70°$.

Ответ: 70°.



2.2. Треугольники

Пример 6. По трем медианам m_a, m_b и m_c ΔABC найти длину стороны $AC = b$.

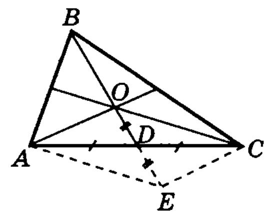
Решение.

Так как точка O — точка пересечения медиан, то

$$AO = \frac{2}{3}m_a,\ OC = \frac{2}{3}m_c,\ OD = \frac{1}{3}m_b.$$

Достроим ΔAOC до параллелограмма $AOCE$. Известно, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, т. е.

$AC^2 + OE^2 = 2\,(AO^2 + OC^2)$ или



$$b^2 + \frac{4}{9}m_b^2 = 2\left(\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9}m_c^2\right),$$

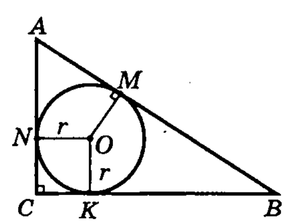
откуда находим

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2 + m_c^2\right) - m_b^2}\ .$$

Ответ: $b = \dfrac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2 + m_c^2\right) - m_b^2}$.

Пример 7. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности делит гипотенузу на отрезки 6 см и 9 см. Найти больший катет.

Решение.



$AM = AN$; $BM = BK$ — как касательные, проведенные к окружности из одной точки.

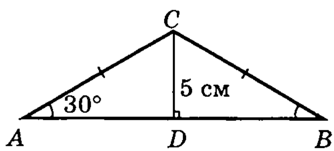
$ON = OK = r$; $ON \perp AC$;

$OK \perp CB$, тогда $CNOK$ — квадрат со стороной r. Так как по условию задачи $AM = 6$ см, $MB = 9$ см, то $AB = 6 + 9 = 15$ (см), тогда $AC = AN + NC =$ $= AM + r = 6 + r$ и $CB = CK + KB = r + BM = r + 9$.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$ или $(6 + r)^2 +$ $+ (9 + r)^2 = 15^2$, $2r^2 + 30r - 108 = 0$, $r^2 + 15r - 54 = 0$, откуда $r_1 = 3$; $r_2 = -18 < 0$.

Итак, больший катет $CB = 9 + 3 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.



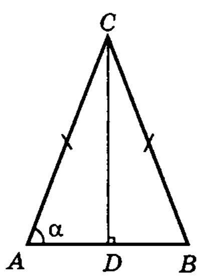
Пример 8. В равнобедренном треугольнике углы при основании 30°, а высота, опущенная на это основание, равна 5 см. Найти радиус описанной окружности.

Решение.

Пусть $\angle A = \angle B = 30°$ и $CD = 5$ см, тогда из ΔADC $AC = 2CD = 10$ (см) (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). По теореме синусов для ΔABC имеем

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R \text{ или } \frac{10}{\sin 30°} = 2R, \text{ откуда } R = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10.$$

Ответ: 10 см.



Пример 9. Найти длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25 см^2, а углы α при основании таковы, что tg α = 4.

Решение.

Так как ΔABC — равнобедренный ($AC = BC$), то CD — медиана, биссектриса и высота. Тогда $AB \perp CD$ и $AD = DB$.

Из ΔADC $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{CD}{AD}$;

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2AD\cdot CD = AD\cdot CD.$$

По условию задачи $\operatorname{tg}\alpha = 4$, тогда $\dfrac{CD}{AD} = 4$ или

$$CD = 4AD. \qquad (1)$$

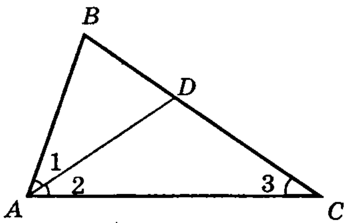
Так как $S_{\Delta ABC} = 25$ см^2, то $AD \cdot CD = 25$.

Учитывая (1), имеем $AD \cdot 4AD = 25$, $AD^2 = \frac{25}{4}$,

$$AD = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ (см). Тогда } AB = 2 \cdot AD = 5 \text{ (см).}$$

Ответ: 5 см.

Пример 10. Известно, что в ΔABC $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2 см больше стороны AB, а $AC = 5$ см. Найти AB и BC.



Решение.

Способ 1

Проведем биссектрису AD угла A, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

В ΔADC углы при основании равны, т. е. $\angle 2 = \angle 3$ и $AD = DC$.

Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$. Заметим, что $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1 = \angle 3$). Из подобия имеем

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC} \text{ или } \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}.$$

Итак, для нахождения x и y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{y}{5}, \\ \dfrac{x+2-y}{x} = \dfrac{y}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases}$$

откуда, вычитая из I уравнения II, получим $5y - 10 = 2y$, откуда $y = \frac{10}{3}$, тогда $5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3}$,

$$15x - 10x = 20,\ 5x = 20, \text{ т. е. } x = 4.$$

Итак, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Способ 2

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 180° - 3\alpha$. Полагая $AB = x$, $BC = x + 2$, по теореме синусов имеем

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x+2}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin(180° - 3\alpha)}, \text{ или } \begin{cases} \dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{x+2}{\sin 2\alpha}, \\ \dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{5}{\sin 3\alpha}. \end{cases}$$

Из I уравнения системы находим $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$, или

$$1 + \frac{2}{x} = 2\cos\alpha. \qquad (1)$$

Из II уравнения получим $x = \dfrac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Так как $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, то $x = \dfrac{5}{3 - 4\sin^2\alpha}$.

Подставив значение x в (1), получим уравнение

$1 + \dfrac{6 - 8\sin^2\alpha}{5} = 2\cos\alpha$, или $8\cos^2\alpha - 10\cos\alpha + 3 = 0$.

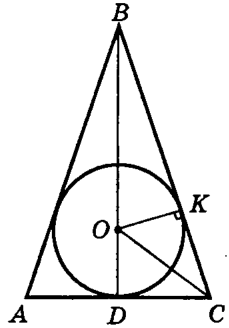
Решая уравнение, получим $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Если $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, то, учитывая (1), находим $x = 4$.

Если $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, то получим $1 + \dfrac{2}{x} = 1$, что невозможно. Итак, $AB = 4$ см, тогда $BC = x + 2 = 6$ (см).

Замечание. Если $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, то $\alpha = 60°$, тогда $\angle C = 60°$, $\angle A = 120°$, чего не может быть.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.



Пример 11. Найти радиус r окружности, вписанной в равнобедренный ΔABC, если $AB = BC = 10$ см и $AC = 12$ см.

Решение.

Высоту BD найдем из ΔABD по теореме Пифагора, где $AB = 10$ см,

$AD = \frac{1}{2}AC = 6$ см:

$BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

Тогда радиус r можно найти различными способами:

1) Из подобия ΔBOK и ΔBDC: $\frac{OK}{BO} = \frac{DC}{BC}$; $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$, откуда $r = 3$ см.

2) По свойству биссектрисы OC ΔBCD: $\frac{OD}{BO} = \frac{DC}{BC}$ или $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$ и т. д.

3) По формуле $S = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ — полупериметр, имеем $r = \frac{S}{p} = \frac{6 \cdot 8}{6+10} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

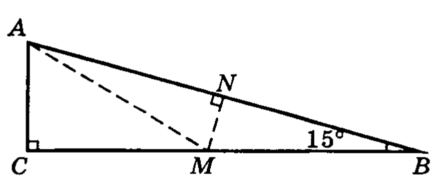
Пример 12. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника с острым углом в 15° составляет восьмую часть квадрата гипотенузы.

Решение.

Способ 1

Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$.

Проведем AM так, чтобы $\angle BAM = 15°$,



тогда $\angle AMC = \angle MAB + \angle MBA = 30°$ (внешний угол ΔAMB); $AM = = 2AC = 2b$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°). Значит, и $MB = 2b$.

Построим $MN \perp AB$, тогда $\Delta MNB \sim \Delta ACB$ и $\frac{MB}{AB} = \frac{NB}{BC}$ или $\frac{2b}{c} = \frac{c}{2a}$, откуда $ab = \frac{1}{4}c^2$, и так как $S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2}ab$, то $S_{\Delta ACB} = \frac{1}{8}c^2$, что и требовалось доказать.

Способ 2

$$a = c \cdot \cos 15°;\ b = c \cdot \sin 15°;$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin 15° \cos 15° =$$

$$= \frac{1}{4}c^2 \cdot (2 \sin 15° \cos 15°) = \frac{1}{4}c^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{8}c^2,$$

что и требовалось доказать.

Пример 13. Существует ли треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 13$?

Решение.

Пусть стороны треугольника (если он существует) равны x, $x + 13$, $x + 26$, тогда по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{где } p = \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ или}$$

$$p = \frac{3}{2}(x + 13);\ p - x = \frac{1}{2}(x + 39),\ p - (x + 13) = \frac{1}{2}(x + 13),$$

$$p - (x + 26) = \frac{1}{2}(x - 13),\ \text{тогда}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{4}(x+13)\sqrt{3(x+39)(x-13)}.$$

Пусть $x + 39 = m^2$, $x - 13 = 3n^2$, тогда $m^2 - 3n^2 = 52$, откуда $n^2 = \frac{1}{3}(m^2 - 52)$.

Наименьшее целое n достигается при $m = 8$, тогда $n^2 = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$, откуда $x = m^2 - 39 = 64 - 39 = 25$, тогда

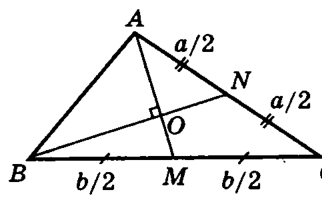
$$x + 13 = 38, \text{ и } x + 26 = 51.$$

Итак, стороны треугольника равны 25, 38 и 51. Следует заметить, что такой треугольник не является единственным. Так, например, при $m = 10$, $n^2 = \frac{1}{3}(100 - 52) = 16$, откуда $n = 4$ и $x = m^2 - 39 = 61$, $x + 13 = 74$ и $x + 26 = 87$, т. е. имеем треугольник со сторонами 61, 74, 87 ед.

Ответ: существует, например, со сторонами 25, 38 и 51 ед.

Пример 14. Стороны ΔABC равны соответственно $AC = a$, $BC = b$, а медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны AB.

Способ 1



Решение.

Используя теорему косинусов для ΔAMC, ΔBCN и ΔACB, имеем

$$AM^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab\cos\angle C, \qquad (1)$$

$$BN^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab\cos\angle C, \qquad (2)$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C. \qquad (3)$$

Так как по условию задачи $AM \perp BN$, то из ΔBOA имеем

$$AB^2 = AO^2 + BO^2. \qquad (4)$$

По свойству медианы треугольника имеем $BO = \frac{2}{3}BN$, $AO = \frac{2}{3}AM$, тогда (4) примет вид

$$AB^2 = \frac{4}{9}(AM^2 + BN^2). \qquad (5)$$

Упростим (5) с учетом (1) и (2):

$$AB^2 = \frac{4}{9}(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab\cos\angle C + b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab\cos\angle C),$$

или

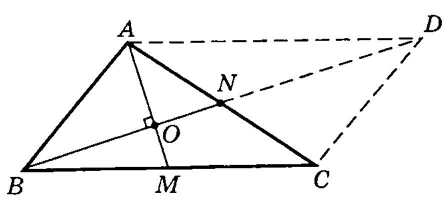
$$AB^2 = \frac{1}{9}(5a^2 + 5b^2 - 8ab\cos\angle C). \qquad (6)$$

Сравнивая (3) и (6), получим $4(a^2+b^2)=10ab\cos\angle C$, откуда $\cos\angle C = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{5ab}$, тогда (3) примет вид

$$AB^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2), \text{ откуда } AB = \sqrt{\frac{1}{5}\left(a^2+b^2\right)}.$$

Ответ: $AB = \sqrt{\frac{1}{5}\left(a^2+b^2\right)}$.

Способ 2



Пусть $BO = 2n$, $ON = n$, $AO = 2m$, $OM = m$ (по свойству медианы).

Дополним ΔABC до параллелограмма $ABCD$, тогда по свойству последнего имеем $2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2$ или, обозначив $AB = x$, имеем

$$2(x^2 + b^2) = 36n^2 + a^2. \qquad (1)$$

Из ΔAOB и ΔAON имеем:

$x^2 = 4m^2 + 4n^2$ и $4m^2 + n^2 = \frac{1}{4}a^2$, откуда $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = 3n^2$,

значит,

$$n^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right). \qquad (2)$$

Учитывая (2), равенство (1) примет вид

$2(x^2 + b^2) = 12(x^2 - \frac{1}{4}a^2) + a^2$ или $x^2 + b^2 = 6x^2 - a^2$,

$$5x^2 = a^2 + b^2, \text{ откуда } x = AB = \sqrt{\frac{1}{5}\left(a^2+b^2\right)}.$$

Ответ: $AB = \sqrt{\frac{1}{5}\left(a^2+b^2\right)}$.

Пример 15. Найти площадь треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, если известно, что произведение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 130.

Решение.

Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Известно, что если a, b, c — стороны треугольника, то $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, где

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) \text{ — полупериметр.}$$

Согласно условию задачи $R \cdot r = 130$.

Пусть $a = x$, $b = x + 2$, $c = x + 4$ — стороны треугольника, образующие арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, тогда

$$R \cdot r = \frac{abc}{4S}\cdot\frac{S}{p} = \frac{abc}{4p} = \frac{x(x+2)(x+4)}{2(3x+6)} = \frac{x(x+4)}{6} = 130,$$

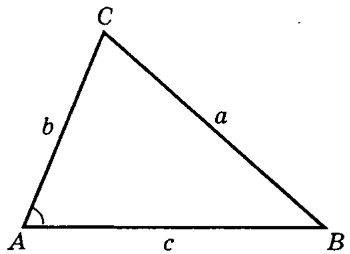
или $x^2 + 4x - 780 = 0$, откуда $x_1 = 26$, $x_2 = -30$ (не удовлетворяет, так как x — сторона треугольника). Итак, $x = 26$, тогда $x + 2 = 28$, $x + 4 = 30$, значит,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(26 + 28 + 30) = 42$,

$$S = \sqrt{42\cdot16\cdot14\cdot12} = \sqrt{14\cdot3\cdot16\cdot14\cdot12} =$$

$$= 14 \cdot 4 \cdot 6 = 336 \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: 336 кв. ед.



Пример 16. В ΔABC длины сторон a, b, c и площадь S связаны соотношением

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2).$$

Найти $\angle A$.

Решение.

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Известно, что $S_\Delta = \frac{1}{2} bc \sin \angle A$. Кроме того, по теореме косинусов имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$, откуда $bc = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot \cos \angle A}$, тогда $S_\Delta = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} \angle A$.

По условию задачи $S_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$ или, сравнивая правые части полученных равенств, получим

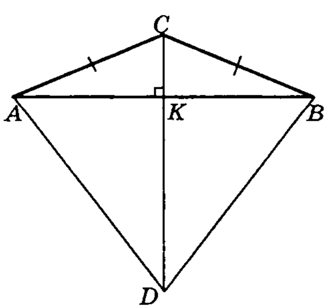
$$\frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2),$$

откуда имеем две возможности:

1) $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, т. е. $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ прямоугольный, где a — гипотенуза, b и c — катеты, тогда $\angle A = 90°$. Но равенство $b^2 + c^2 = a^2$ невозможно, так как тогда, учитывая условие задачи, получим $S = 0$.

2) $b^2 + c^2 - a^2 \neq 0$, тогда имеем $\operatorname{tg} \angle A = \sqrt{3}$, $\angle A = 60°$.

Ответ: 60°.



Пример 17. На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть $AB = 2x$, $AC = y$.

По условию задачи $S_{\Delta ABD} = 3S_{\Delta ABC}$.

Так как ΔABD — правильный, то

$$S_{\Delta ABD} = \frac{(AB)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}x^2, \qquad (1)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CK = x \cdot CK. \qquad (2)$$

$$\text{Из } \Delta AKC \;\; CK = \sqrt{y^2 - x^2}. \qquad (3)$$

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = x \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$. Так как

$$S_{\Delta ABD} = 3S_{\Delta ABC},$$

то, учитывая (1), (2) и (3), получим

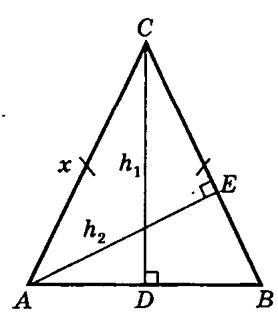
$$\sqrt{3}x^2 = 3x\sqrt{y^2 - x^2}, \text{ или } 3x^2 = 9(y^2 - x^2),\ x > 0,$$

$$4x^2 = 3y^2,\ 2x = \sqrt{3}\,y, \text{ откуда } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

и так как $\cos \angle CAK = \dfrac{x}{y}$, то $\cos \angle CAK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\angle CAK = 30°$, тогда $\angle CBK = 30°$ и $\angle C = 180° - (30° + 30°) = 120°$. Итак, углы ΔABC равны 30°, 30° и 120°.

Ответ: 30°, 30° и 120°.

Пример 18. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а разность двух неравных высот равна отношению периметра к боковой стороне. Найти боковую сторону.



Решение.

Пусть основание $AB = 10$ см, $AC = BC = x$. Пусть h_1 и h_2 — высоты треугольника, причем $h_1 > h_2$.

По условию задачи $h_1 - h_2 = \frac{P}{x}$, где P — периметр ΔABC,

$$h_1 - h_2 = \frac{2x+10}{x} = \frac{2(x+5)}{x}. \qquad (1)$$

$$\text{Из } \Delta ADC \ \ x^2 = h_1^2 + 25, \qquad (2)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_1 = 5h_1. \qquad (3)$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} x h_2$. $\qquad (4)$

Сравнивая (3) и (4), имеем

$5h_1 = \frac{1}{2} x h_2$, откуда $h_2 = \frac{10h_1}{x}$, тогда (1) примет вид

$$h_1 - \frac{10h_1}{x} = \frac{2(x+5)}{x}, \text{ откуда } h_1 = \frac{2(x+5)}{x-10}.$$

Учитывая (2), имеем

$x^2 = \frac{4(x+5)^2}{(x-10)^2} + 25$, или $(x^2 - 25)(x - 10)^2 = 4(x + 5)^2$.

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x + 5 \neq 0$, тогда из последнего равенства получим

$(x - 5)(x - 10)^2 = 4(x + 5)$ или, упростив, имеем

$$x^3 - 25x^2 + 196x - 520 = 0. \qquad (5)$$

Можно убедиться в том, что $x = 13$ — корень уравнения (5), тогда левую часть уравнения можно преобразовать так:

$$x^2(x - 13) - 12x(x - 13) + 40(x - 13) = 0,$$

$$(x - 13)(x^2 - 12x + 40) = 0, \text{ откуда } x = 13.$$

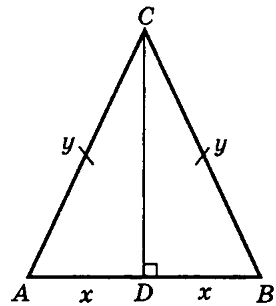
Уравнение $x^2 - 12x + 40 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, боковая сторона ΔABC равна 13 см.

$$AC = CB = 13 \text{ см}.$$

Ответ: 13 см.

Пример 19. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 12, а сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна 83/8. Найти стороны треугольника.



Решение.

Пусть $AC = BC = y > 0$,

$AB = 2x > 0$.

По условию $CD = 12$, тогда из ΔADC получим

$$y^2 - x^2 = 144. \qquad (1)$$

Известно, что $S_{\Delta ABC} = \dfrac{abc}{4R}$, где

$a = b = y$, $c = AB = 2x$, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{xy^2}{2R}. \qquad (2)$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = p \cdot r = \dfrac{1}{2}(2y + 2x)r =$

$$=(x + y)r;\ S_{\Delta ABC} = (x + y)r. \qquad (3)$$

Кроме того, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CD = 12x. \qquad (4)$

Учитывая (4), соотношения (2) и (3) примут вид

$$\frac{xy^2}{2R} = 12x, \text{ или } y^2 = 24R, \text{ откуда } R = \frac{y^2}{24}. \qquad (5)$$

Аналогично из (3) имеем $(x + y)r = 12x$, откуда

$$r = \frac{12x}{x+y}. \qquad (6)$$

По условию задачи $R + r = \frac{83}{8}$, тогда, складывая (5) и (6), получим $\frac{12x}{x+y}+\frac{y^2}{24}=\frac{83}{8}$ или, учитывая (1), имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{12x}{x+y}+\frac{y^2}{24}=\frac{83}{8}, \\ y^2-x^2=144. \end{cases}$$

Заметим, что решение полученной системы обычным способом, например подстановкой, приводит к большим техническим сложностям. Приведем другой способ решения с помощью подстановки: $y = tx$, где $t > 0$.

$$\begin{cases} \frac{12x}{x+tx}+\frac{t^2x^2}{24}=\frac{83}{8}, \\ t^2x^2-x^2=144; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{12}{1+t}+\frac{t^2x^2}{24}=\frac{83}{8}, \\ x^2=\frac{144}{t^2-1}. \end{cases}$$

Подставив значение x^2 в I уравнение полученной системы, получим после упрощения $35t^2 - 96t + 13 = 0$, откуда $t_1=\frac{13}{5}$, $t_2=\frac{1}{7}$.

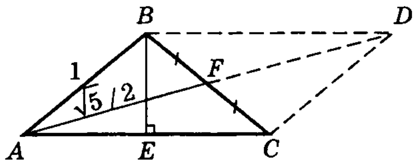
Учитывая подстановку $y = tx$, получим две системы:

$$1)\ \begin{cases} y=\frac{13}{5}x, \\ y^2-x^2=144; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} y=\frac{1}{7}x, \\ y^2-x^2=144. \end{cases}$$

Из системы 1 имеем $x = 5$, $y = 13$.
Система 2 не имеет решений.
Итак, $x = 5$, $y = 13$, тогда $AB = 2x = 10$ и $AC = BC = 13$.
Ответ: 13, 13, 10.

Пример 20. В тупоугольном равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 1, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найти площадь треугольника.

Решение.



Пусть $AB = BC = 1$,

$AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ — медиана,

BE — высота ΔABC.

Достроим ΔABC до параллелограмма $ABCD$, тогда по свойству параллелограмма имеем

$$BC^2 + AD^2 = 2(AB^2 + AC^2) \text{ или } 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 =$$

$$= 2(1 + AC^2), \text{ откуда находим } AC = \sqrt{2},$$

тогда $AE = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из ΔAEB по теореме Пифагора

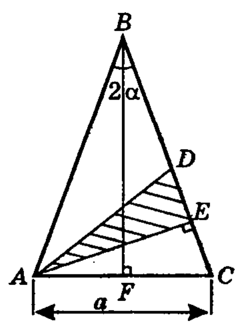
$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2}, \text{ или}$$

$$BE = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ следовательно,}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $S_{\Delta ABC} = 0{,}5$ (кв. ед.).

Ответ: 0,5.



Пример 21. В равнобедренном треугольнике с основанием a острый угол при вершине равен 2α. Найти площадь треугольника, заключенного между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне.

Решение.

Пусть в ΔABC $AB = BC$, $AC = a$. $\angle B = 2\alpha$, AE — высота к боковой стороне BC, AD — медиана, тогда

$$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE. \qquad (1)$$

Из ΔBFC $\angle C = 90° - \alpha$, из ΔAEC $\angle EAC = 90° - \angle C = \alpha$, тогда $AE = a \cos \alpha$ и $DE = DC - EC = \frac{1}{2} BC - EC$. (2)

Из ΔAEC $EC = AC \sin \alpha = a \sin \alpha$, тогда (2) примет вид $DE = \frac{1}{2} BC - a \sin \alpha$.

Из ΔBFC $BC = \dfrac{FC}{\sin \alpha} = \dfrac{a}{2 \sin \alpha}$, значит,

$$DE = \frac{a}{4 \sin \alpha} - a \sin \alpha = \frac{a}{4}\left(\frac{1}{\sin \alpha} - 4 \sin \alpha\right). \qquad (3)$$

Учитывая (3) и $AE = a \cos \alpha$, равенство (1) примет вид

$$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} a \cos \alpha \cdot \frac{a}{4}\left(\frac{1}{\sin \alpha} - 4 \sin \alpha\right) =$$

$$= \frac{a^2}{8}(1 - 4 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha \text{ (кв. ед.)}.$$

Замечание. Выражение в скобке можно разложить на множители (привести к виду, удобному для логарифмирования):

$$1 - 4 \sin^2 \alpha = 4\left(\frac{1}{4} - \sin^2 \alpha\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \sin \alpha\right)\left(\frac{1}{2} + \sin \alpha\right) =$$

$$= 4(\sin 30° - \sin \alpha)(\sin 30° + \sin \alpha) =$$

$$= 4\left(2 \sin \frac{30° - \alpha}{2} \cos \frac{30°}{2}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{30° + \alpha}{2} \cos \frac{30° - \alpha}{2}\right) =$$

$$= 4\left(2 \sin \frac{30° - \alpha}{2} \cos \frac{30° - \alpha}{2}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{30° + \alpha}{2} \cos \frac{30° + \alpha}{2}\right) =$$

$$= 4 \sin (30° - \alpha) \sin (30° + \alpha), \text{ тогда}$$

$$S_{\Delta ADE} = \frac{a^2}{2} \sin (30° - \alpha) \sin (30° + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ: $\frac{a^2}{8}(1 - 4\sin^2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$ или

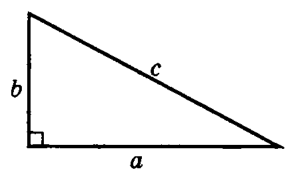
$\frac{a^2}{2}\sin(30° - \alpha)\sin(30° + \alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

Пример 22. Доказать, что если a и b — катеты, c — гипотенуза, то $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где r — радиус вписанной окружности.

Решение.

Способ 1

Идея решения задачи заключается в сравнении площадей.



$S = \frac{1}{2}ab$; с другой стороны,

$S = pr = \frac{1}{2}(a + b + c)r$, откуда,

сравнивая правые части, имеем

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a + b + c)\,r,\quad r = \frac{ab}{a+b+c}. \qquad (1)$$

По теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2,\text{ или } (a + b)^2 - 2ab = c^2,\text{ значит,}$$

$$2ab = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c),$$

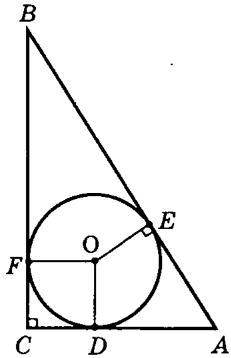
тогда (1) примет вид

$$r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}.$$

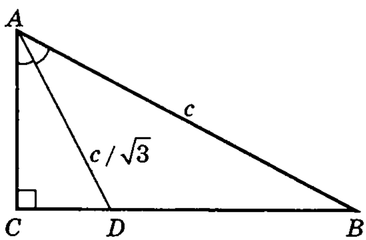
Итак, $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, что и требовалось доказать.

Способ 2

Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD, OE и OF в точки касания, тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$, $OE \perp AB$.



Следовательно $CFOD$ – квадрат, тогда $OD = OF = OE = r$, $AD = AC - CD = b - r$, $BF = BC - FC = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки. Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда получим $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, что и требовалось доказать.



Пример 23. Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна c, а биссектриса одного из острых углов равна $\frac{c}{\sqrt{3}}$.

Решение.

Пусть $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$.

Из ΔACD $AC = AD\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha$.

Из ΔABC $AC = AB\cos 2\alpha = c\cos 2\alpha$.

Сравнивая правые части, имеем

$$\frac{c}{\sqrt{3}}\cos\alpha = \cos 2\alpha \text{ или } \sqrt{3}\cos 2\alpha - \cos\alpha = 0.$$

Так как $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, то полученное уравнение примет вид: $2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0$, откуда находим $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Заметим, что $\angle A < 90°$, тогда $\cos\alpha > 0$, так что значение $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ не подходит. Если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

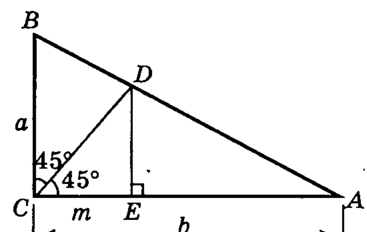
$\alpha = 30°$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = 30°$, а $\angle CAB = 60°$ и $\angle B = 30°$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $AC = \frac{c}{2}$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. Попытка решить задачу алгебраическим способом приводит к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, например: $AC = x$, $BC = y$, $CD = z$, тогда $\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \frac{1}{3}c^2, \\ \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z} \end{cases}$ и т. д.

Пример 24. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найти длину биссектрисы прямого угла.

Решение.



Условие этой задачи заимствовано из книги Е.А. Островского и др. «Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузах» (изд. 2-е. Минск, 1983. № 271. С. 94). Приведем другие, более простые способы решения.

Способ 1

Из точки D опустим перпендикуляр DE на катет $AC = b$. Тогда $\angle CDE = 45°$, т. е. $CE = DE = m$. Из ΔCED $CD = m\sqrt{2}$.

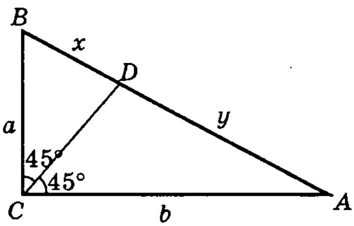
Заметим, что $\Delta AED \sim \Delta ACB$ (как прямоугольные с общим углом A).

Тогда $\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$ или $\frac{m}{b-m} = \frac{a}{b}$, откуда $m = \frac{ab}{a+b}$.

Значит, $CD = m\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Способ 2



Пусть $BD = x > 0$, $AD = y > 0$. По свойству биссектрисы треугольника имеем $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$.

С другой стороны, из ΔACB имеем: $(x + y)^2 = a^2 + b^2$.

Полученные уравнения образуют систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}, \\ (x+y)^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Из *I* уравнения системы $y = \dfrac{b}{a}x$, тогда уравнение примет вид $(x + \dfrac{b}{a}x)^2 = a^2 + b^2$, откуда

$$x^2 = \frac{(a^2+b^2)a^2}{(a+b)^2}. \qquad (1)$$

Из ΔBCD по теореме косинусов имеем $x^2 = a^2 + CD^2 - 2a \cdot CD \cdot \cos 45°$ или, учитывая (1), получим $\dfrac{(a^2+b^2)a^2}{(a+b)^2} = a^2 + CD^2 - \sqrt{2}\,a \cdot CD$, или

$CD^2 - \sqrt{2}\,a \cdot CD + \dfrac{2a^3b}{(a+b)^2} = 0$ — квадратное уравнение относительно CD.

Решая уравнение, находим

$$CD = \frac{\sqrt{2}a(a+b) \pm \sqrt{2}a(a-b)}{2(a+b)}.$$

Если $a > b$, то $CD = \dfrac{\sqrt{2}a(a+b+a-b)}{2(a+b)} = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{a+b}$.

Если $a < b$ (как в нашем случае), то $CD = \dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{a+b}$, если $a > b$; $\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$, если $a < b$.

Способ 3 (см. рис. способ 2)

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда из ΔBCD по теореме синусов имеем

$$\frac{CD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{x}{\sin 45^\circ}, \text{ или } \frac{CD}{\cos\alpha} = \sqrt{2}\,x. \qquad (1)$$

Кроме того, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$. Из ΔACB $(x + y)^2 = a^2 + b^2$, откуда

$x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$, $y = \dfrac{b}{a}x$, тогда $x + \dfrac{b}{a}x = \sqrt{a^2 + b^2}$, откуда

$x = \dfrac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a+b}$, тогда, учитывая (1), получим

$$CD = \frac{a\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{a+b} \cos\alpha.$$

Но $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, значит, $CD = \dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Пример 25. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство $c \geq (3\sqrt{3} - 1)r$, где c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

Решение.

Известно, что среднее арифметическое n положительных чисел не меньше их среднего геометрического, поэтому, в частности,

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ или}$$

$$\frac{3p-(a+b+c)}{3} = \frac{3p-2p}{3} =$$

$$= \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Но $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$, тогда

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}} = \sqrt[3]{\frac{p^2r^2}{p}} = \sqrt[3]{pr^2}, \text{ или } \frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{pr^2},$$

или $\dfrac{p^3}{27} \geq pr^2$, откуда $p \geq 3\sqrt{3}\,r$. (1)

Так как $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$ и $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{ab}{a+b+c}$, то неравенство (1) примет вид:

$\dfrac{1}{2}(a + b + c) \geq 3\sqrt{3} \cdot \dfrac{ab}{a+b+c}$, или $(a + b + c)^2 \geq 6\sqrt{3}\,ab$,

или $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 6\sqrt{3}\,ab$.

Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то $2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 6\sqrt{3}\,ab$, и $c(a + b + c) \geq (3\sqrt{3} - 1)ab$.

Но $a + b + c = 2p$, тогда $2pc \geq (3\sqrt{3} - 1)ab$, и так как $ab = 2S_\Delta$, то имеем $2pc \geq 2(3\sqrt{3} - 1)S$, или, разделив обе части неравенства на $2p$ и, учитывая, что $\frac{S}{p} = r$, получим $c \geq \left(3\sqrt{3}-1\right)\frac{S}{p}$, или $c \geq (3\sqrt{3} - 1)r$, что и требовалось доказать.

Пример 26. Найти углы прямоугольного треугольника, если известно, что $a^2 + b^2 = \frac{8}{\sqrt{3}}S$, где a и b — катеты, S — площадь.

Решение.

Известно, что $S = \frac{1}{2}ab$, где a и b — катеты.

По условию $a^2 + b^2 = \frac{8}{\sqrt{3}}S$, тогда получим $a^2 + b^2 =$

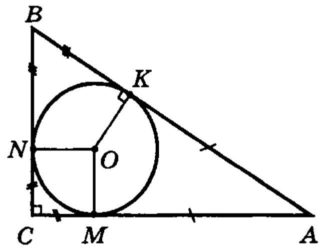
$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}ab, \text{ или } \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \text{ или } \frac{a}{b}+\frac{b}{a} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

Пусть $\frac{a}{b} = x$, тогда (1) примет вид: $x + \frac{1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, или $x^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1 = 0$, откуда находим $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Так как $\frac{a}{b} = x = \operatorname{tg}\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. углы прямоугольного треугольника равны 30°, 60° и 90°.

Ответ: 30°, 60° и 90°.

Пример 27. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника можно найти по формуле $S = (2R + r)r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.



Решение.

Способ 1

Пусть в ΔABC ($\angle C = 90°$) $OM = ON = OK = r$ — радиус вписанной окружности.

Так как ΔABC — прямоугольный, то AB — диаметр описанной окружности, тогда $AB = 2R$.

Известно, что $S_\Delta = p \cdot r$, где p — полупериметр.

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $AC + BC = 2r + AB$, тогда

$$S = \frac{1}{2}(AC + BC + AB)r = \frac{1}{2}(2r + AB + AB) =$$

$$= (r + AB)r = (r + 2R)r.$$

Итак, $S = (2R + r)r$, что и требовалось доказать.

Способ 2

Так как ΔABC — прямоугольный, то $AB = 2R$, тогда $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC$. Пусть $AC = x > 0$, $BC = y > 0$, тогда

$$S = \frac{1}{2}xy. \qquad (1)$$

Из ΔABC $x^2 + y^2 = 4R^2$. (2)

Известно, что $r = \dfrac{x + y - 2R}{2}$,

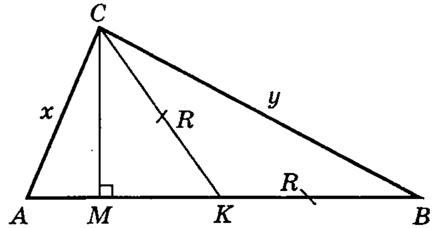
откуда $x + y = 2(R + r)$. (3)

Из (2) и (3) имеем систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2 \\ x + y = 2(R + r). \end{cases}$

Упростим *I* уравнение системы: $(x + y)^2 - 2\,xy = 4R^2$ или, учитывая (3), имеем: $4(R + r)^2 - 2\,xy = 4R^2$, откуда $2xy = 4(R + r)^2 - 4R^2$ или $\frac{1}{2}xy = (R + r)^2 - R^2$; но $\frac{1}{2}xy = S$, тогда $S = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2$ или $S = r(2R + r)$, что и требовалось доказать.

Пример 28. В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти отношение R/r, если $S_{\Delta ABC} = 144$ см^2.

Решение.



Так как ΔABC — прямоугольный, то $AB = 2R$ — диаметр описанной окружности, где $CK = AK = KB = R$. Пусть $AC = x > 0$, $BC = y > 0$, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}xy = pr = 144, \text{ откуда } xy = 288;$$

$$p = \frac{1}{2}(x + y + 2R) \text{ или } \frac{1}{2}(x + y + 2R)r = 144,$$

$$r = \frac{288}{x+y+2R}, \text{ тогда } \frac{R}{r} = R : \frac{x+y-2R}{2} = \frac{2R}{x+y-2R},$$

$$\text{где } r = \frac{x+y-2R}{2}.$$

По условию задачи $CK - CM = 7$ см или $R - CM = 7$.

Но $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2} \cdot 2R \cdot CM$, или $xy = 2R \cdot CM$,

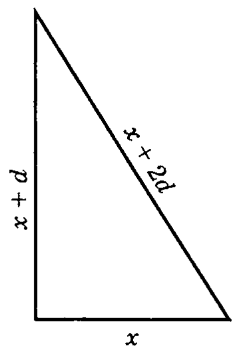
откуда $CM = \dfrac{xy}{2R} = \dfrac{244}{2R} = \dfrac{144}{R}$. Следовательно, имеем уравнение $R - \dfrac{144}{R} = 7$, или $R^2 - 7R - 144 = 0$, откуда $R = 16$, $R = -9$ (не подходит, так как $R > 0$).

Итак, $R = 16$. Кроме того, из ΔACB $x^2 + y^2 = 4R^2$ или $x^2 + y^2 = 1024$, и так как $xy = 288$, то получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ xy = 288; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ 2xy = 576. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы и учитывая, что $x + y > 0$, имеем $(x + y)^2 = 1600$, откуда $x + y = 40$. Тогда $\frac{R}{r} = \frac{2R}{x+y-2R} = \frac{32}{40-32} = \frac{32}{8} = 4$.

Ответ: 4.



Пример 29. Периметр прямоугольного треугольника равен 12 см. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Решение.

Пусть стороны треугольника равны x, $x + d$, $x + 2\,d$, где d — разность прогрессии.

Так как по условию $P = 12$ см, то получим $x + (x + d) + (x + 2d) = 12$ или $3x + 3d = 12$, откуда

$$x + d = 4. \qquad (1)$$

С другой стороны, по теореме Пифагора,

$$x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2,\ x^2 + 16 = (x + 2d)^2,$$

откуда

$$xd + d^2 = 4. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} xd + d^2 = 4, \\ x + d = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} d(x + d) = 4, \\ x + d = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} d = 1, \\ x = 3, \end{cases} \text{ тогда}$$

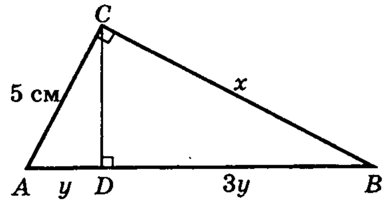
$$r = \frac{1}{2}(x + (x + d) - (x + 2d)) = \frac{x-d}{2} = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Итак, $r = 1$.

Ответ: 1 см.

Пример 30. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит ее в отношении 1:3. Найти площадь треугольника, если один из катетов равен 5 см.

Решение.



Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = 5$ см, $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$.

Пусть $AD = y > 0$, $BC = x > 0$, тогда $DB = 3y$, $AB = 4y$.

По теореме Пифагора из ΔABC имеем

$$x^2 + 25 = 16y^2. \qquad (1)$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot 4y$, или $5x = 4y \cdot CD$. Но $CD^2 = AD \cdot DB$ (по свойству перпендикуляра CD, опущенного из вершины прямого угла C на гипотенузу AB). Значит, $CD^2 = 3y^2$, $CD = \sqrt{3}\, y$, тогда $5x = 4y \cdot \sqrt{3}\, y$, или $5x = 4\sqrt{3}\, y^2$. (2)

Соотношения (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} x^2 + 25 = 16y^2, \\ 5x = 4\sqrt{3}y^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x^2+25}{5x} = \frac{4}{\sqrt{3}},$$

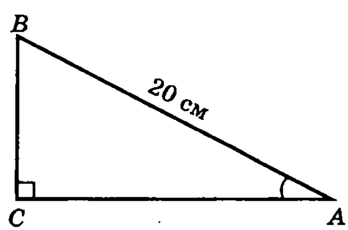
$\sqrt{3}\, x^2 - 20\, x + 25\sqrt{3} = 0$, откуда $x_1 = 5\sqrt{3}$, $x_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Корень $x_2 = \frac{5}{\sqrt{3}} < 5$ — не годится, так как $CB > AC$.

Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ (см²).

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ см².

Пример 31. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 см, а косинус одного угла равен 0,8. Найти больший катет.



Решение.

Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 20$ см, $\cos \angle A = 0{,}8$. Пусть AC — больший катет, тогда $\cos \angle A = \dfrac{AC}{AB}$, откуда $AC = 20 \cdot 0{,}8 = 16$ (см).

Ответ: 16 см.

Пример 32. В прямоугольном треугольнике тангенс одного угла равен 0,6. Меньший катет равен 3 см. Найти больший катет.

Решение. (См. рис. к задаче № 31)

Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = 0{,}6$, $BC = 3$ см — меньший катет, тогда по определению тангенса острого угла имеем $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{BC}{AC}$ или $0{,}6 = \dfrac{3}{AC}$, откуда $AC = \dfrac{3}{0{,}6} = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

Пример 33. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 2 и 5. Найти больший катет треугольника.

Решение.

Пусть $r = 2$ и $R = 5$ — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Пусть x — больший катет, y — меньший катет.

Известно, что в прямоугольном треугольнике

$$r = \frac{1}{2}(x + y - z),$$

где $z = AB$ — диаметр описанной окружности (так как вокруг любого прямоугольного треугольника можно описать окружность, $\angle C = 90°$).

Значит, $z = 2R = 10$,

$$x + y - z = 2r \text{ или } x + y = 14.$$

Кроме того, $x^2 + y^2 = z^2$ или $x^2 + y^2 = 100$. Решая систему $\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ x+y=14, \end{cases}$ находим больший катет $x = 8$.

Ответ: 8.

2.3. Четырехугольники

Пример 1. Найти сумму углов выпуклого: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) десятиугольника.

Решение.

Известно, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$, тогда:

а) $180°(4 - 2) = 360°$; б) $180°(5 - 2) = 540°$;

в) $180°(6 - 2) = 720°$; г) $180°(10 - 2) = 1440°$.

Ответ: а) 360°; б) 540°; в) 720°; г) 1440°.

Пример 2. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен:

а) 90°; б) 60°; в) 108°; г) 135°?

Решение.

Если выпуклый многоугольник имеет n сторон (углов), то получим уравнение:

а) $180°(n - 2) = 90°n$, $2(n - 2) = n$, $2n - 4 = n$, $n = 4$.

б) $180°(n - 2) = 60°n$, $3(n - 2) = n$, $3n - 6 = n$, $n = 3$.

в) $180°(n - 2) = 108°n$, $5(n - 2) = 3n$, $2n = 10$, $n = 5$.

г) $180°(n - 2) = 135°n$, $4(n - 2) = 3n$, $4n - 3n = 8$, $n = 8$.

Ответ: а) 4; б) 3; в) 5; г) 8.

Пример 3. Найти углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 3, 6, 8.

Решение.

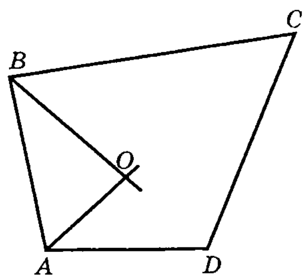
Пусть k — коэффициент пропорциональности углов выпуклого четырехугольника. Тогда углы его будут равны соответственно k, $3k$, $6k$, $8k$, а их сумма — 360°.

Имеем уравнение $k + 3k + 6k + 8k = 360$, $18k = 360$, откуда $k = 20$, значит, углы будут равны:

$$20°,\ 20° \cdot 3 = 60°,\ 20° \cdot 6 = 120° \text{ и } 20° \cdot 8 = 160°.$$

Ответ: 20°, 60°, 120°, 160°.

Пример 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O. Доказать, что угол между биссектрисами этих углов равен полусумме углов C и D ($\angle C + \angle D \leq 180°$).



Решение.

Пусть O — точка пересечения биссектрис углов A и B, тогда $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$.

Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°, то $\angle A + \angle B = 360° - (\angle C + \angle D)$.

Тогда $\angle AOB = 180° - \frac{1}{2}(360° - (\angle C + \angle D))$ или

$$\angle AOB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D).$$

Пример 5. Периметр параллелограмма равен 30 см. Найти стороны параллелограмма, если одна сторона на 3 см больше другой.

Решение.

Пусть меньшая сторона параллелограмма равна x см, тогда большая сторона будет $(x + 3)$ см. Так как по условию задачи периметр равен 30 см, то получим уравнение $2(x + (x + 3)) = 30$, или $x + (x + 3) = 15$,

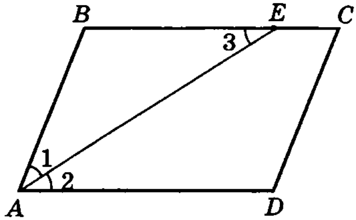
$2x = 15 - 3$, $2x = 12$, $x = 6$, тогда $x + 3 = 9$.

Значит, стороны параллелограмма 6 см и 9 см.

Ответ: 6 см и 9 см.

Пример 6. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке E. Найти периметр параллелограмма, если $BE = 12$ см, $EC = 9$ см.

Решение.



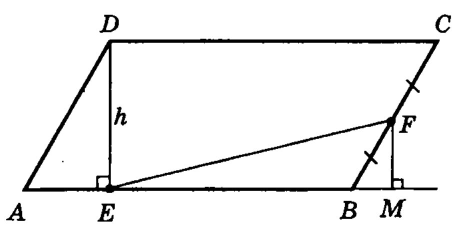
Так как AE — биссектриса $\angle A$, то $\angle 1 = \angle 2$. Так как $AD = BC$ (по свойству параллелограмма) и $AD \parallel BC$, то $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей AE. Тогда $\angle 1 = \angle 3$. Значит, ΔABE — равнобедренный (если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный). По условию задачи $BE = 12$ см, значит, $AB = 12$ см. Следовательно, $BC = BE + EC = 12 + 9 = 21$ (см). Если P — периметр $ABCD$, то

$$P = 2 \cdot (AB + AD) = 2(12 + 21) = 66 \text{ (см)}.$$

Ответ: 66 см.

Пример 7. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $BE : EA = 3 : 1$; F — середина BC. Найти отношение площади четырехугольника $BEDC$ к площади ΔBEF, если DE — высота параллелограмма.

Решение.



Пусть $DE = h$ — высота параллелограмма $ABCD$, тогда $FM = \dfrac{1}{2}h$, так как F — середина BC.

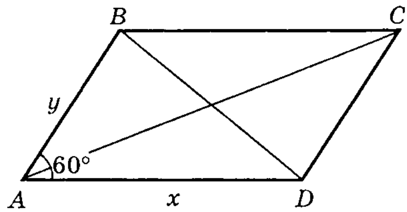
Пусть $AE = x$, тогда $BE = 3x$. Значит, $AB = DC = 4x$.

$$S_{BEDC} = \frac{DC + BE}{2} \cdot DE = \frac{4x + 3x}{2} h = \frac{7}{2} xh.$$

$$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot FM = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} h = \frac{3}{4} xh, \text{ тогда}$$

$$S_{BEDC} : S_{\Delta BEF} = \frac{7}{2} xh : \frac{3}{4} xh = \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 14 : 3.$$

Ответ: 14 : 3.



Пример 8. Острый угол параллелограмма равен 60°. Определить отношение длин сторон, если отношение квадратов длин диагоналей параллелограмма равно 19/7.

Решение.

Пусть $AB = y$, $AD = x$.

По условию $\angle A = 60°$. Из ΔABD по теореме косинусов имеем $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cos 60°$,

$$BD^2 = x^2 + y^2 - xy.$$

Так как $\angle BAD = 60°$, то $\angle ADC = 180° - 60° = 120°$, тогда из ΔADC аналогично находим $AC^2 = x^2 + y^2 + xy$.

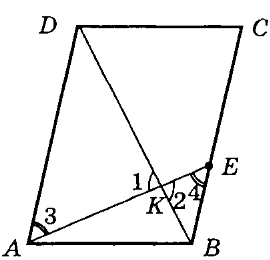
Так как $AC > BD$, то данное отношение 19/7 равно AC^2/BD^2 (а не BD^2/AC^2).

Имеем уравнение $\dfrac{x^2+y^2+xy}{x^2+y^2-xy} = \dfrac{19}{7}$ или

$$\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 + \frac{x}{y}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 - \frac{x}{y}} = \frac{19}{7}, \text{ откуда находим } \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \text{ и } \frac{x}{y} = \frac{2}{3}.$$

Заметим, что оба значения удовлетворяют условию задачи, так как дают фактически один и тот же параллелограмм.

Ответ: 3 : 2.



Пример 9. В параллелограмме $ABCD$ луч, проведенный из вершины A, делит сторону BC в отношении 3 : 5 ($BC > AB$). В каком отношении луч делит диагональ BD?

Решение.

По условию задачи $BE : EC = 3 : 5$. Заметим, что $\Delta AKD \sim \Delta EKD$ (по двум углам, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные и $\angle 3 = \angle 4$ — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AE).

Из подобия имеем

$$\frac{BK}{KD} = \frac{BE}{AD}. \tag{1}$$

Но $BE : EC = 3 : 5$ (по условию), или $\frac{BE}{BC - BE} = \frac{3}{5}$.

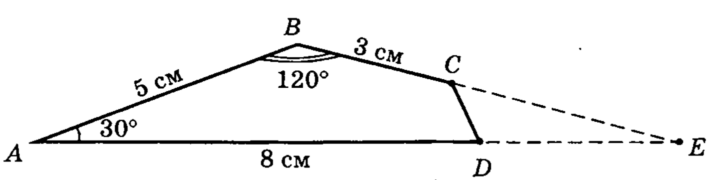
Так как $BC = AD$, то $\frac{BE}{AD - BE} = \frac{3}{5}$, или

$\frac{AD - BE}{BE} = \frac{5}{3}$, $\frac{AD}{BE} - 1 = \frac{5}{3}$, $\frac{AD}{BE} = \frac{8}{3}$, откуда

$\frac{BE}{AD} = \frac{3}{8}$. Учитывая (1), имеем $\frac{BK}{KD} = \frac{3}{8}$.

Ответ: 3 : 8.

Пример 10. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 120°$. Найти сторону CD.



Решение.

Продолжим стороны BC и AD четырехугольника $ABCD$ до их пересечения в точке E. Тогда $\angle E = 180° - (30° + 120°) = 30°$. Так как $\angle A = 30°$ и $\angle E = 30°$, то ΔABE — равнобедренный и $AB = BE = 5$ см. Так как $BC = 3$ см (по условию), то $CE = 2$ см.

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot BE \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2}AB \cdot AE \cdot \sin\angle A, \text{ или}$$

$5 \sin 120° = AE \cdot \sin 30°$, или $5\cos 30° = (8 + DE) \cdot \frac{1}{2}$,

или $5\sqrt{3} = 8 + DE$, откуда $DE = 5\sqrt{3} - 8$.

Замечание. Для нахождения DE можно было использовать теорему синусов: $\frac{AB}{\sin\angle E} = \frac{AE}{\sin\angle B}$ и т. д.

Теперь из ΔDEC по теореме косинусов находим CD:

$$CD^2 = DE^2 + CE^2 - 2 \cdot DE \cdot CE \cos 30°, \text{ или}$$

$$CD^2 = (5\sqrt{3} - 8)^2 + 4 - 2(5\sqrt{3} - 8) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$CD^2 = 113 - 64\sqrt{3}$, откуда $CD = \sqrt{113 - 64\sqrt{3}} \approx 1{,}5$ (см).

Ответ: $\approx 1{,}5$ см.

Пример 11. Найти периметр ромба, если диагонали относятся как 3 : 4, а площадь ромба равна 96 см^2.

Решение.

Пусть d_1 и d_2 — диагонали ромба, P — периметр и S — площадь, тогда $d_1 : d_2 = 3 : 4$ и $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 = 96$, откуда $d_1d_2 = 192$. Для нахождения d_1 и d_2 имеем систему $\begin{cases} \frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{4}, \\ d_1d_2 = 192. \end{cases}$ Перемножив уравнения системы, получим $d_1^2 = \frac{3}{4} \cdot 192$ или $d_1^2 = 144$, откуда $d_1 = 12$, тогда

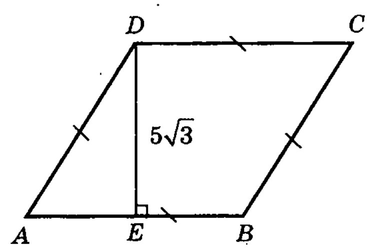
$$d_2 = \frac{192}{12} = 16.$$

Если x — сторона ромба, то $x^2 = \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2$, или $4x^2 = d_1^2 + d_2^2$, $4x^2 = 12^2 + 16^2$, $4x^2 = 400$, $x^2 = 100$, откуда $x = 10$, тогда $P = 4x = 40$ (см).

Ответ: 40 см.

Пример 12. Острый угол ромба относится к величине тупого угла как 1 : 2. Высота ромба равна $5\sqrt{3}$. Найти периметр ромба.

Решение.



Пусть $DE = 5\sqrt{3}$ — высота ромба $ABCD$. Пусть

$\angle A : \angle ADC = 1 : 2$.

Если $\angle A = x$, то $\angle ADC = 2x$ и так как эти углы внутренние односторонние, то их сумма равна $180°$, т. е. имеем уравнение $x + 2x = 180$, $3x = 180$, $x = 60$. Значит, $\angle A = 60°$.

Из ΔAED $\sin\angle A = \frac{DE}{AD}$, откуда находим

$$AD = \frac{DE}{\sin 60°} = \frac{5\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 10, \text{ тогда } P_{ABCD} = 4 \cdot AD = 40.$$

Ответ: 40.

Пример 13. Определить сторону ромба, зная, что площадь его равна Q, а отношение диагоналей равно $m : n$.

Решение.

Если обозначить диагонали ромба через $2x$ и $2y$, то согласно условию задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy = Q, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}. \end{cases}$$

Перемножив левые и правые части, имеем

$2x^2 = \frac{m}{n} \cdot Q$, откуда $x = \sqrt{\frac{mQ}{2n}}$, тогда $y = \frac{Q}{2x} = \sqrt{\frac{nQ}{2m}}$.

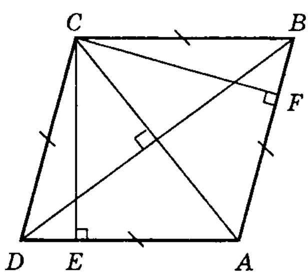
Сторону ромба найдем по теореме Пифагора:

$a^2 = x^2 + y^2$, или $a^2 = \frac{mQ}{2n} + \frac{nQ}{2m}$, $a^2 = Q \cdot \frac{m^2+n^2}{2mn}$,

откуда $a = \sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn} \cdot Q}$, где a — сторона ромба.

Ответ: $\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2mn} \cdot Q}$.

Пример 14. Диагонали ромба $ABCD$ равны 15 м и 20 м. Из вершины C тупого угла проведены две высоты: CE и CF. Вычислить площадь $AECF$.



Решение.

Если x — сторона ромба, то

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2},$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 + 20^2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ (м)}.$$

По формуле площади ромба имеем

$S_{ABCD} = AD \cdot CE = AB \cdot CF = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, откуда находим, что $CE = CF = \frac{AC \cdot BD}{\sqrt{AC^2 + BD^2}} = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (м). Следовательно, $\Delta AEC = \Delta AFC$ (по катетам CE и CF и гипотенузе AC). Значит, $S_{AECF} = 2S_{\Delta AEC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AE \cdot CE = 12 \cdot AE$.

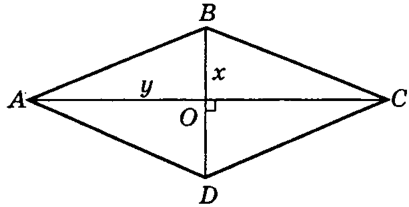
Из ΔAEC находим длину отрезка AE:

$$AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ (м), тогда}$$

$S_{AECF} = 12 \cdot 9 = 108$ (м^2). Итак, $S_{AECF} = 108$ м^2.

Ответ: 108 м^2.

Пример 15. Периметр ромба содержит $2p$ см, сумма диагоналей его m см. Найти площадь ромба.



Решение.

Пусть $BO = x$, $AO = y$, где $x > 0$, $y > 0$.

Тогда $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = 2xy$.

По условию задачи $AC + BD = m$ или $2x + 2y = m$, откуда

$$x + y = \frac{m}{2}. \qquad (1)$$

Из ΔAOB, где $AB = \frac{1}{4} \cdot 2p = \frac{1}{2}p$, находим

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) имеем систему уравнений:

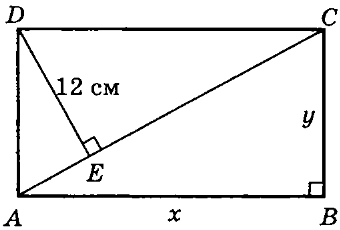
$$\begin{cases} x + y = \dfrac{m}{2}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{p^2}{4}. \end{cases}$$

Возведя в квадрат обе части первого уравнения и вычтя второе, находим

$$2xy = \frac{m^2}{4} - \frac{p^2}{4}, \text{ значит, } S = \frac{1}{4}(m^2 - p^2) \text{ см}^2.$$

Ответ: $S = \frac{1}{4}(m^2 - p^2)$ см^2.

Пример 16. Найти периметр прямоугольника, диагональ которого равна 25 см, а высота, опущенная из вершины на диагональ, равна 12 см.



Решение.

Пусть в прямоугольнике $ABCD$ диагональ $AC = 25$ см, $DE = 12$ см — высота, опущенная на диагональ.

Пусть $AB = x$, $BC = y$, где $x > 0$, $y > 0$.

Тогда $P = 2(x + y)$.

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DE = 300 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Из ΔABC по теореме Пифагора имеем

$$x^2 + y^2 = 625. \qquad (1)$$

Так как $S_{ABCD} = 300$ см^2, а с другой стороны —

$$S_{ABCD} = xy, \text{ то } xy = 300. \qquad (2)$$

Из соотношения (1) и (2) имеем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 625, \\ xy = 300. \end{cases}$$

Заметим, что для нахождения периметра прямоугольника находить в отдельности x и y нет необходимости:

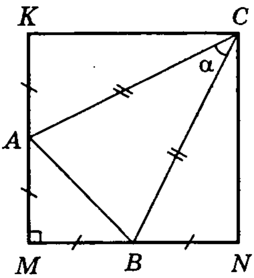
$$\begin{cases} (x + y)^2 = 625 + 2xy, \\ xy = 300; \end{cases}$$

$$(x + y)^2 = 625 + 600, \text{ или } (x + y)^2 = 1225,$$

откуда $x + y = 35$, тогда $P = 2(x + y) = 2 \cdot 35 = 70$ (см).

Ответ: 70 см.

Пример 17. В квадрате $KCNM$ на серединах сторон KM и MN отмечены точки A и B, которые соединены с вершиной C. Найти $\angle ACB$.



Решение.

Пусть в квадрате $KCNM$ A — середина KM, B — середина MN.

Пусть $\angle ACB = \alpha$. Обозначим сторону квадрата через $2x$, тогда $AM = MB = x$.

Из ΔAMB: $AB^2 = x^2 + x^2$, $AB = x\sqrt{2}$.

Из ΔAKC: $AC^2 = AK^2 + KC^2$ или $AC^2 = 5x^2$, откуда

$$AC = x\sqrt{5}.$$

Из ΔABC по теореме косинусов находим AB:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\alpha \text{ или}$$

$$2x^2 = 10x^2 - 10x^2 \cos\alpha,$$

$$10x^2 \cos\alpha = 8x^2,\ x \neq 0,\ 10 \cos\alpha = 8,$$

$$\cos\alpha = 0{,}8, \text{ откуда } \angle ACB = \alpha = \arccos 0{,}8.$$

Ответ: arccos 0,8.

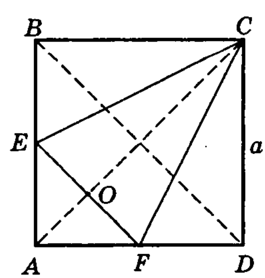
Пример 18. Найти большую сторону прямоугольника, площадь которого 48 см^2, а стороны относятся как 3 : 1.

Решение.

Пусть бо́льшая сторона прямоугольника равна $3x$, тогда меньшая сторона будет x, а площадь равна $3x \cdot x = 48$, или $x^2 = 16$, откуда $x = 4$, тогда $3x = 12$. Итак, большая сторона равна 12 см.

Ответ: 12 см.

Пример 19. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислить площадь полученного треугольника.



Решение.

Если a — сторона квадрата, то диагональ $AC = BD = a\sqrt{2}$. В ΔABD средняя линия $EF = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

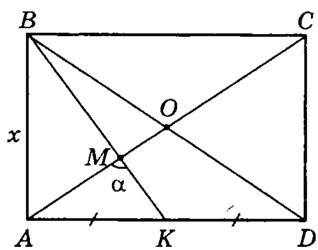
В равнобедренном ΔAOE стороны

$$AO = OE = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ поэтому } OC =$$

$$= AC - AO = \frac{3a\sqrt{2}}{4}. \text{ Значит, } S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2}EF \cdot OC = \frac{3}{8}a^2.$$

Ответ: $\frac{3}{8}a^2$.

Пример 20. Точка K — середина стороны AD — прямоугольника $ABCD$. Найти угол между BK и диагональю AC, если известно, что $AD : AB = \sqrt{2}$.



Решение.

Пусть $AB = x$, тогда

$$AD = x\sqrt{2}.$$

Выразим через x все стороны ΔAMK и применим теорему косинусов для стороны AK. Это позволит вычислить косинус искомого угла AMK.

Пусть $\angle AMK = \alpha$. Заметим, что AO и BK — медианы ΔABD. Значит, $MK = \frac{1}{3}BK$, $AM = \frac{2}{3}AO$ (по свойству медиан треугольника). Тогда

$$MK = \frac{1}{3}BK = \frac{1}{3}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{x}{\sqrt{6}}. \quad AM = \frac{2}{3}AO = \frac{1}{3}AC =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 + CD^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\left(x\sqrt{2}\right)^2 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

В ΔAMK $AK = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $AM = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $MK = \frac{x}{\sqrt{6}}$, тогда по теореме косинусов имеем: $AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2AM \times \times MK \cos\alpha$ или $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{6}}\cos\alpha$,

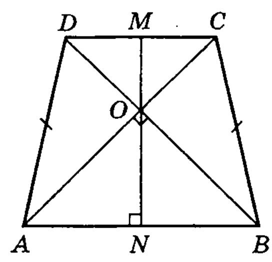
$\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}x^2\cos\alpha$, откуда находим $\cos\alpha = 0$, значит, $\alpha = 90°$.

Итак, $\angle AMK = 90°$.

Ответ: 90°.

Пример 21. В равнобедренной трапеции средняя линия равна m, а диагонали взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь трапеции.

Решение.



Проведем высоту равнобедренной трапеции MN через точку пересечения диагоналей O; точки M и N будут серединами оснований трапеции $ABCD$. Заметим, что ΔNOB и ΔOMC прямоугольные и равнобедренные, значит

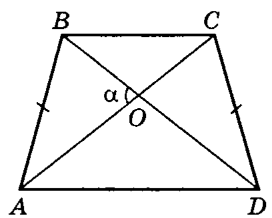
$MN = ON + OM = NB + MC = m$, тогда $S = m \cdot m = m^2$.

Ответ: $S = m^2$.

Пример 22. Доказать, что площадь равнобедренной трапеции определяется по формуле $S = \frac{1}{2}m^2\sin\alpha$, где m — длина диагонали, α — угол между ними.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD$, AC и BD — диагонали, причем $AC = BD = m$ и $\angle AOB = \alpha$; $AO = x$, $CO = y$.



Заметим, что $S_{ABCD} = 2S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} = 2 \cdot \frac{1}{2} xy \sin\alpha + \frac{1}{2} y^2 \sin(180° - \alpha) + \frac{1}{2} x^2 \sin(180° - \alpha) =$

$$= xy \sin\alpha + \frac{1}{2} y^2 \sin\alpha + \frac{1}{2} x^2 \sin\alpha =$$

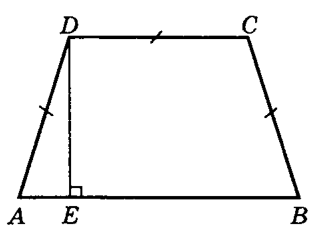
$$= \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot (2xy + y^2 + x^2) = \frac{1}{2} (x+y)^2 \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} m^2 \sin\alpha, \text{ где } x + y = AC = BD = m.$$

Итак, $S = \frac{1}{2} m^2 \sin\alpha$, ч. т. д.

Замечание. Если $\alpha = 90°$, то $AC \perp BD$, и в этом случае $S = \frac{1}{2} m^2$, где m — диагональ.

Пример 23. В равнобедренной трапеции площадью 27 см^2 боковая сторона равна меньшему основанию. Найти высоту трапеции, если она делит основание в отношении 4 : 9.



Решение.

Пусть $AE = 4x$, тогда $BE = 9x$ и $AB = 13x$. Пусть $AD = DC = y$, тогда

$$S = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DE.$$

Так как по условию задачи $S = 27$ см^2, то

$$\frac{1}{2}(13x + y)DE = 27 \text{ или } (13x + y) \cdot DE = 54. \qquad (1)$$

С другой стороны, $AB = 2AE + DC = 8x + y$, тогда получим $8x + y = 13x$, откуда $y = 5x$.

Учитывая (1), имеем $(13x + 5x) \cdot DE = 54$ или

$$x \cdot DE = 3. \qquad (2)$$

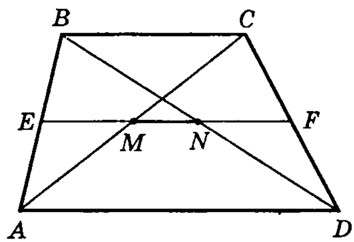
Из ΔAED $DE^2 = AD^2 - AE^2$ или $DE^2 = y^2 - (4x)^2$, $DE^2 = 9x^2$, $DE = 3x$, тогда (2) примет вид $x \cdot 3x = 3$, $3x^2 = 3$, $x^2 = 1$, $x = 1$ $(x > 0)$.

Следовательно, $DE = 3x = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

Пример 24. Основания трапеции a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Решение.



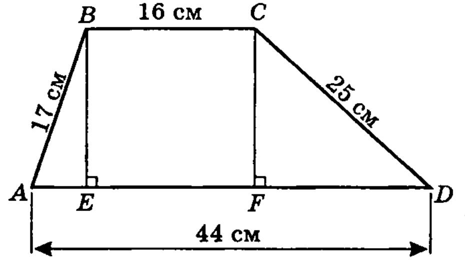
Так как по условию задачи точка M — середина диагонали AC и точка N — середина диагонали BD, то точки M и N лежат на средней линии трапеции EF. Так как EN — средняя линия ΔABD, то $EN = \frac{1}{2}a$.

Аналогично $EM = \frac{1}{2}b$.

Значит, $MN = EN - EM = \frac{1}{2}(a - b)$.

Ответ: $\frac{1}{2}(a - b)$.

Пример 25. Вычислить площадь трапеции, если параллельные стороны равны 16 см и 44 см, а непараллельные — 17 см и 25 см.



Решение.

По условию задачи $AD = 44$ см и $BC = 16$ см, тогда $AE + FD = 28$ (см).

Пусть $AE = x$, тогда $FD = 28 - x$.

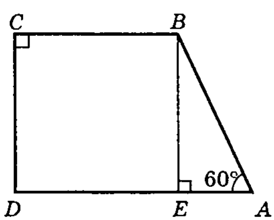
По условию $AB = 17$ см, $CD = 25$ см. Значит, из ΔABE имеем $BE^2 = 17^2 - x^2$.

Аналогично из ΔCFD получим $CF^2 = 25^2 - (28 - x)^2$. Получим уравнение: $17^2 - x^2 = 25^2 - (28 - x)^2$, откуда $x = 8$, тогда $BE^2 = 17^2 - 64$, или $BE = \sqrt{225} = 15$ (см).

Следовательно, $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BE = \dfrac{44+16}{2} \cdot 15 = 450$ (см^2).

Ответ: 450 см^2.

Пример 26. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если даны: острый угол, равный 60°, и оба основания, соответственно равные a и b ($a > b$).

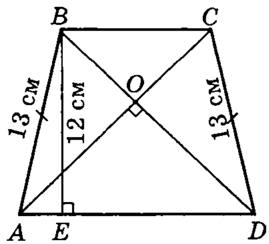


Решение.

Проведем высоту BE трапеции $ABCD$. Так как $\angle A = 60°$, то $\angle ABE = 30°$, тогда $AB = 2AE = 2(a - b)$ и $BE = AE \operatorname{tg} 60° = (a - b)\sqrt{3}$.

Значит, $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot BE = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,(a^2 - b^2)$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - b^2)$ (кв. ед.).



Пример 27. В равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, известны боковая сторона и высота, соответственно равные 13 см и 12 см. Найти периметр трапеции.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = CD = 13$ см. По условию $BE = 12$ см — высота трапеции. Известно, что если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то $S = h^2$, где h — высота трапеции (см. «Сборник задач по математике» / под ред. М. И. Сканави и др. 5-е изд. — М., 1997. С. 156).

С другой стороны, $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE.$ (1)

Пусть $BC = 2x$, $AD = 2y$, тогда

$$S = \frac{1}{2}(2x + 2y) \cdot 12 = 12(x + y). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем $12(x + y) = h^2$ или

$$12(x + y) = 12^2, \text{ откуда } x + y = 12.$$

Так как $AB = 13$ см, то из ΔABE:

$$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Но $AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(2y - 2x) = y - x$, тогда

$$y - x = 5.$$

Следовательно, имеем систему уравнений

$\begin{cases} x + y = 12, \\ y - x = 5, \end{cases}$ $\begin{cases} 2y = 17, \\ 2x = 7; \end{cases}$ значит, $P_{ABCD} = AD + BC +$

$+ 2AB = (2y + 2x) + 2AB = 17 + 7 + 26 = 50$ (см).

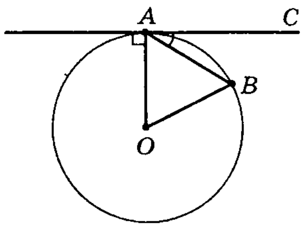
Ответ: 50 см.

2.4. Окружность и круг

Пример 1. Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найти угол между ними.

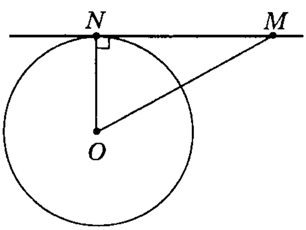
Решение.

Пусть AC — касательная к окружности, AB — хорда. По условию задачи $OA = OB = AB$, т. е. ΔAOB — равно-



сторонний, значит, $\angle OAB = 60°$. Кроме того, $\angle OAC = 90°$, так как AC — касательная и $AC \perp OA$. Следовательно, $\angle BAC = 90° - 60° = 30°$.

Ответ: 30°.



Пример 2. Прямая MN касается окружности с центром O радиуса $r = 2{,}5$ см. Найти MN, если $OM = 4$ см.

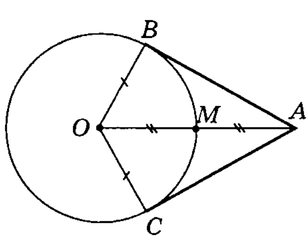
Решение.

По условию задачи $ON = r = 2{,}5$ см, $OM = 4$ см. Заметим, что ΔMON — прямоугольный, так как $ON \perp MN$ (по свойству касательной), тогда по теореме Пифагора

$$MN = \sqrt{4^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{9{,}75} = \sqrt{9\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{2} \text{ (см).}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{39}}{2}$ см.

Пример 3. Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведенными из точки A. Найти $\angle BAC$, если середина отрезка AO лежит на окружности.

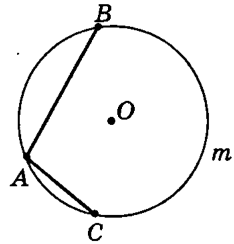


Решение.

По условию AB и AC — отрезки касательных, проведенных из точки A; тогда $AB = AC$. Кроме того, $OB = OC$ — как радиусы, OA — общая сторона, тогда $\Delta OAB = \Delta OAC$ (по трем сторонам), $OB \perp BA$ и $OC \perp CA$ (по свойству касательных).

Так как M — середина AO, то $OM = OB = OC = \frac{1}{2}OA$, тогда $\angle BAO = 30°$ и $\angle BAC = \angle BAO + \angle CAO = 60°$.

Ответ: 60°.



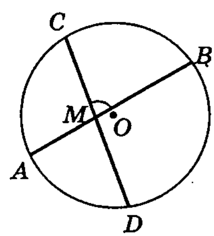
Пример 4. Хорда AB стягивает дугу, равную 120°, а хорда AC — дугу в 40°. Найти $\angle BAC$.

Решение.

$\cup BmC = 360° - (\cup AB + \cup AC) = 360° - (120° + 40°) = 200°$, тогда по свойству вписанного угла имеем

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BmC = 200° : 2 = 100°.$$

Ответ: 100°.



Пример 5. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Найти $\angle BMC$, если $\cup AD = 64°$, $\cup BC = 80°$.

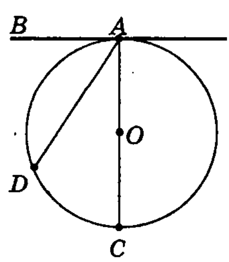
Решение.

Угол с вершиной внутри окружности равен полусумме дуг, заключенных между его сторонами, т. е.

$$\angle CMB = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup CB) = \frac{1}{2}(64° + 80°) = 72°.$$

Итак, $\angle CMB = 72°$.

Ответ: 72°.



Пример 6. Прямая AB — касательная к окружности, AD — хорда этой окружности. Доказать, что $\angle BAD$ измеряется половиной дуги AD, расположенной внутри $\angle BAD$.

Решение.

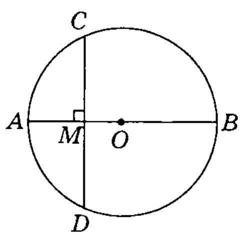
Проведем диаметр AC, тогда $\angle BAC = 90°$ по свойству касательной.

$\angle BAC = \frac{1}{2}\cup ADC$. $\angle DAC$ — вписанный,

$\angle DAC = \frac{1}{2}\cup DC$.

$\angle DAB = \angle BAC - \angle DAC = \frac{1}{2}(\cup ADC - \cup DC) = \frac{1}{2}\cup AD$,

$\angle DAB = \frac{1}{2}\cup AD$, что и требовалось доказать.



Пример 7. Диаметр AB окружности перпендикулярен к хорде CD и пересекает ее в точке M. Найти CD, если $AM = 8$ см, $MB = 16$ см.

Решение.

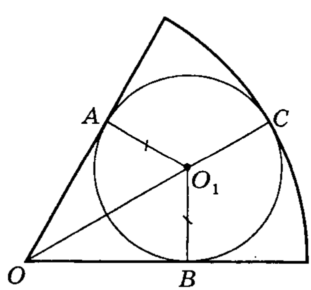
1) Так как AB и CD — пересекающиеся хорды, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

2) Так как $AB \perp DC$, то $MC = MD$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам).

3) $MD^2 = AM \cdot MB$ или $MD^2 = 8 \cdot 16$, $MD = \sqrt{8 \cdot 8 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$ (см), тогда $CD = 2 \cdot MD = 16\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $16\sqrt{2}$ см.

Пример 8. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади сектора к площади этого круга.



Решение.

$OA \perp O_1A$ и $O_1B \perp OB$ — по свойству касательной.

Заметим, что $\Delta OBO_1 = \Delta OAO_1$ (по гипотенузе и катету).

Следовательно, $\angle O_1OA = \frac{1}{2}\angle AOB$, т. е. $\angle O_1OA = 30°$.

Отсюда $O_1A = OO_1 \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot OO_1$; $OC = OO_1 + O_1C$.

Пусть $O_1A = O_1B = r$, $OC = R$ — радиус кругового сектора. Так как $\angle O_1OA = 30°$, то $OO_1 = 2r$, тогда $OC = R = 3r$.

Известно, что $S_{кр} = \pi r^2$,

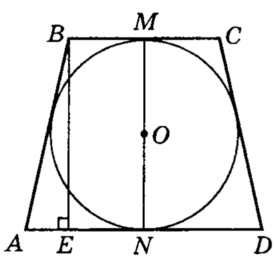
$$S_{сектора} = \frac{60°}{360°}\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi\cdot(3r)^2 = \frac{3}{2}\pi r^2,$$

значит, $\dfrac{S_{сек}}{S_{кр}} = \dfrac{\frac{3}{2}\pi r^2}{\pi r^2} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: 3 : 2.

Пример 9. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Верхнее основание равно радиусу окружности и равно 2 см. Найти нижнее основание.

Решение.



Пусть $AB = CD$. Пусть $AD = 2x$, $BC = 2$ см (по условию).

Кроме того, $BC = R = 2$, тогда $MN = BE = 4$ (см).

По свойству описанного четырехугольника имеем

$AD + BC = AB + CD$ или

$$2x + 2 = 2AB,\ x + 1 = AB. \qquad (1)$$

$$\text{Но } AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(2x - 2) = x - 1. \qquad (2)$$

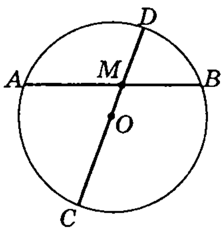
Из ΔAEB по теореме Пифагора получим

$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$

или, учитывая (1) и (2), имеем $(x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 16$, откуда находим $x = 4$, тогда $AD = 2x = 8$ (см).

Ответ: 8 см.

Пример 10. Внутри круга, радиус которого равен 13 см, дана точка M, отстоящая от центра круга на 5 см. Через точку M проведена хорда $AB = 25$ см. Определить длины отрезков, на которые хорда AB делится точкой M.



Решение.

Так как радиус $CO = 13$ см и $MO = 5$ см, то $MD = 13 - 5 = 8$ (см), $MC = CO + OM = 18$ (см).

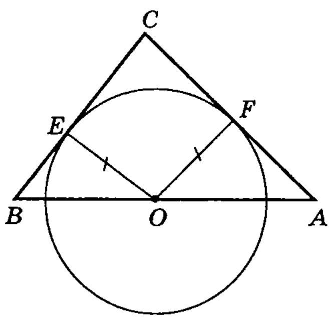
Пусть $MB = x$, тогда $AM = AB - MB$ или $AM = 25 - x$.

По свойству пересекающихся хорд имеем $AM \cdot MB = MD \cdot MC$ или

$$(25 - x)x = 18 \cdot 8, \text{ откуда } x_1 = 16,\ x_2 = 9.$$

Итак, $AM = 16$ см, $MB = 9$ см.

Ответ: 16 см и 9 см.



Пример 11. Стороны треугольника $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см. Две из них (a и b) служат касательными к кругу, центр которого лежит на третьей стороне. Определить радиус круга.

Решение.

По условию задачи $a = BC = 13$ см, $b = CA = 14$ см, $c = AB = 15$ см.

Пусть $OE = OF = R$. Заметим, что

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC}.$$

Но $S_{\Delta BOC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot OE = \dfrac{13}{2} R$ и $S_{\Delta AOC} = \dfrac{1}{2} \cdot 14R = 7R$,

тогда $S_{\Delta ABC} = 13{,}5R$.

С другой стороны, по формуле Герона имеем

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где}$$

$$p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21,$$

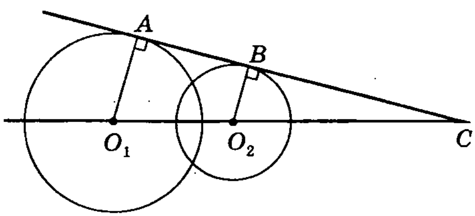
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Следовательно, $13{,}5R = 84$, откуда

$$R = 84 : 13{,}5 = \frac{56}{9}.$$

Ответ: $\frac{56}{9}$.

Пример 12. Расстояние между центрами двух окружностей, радиусами 17 см и 10 см, равно 21 см. Определить расстояние центров от точки, в которой прямая центров пересекается с общей касательной окружностей.



Решение.

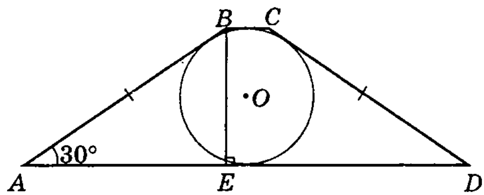
Так как расстояние между центрами окружностей меньше суммы, но больше разности их радиусов, то окружности пересекаются, значит, они имеют общую внешнюю касательную и не имеют общей внутренней касательной.

Полагая $O_1C = x$ и $O_2C = y$, имеем $x - y = O_1O_2 = 21$ и $x : y = O_1A : O_2B = 17 : 10$ (из подобия ΔCAO_1 и ΔCBO_2).

Получим систему уравнений $\begin{cases} x - y = 21, \\ x = 0,7y, \end{cases}$ откуда находим $x = O_1C = 51$ см, $y = O_2C = 30$ см.

Ответ: 51 см, 30 см.

Пример 13. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\pi/6$.



Решение.

Площадь трапеции определяется по формуле

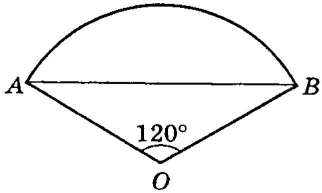
$$\frac{AD+BC}{2}\cdot BE=S. \qquad (1)$$

Так как $\angle A = 30°$, то $BE = \frac{1}{2}AB$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

По свойству описанного четырехугольника имеем $AD+BC=AB+CD$ или $2AB=AD+BC$, тогда (1) примет вид $\frac{2AB}{2}\cdot\frac{1}{2}AB=S$ или $AB^2=2S$, откуда $AB=\sqrt{2S}$.

Ответ: $\sqrt{2S}$.

Пример 14. Найти площадь сегмента, если периметр его равен p, а дуга содержит 120°.



Решение.

Определим радиус R дуги окружности сегмента.

По условию $\smile AB + AB = p$.

Но длина $\smile AB = \frac{\pi R\cdot 120°}{180°} = \frac{2\pi R}{3}$.

Длину хорды AB находим из ΔAOB по теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin 120°} = 2R$ или $AB = 2R\sin(90° + 30°) =$

$$= 2R \cdot \cos 30° = R\sqrt{3}.$$

Тогда имеем

$$\frac{2\pi R}{3} + R\sqrt{3} = p,\ (2\pi + 3\sqrt{3})R = 3p,$$

откуда $R = \dfrac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}$. Следовательно, площадь S сегмента будет равна площади сектора без $S_{\Delta OAB}$, т. е.

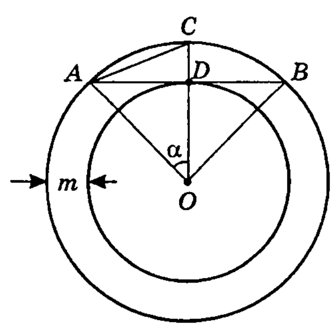
$$S = \frac{\pi R^2 \cdot 120°}{360°} - S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\pi R^2 - S_{\Delta OAB}.$$

Но $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2} OA \cdot OB \sin 120° = \dfrac{1}{2} R^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$, значит, $S = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)^2 - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$, откуда находим

$$S = \frac{3p^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)^2} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S = \dfrac{3p^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)^2}$.

Пример 15. Около правильного n-угольника со стороной a описана окружность и в него вписана окружность. Определить площадь кольца между этими окружностями и ширину его.



Решение.

Пусть $AB = a$ — сторона правильного n-угольника, тогда $\angle AOC = \alpha = \dfrac{180°}{\pi}$, а $\angle CAD = \dfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{90}{\pi}$ (как вписанный, опирающийся на дугу α).

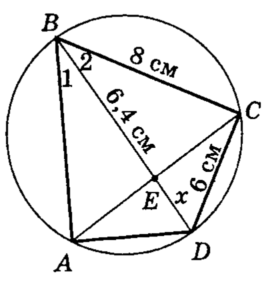
Пусть S — площадь кольца, тогда $S = \pi\,(OA^2 - OD^2) = \pi \cdot AD^2 = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\pi a^2$.

Пусть m — ширина кольца, тогда из ΔADC

$$m = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{90°}{\pi}.$$

Ответ: $S = \dfrac{1}{4}\pi a^2$; $m = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{90°}{n}$.

Пример 16. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что диагональ BD является биссектрисой $\angle ABC$ и пересекается с диагональю AC в точке E, причем $BE = 6{,}4$ см. Найти радиус окружности, вписанной в ΔBCD, если длина отрезка $CD = 6$ см и $BC = 8$ см.



Решение.

Так как BD — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle 1 = \angle 2$. Кроме того, $\angle ABD = \angle ACD = \angle CBD$ — как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AD ($\cup AD = \cup DC$). Тогда $\Delta BCD \sim \Delta CED$ (по двум углам).

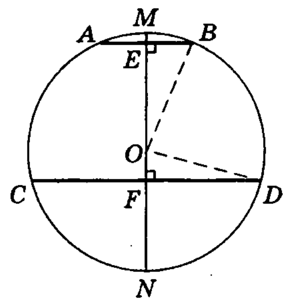
Следовательно, $CD : DE = BD : CD$, или $CD^2 = DE \cdot BD$.

Пусть $DE = x$, где $x > 0$, тогда получим $x(x + 6{,}4) = 36$ или $x^2 + 6{,}4x - 36 = 0{,}5x^2 + 32x - 180 = 0$, откуда находим $x_1 = 3{,}6$; $x_2 = -10 < 0$ (не подходит). Итак, $DE = 3{,}6$ см, тогда $BD = 6{,}4 + 3{,}6 = 10$ (см).

Выходит, что ΔBCD — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), так как $10^2 = 6^2 + 8^2$. Значит,

$r = \frac{1}{2}(BC + CD - BD) = 2$, где r — радиус окружности, вписанной в ΔBCD.

Ответ: 2 см.



Пример 17. Две параллельные хорды равны 14 м и 40 м, а расстояние между ними 39 м. Определить радиус круга.

Решение.

Способ 1

Пусть центр O круга расположен между данными хордами: $AB = 14$ м и $CD = 40$ м. Проведем диаметр MN, перпендикулярный данным хордам, тогда

$$EF = 39 \text{ м (по условию)}, \; EB = \frac{1}{2}AB = 7 \text{ (м)}$$

$$\text{и } FD = \frac{1}{2}CD = 20 \text{ (м)}.$$

Рассмотрим ΔOEB и ΔOFD. Пусть $OB = OD = R$, $OF = x$, тогда $OE = 39 - x$. По теореме Пифагора имеем $7^2 + (39 - x)^2 = R^2$ и $20^2 + x^2 = R^2$ или, сравнивая левые части полученных равенств, получим $49 + (39 - x)^2 = 400 + x^2$, откуда находим $x = 15$, тогда $R^2 = 400 + 225 = 625$, $R = 25$.

Ответ: 25 м.

Замечание. В условии задачи не сказано, как расположены данные хорды относительно центра круга: по разные или по одну сторону от него. Приведенное решение существенно связано с чертежом. Поэтому, вообще-то говоря, нужно дополнительно исследовать, как изменится решение задачи и ответ к ней, если предположить, что обе данные хорды лежат по одну сторону от центра круга.

Способ 2 (рисунок тот же)

Пусть $ME = x$, $FN = y$, где $x > 0$, $y > 0$, тогда (что существенно) независимо от расположения центра круга относительно данных хорд AB и CD имеем систему уравнений

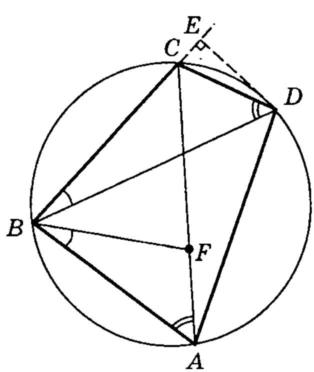
$$\begin{cases} FD^2 = MF \cdot FN, \\ BE^2 = ME \cdot EN \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y(39 + x) = 400, \\ x(39 + y) = 49. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II, имеем: $39(y - x) = 351$, или $y - x = 9$, откуда $y = x + 9$.

Подставив значение y в уравнение $x(39 + y) = 49$, находим $x = 1$ ($x = -49 < 0$ — не подходит), тогда $y = 10$, и так как $2R = ME + EF + FN = 1 + 39 + 10 = 50$, то $R = 25$.

Как видим, при таком способе решения отпадает необходимость в дополнительном исследовании взаимного расположения данных элементов.

Пример 18. Доказать, что во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).



Решение.

Способ 1

Построим угол ABF, равный $\angle CBD$.

$\angle BAF = \angle BDC$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BC.

Следовательно, $\Delta ABF \sim \Delta CBD$, откуда имеем $AB : AF = BD : CD$, или

$$AB \cdot CD = AF \cdot BD. \qquad (1)$$

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = \angle ABC - \angle ABF = \angle FBC.$$

Далее, $\angle BCF = \angle BDA$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Значит, $\Delta FBC \sim \Delta ABD$, откуда $BC : FC = BD : AD$ или

$$BC \cdot AD = FC \cdot BD. \qquad (2)$$

Складывая почленно (1) и (2), имеем

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AF \cdot BD + FC \cdot BD =$$

$$= BD \cdot (AF + FC) = BD \cdot AC.$$

Итак, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$, что и требовалось доказать.

Способ 2 (рисунок тот же)

Пусть $BD = m$; $AC = n$; $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $AD = d$ и $\angle BCD = \alpha$, тогда $\angle BAD = 180° - \alpha$.

Из BCD по теореме косинусов имеем

$$m^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \qquad (1)$$

Аналогично из ΔBAD получим

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos(180° - \alpha) = a^2 + d^2 + 2ad\cos\alpha. \qquad (2)$$

Теперь исключим $\cos\alpha$, для чего умножим обе части (1) на ad, а обе части (2) — на bc и сложим почленно:

$$(ad + bc)m^2 = adb^2 + adc^2 + bcd^2 + bca^2 =$$

$$= (ab + cd)(bd + ac), \text{ откуда } m^2 = \frac{(ab+cd)(bd+ac)}{ad+bc}.$$

Аналогично для диагонали AC находим

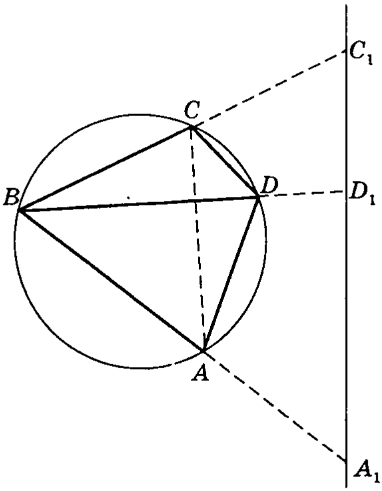
$$n^2 = \frac{(ad+bc)(bd+ac)}{ab+cd}.$$

Перемножая полученные равенства, получим $m^2n^2 = (ac + bd)^2$, откуда $mn = ac + bd$, что и требовалось доказать.

Способ 3

Решение оказывается более простым, если использовать понятие инверсии. Приняв точку B за полюс, выполним над точками A, D и C произвольную инверсию, степень которой k.

Данная окружность при этом преобразуется в прямую, на которой будут лежать точки A_1, D_1 и C_1, обратные точкам A, D и C. В равенство $A_1D_1 + D_1C_1 = A_1C_1$ подставим значения



$$A_1D_1 = \frac{k \cdot AD}{BA \cdot BD};$$

$$D_1C_1 = \frac{k \cdot DC}{BD \cdot BC};$$

$$A_1C_1 = \frac{k \cdot AC}{BA \cdot BC}.$$

Так как $A_1D_1 + D_1C_1 = A_1C_1$, то получим

$$\frac{k \cdot AD}{BA \cdot BD} + \frac{k \cdot DC}{BD \cdot BC} + \frac{k \cdot AC}{BA \cdot BC},$$

откуда после преобразований получим $AD \cdot BC + DC \cdot BA = AC \cdot BD$, что и требовалось доказать.

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

Часть 1

1. Один из смежных углов в 8 раз меньше другого. Найти больший угол.
2. Два смежных угла относятся как 2 : 7. Найти меньший из смежных углов.
3. Один из внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей в 17 раз меньше другого. Найти меньший из этих углов.
4. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен 100°. Найти углы треугольника.
5. Найти площадь равнобедренного прямоугольного треугольника по его гипотенузе, равной $4\sqrt{2}$.
6. В равнобедренном треугольнике угол, смежный с углом при вершине треугольника, равен 70°. Найти угол при основании треугольника.

7. В равнобедренном ΔABC (основание AC) проведена медиана BK, $\angle ABC = 36°$. Найти углы треугольника BAK.
8. Найти высоту равнобедренного треугольника, если его основание равно 6, а боковая сторона 5.
9. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13, а один из катетов 5. Найти площадь этого треугольника.
10. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6. Другой катет равен 8. Найти длину медианы, проведенной к гипотенузе.
11. Катет прямоугольного треугольника равен $\frac{5}{2}$, а гипотенуза $\frac{\sqrt{281}}{2}$. Найти его площадь.
12. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна 36. Найти гипотенузу.
13. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Найти больший угол.
14. Медианы треугольника равны 5, 6, 5. Найти площадь.
15. Найти площадь треугольника, медианы которого равны 12 см, 15 см и 21 см.
16. Найти периметр треугольника, две стороны которого равны 10 и 12, а высота, проведенная к большей из данных сторон, равна 8.
17. В треугольнике ABC $AB = 6$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 30°$. Найти площадь треугольника ABC.
18. Найти площадь равностороннего треугольника со стороной $a = 6\sqrt[4]{3}$.
19. Найти радиус круга, описанного около равностороннего треугольника со стороной $a = 12\sqrt{3}$.
20. Найти площадь равностороннего треугольника, если радиус вписанной окружности равен $r = \sqrt[4]{3}$.
21. Сторона ромба равна 5, а меньшая диагональ 6. Найти большую диагональ.

22. Диагональ ромба образует с его стороной угол 25°. Найти больший угол ромба.

23. В ромбе длины диагоналей 10 и 15. Найти площадь ромба.

24. Найти сторону ромба, если его острый угол 30°, а площадь равна 18.

25. Периметр ромба равен 24. Высота равна 3. Найти тупой угол ромба.

26. Сторона ромба равна 4, а острый угол 30°. Найти площадь ромба.

27. Периметр параллелограмма равен 92 см. Одна из его сторон больше другой на 4 см. Найти большую сторону параллелограмма.

28. Сумма двух противоположных углов параллелограмма 94°. Найти больший угол параллелограмма.

29. Найти периметр параллелограмма, если его площадь равна 144, а высоты равны 8 и 12.

30. Диагонали параллелограмма равны $2\sqrt{3}$ и 80, а угол между ними равен 60°. Найти площадь параллелограмма.

31. Площадь параллелограмма равна 120, а его высоты 8 и 12. Найти периметр параллелограмма.

32. Стороны параллелограмма равны соответственно 6 и 16, а его тупой угол равен 120°. Найти длину меньшей диагонали параллелограмма.

33. Найти большую сторону прямоугольника, площадь которого 400 см^2, а стороны соотносятся как 4 : 1.

34. Периметр прямоугольника равен 60 см. Одна сторона больше другой на 10 см. Найти меньшую сторону прямоугольника.

35. Найти сторону квадрата, равновеликого прямоугольнику со сторонами 9 и 4.

36. Середины сторон квадрата соединены отрезками. Найти отношение площади фигуры, образованной этими отрезками к площади квадрата.

37. Определить периметр равнобедренной трапеции, если ее средняя линия равна 25, а боковая сторона равна 15.

38. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10, а площадь 48. Найти высоту трапеции.

39. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна 4. Найти высоту трапеции.

40. Найти площадь трапеции с основаниями 5 см и 9 см и диагоналями 12 см и 12 см.

41. Основания равнобедренной трапеции 8 см и 4 см, а угол при большем основании 45°. Найти площадь трапеции.

42. Боковые стороны и меньшее основание прямоугольной трапеции соответственно равны 8, 10 и 10. Найти большее основание.

43. Меньшее основание трапеции равно 4 см. Большее основание больше средней линии на 4 см. Найти длину средней линии.

44. Одно основание трапеции больше другого на 6 см, а средняя линия равна 8 см. Найти меньшее основание.

45. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 10, большая боковая сторона равна 8. Острый угол равен 60°. Найти среднюю линию трапеции.

46. В равнобедренную трапецию с основаниями 2 и 18 вписана окружность. Найти радиус.

47. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 1 см. Найти площадь трапеции, если ее боковая сторона равна 3 см.

48. Периметр описанной около окружности трапеции равен 30. Найти ее среднюю линию.

49. Периметр равнобедренной трапеции равен 36, а средняя линия равна 10. Найти боковую сторону трапеции.

50. Найти площадь круга, если длина его окружности равна $4\sqrt{\pi}$.

51. В окружности радиуса $\frac{7,2}{\pi}$ найти длину дуги, содержащей 100°.

52. Длина окружности равна $8\pi\sqrt{3}$. Найти длину хорды, стягивающей дугу 120°.

53. В окружность вписан прямоугольник со сторонами 32 см и 24 см. Найти радиус окружности.

54. Длина окружности 4π. Найти площадь квадрата, вписанного в эту окружность.

55. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги 60° и 120°. Найти отношение площадей большего и меньшего кругов.

56. Из точки, взятой на окружности, проведены взаимно перпендикулярные хорды с длинами 16 и 30. Найти радиус окружности.

57. Центры двух окружностей находятся на расстоянии $\sqrt{80}$. Радиусы окружностей равны 4 и 8. Найти длину общей касательной.

58. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен $6\sqrt{6}$. Найти периметр квадрата, вписанного в окружность.

59. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади круга к площади сектора.

60. В окружности, радиуса 26 см, проведена хорда, равная 48 см. Найти длину отрезка, соединяющего середину хорды с центром окружности.

Часть 2

3.1. Прямоугольный треугольник

1. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найти больший катет.

2. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 18 и 24 см.
3. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$ см. Найти гипотенузу.
4. Катеты прямоугольного треугольника равны $\log_3 8$ и $\log_2 27$. Найти его площадь.
5. Высота делит прямоугольный треугольник на два треугольника, периметры которых равны 6 и 8 см. Найти площадь исходного треугольника.
6. Высота делит прямоугольный треугольник на два треугольника, площади которых равны 96 и 54 см^2. Найти периметр исходного треугольника.
7. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Гипотенуза треугольника равна 25. Найти меньший катет.
8. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 12. Найти его периметр, если отношение катетов равно 3 : 4.
9. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 8, а высота, опущенная из вершины прямого угла, равна 6. Найти площадь треугольника.
10. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10 см, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12 см.
11. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равна 2. Разность между проекциями катетов на гипотенузу равна 3. Найти площадь треугольника.
12. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Один из катетов составляет 75% другого. Найти больший катет.
13. Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 10 см, но меньше гипотенузы на 10 см. Найти гипотенузу.

14. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник таким образом, что он имеет с треугольником общий прямой угол. Периметр этого прямоугольника равен 25 см. Найти катет треугольника.

15. Определить угол между медианой и высотой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, если острые углы треугольника равны 37° и 53°.

3.2. Равнобедренный треугольник

16. Периметр равнобедренного треугольника равен 110, а отрезок, соединяющий середины боковых сторон, равен 15. Найти длину боковой стороны.

17. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит периметр треугольника на две части длиной 15 см и 6 см. Найти меньшую сторону треугольника.

18. В равнобедренном треугольнике основание равно $\sqrt{21}$, угол при основании 30°. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

19. Найти длину основания равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна $\sqrt{17}$, а площадь — 4.

20. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а высота — 20. Найти длину высоты, опущенной на боковую сторону.

21. В равнобедренном треугольнике разность двух неравных внутренних углов равна 90°. Найти больший угол.

22. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см, медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см. Найти основание треугольника.

23. Основание равнобедренного треугольника 12 см, а боковая сторона 18 см. К боковым сторонам проведены биссектрисы. Вычислить длину отрезка, концами которого служат основания биссектрис.

24. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $36°$, а основание равно 6. Найти боковые стороны треугольника.

25. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Найти угол между медианой и биссектрисой, проведенными к боковой стороне.

26. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если медиана, проведенная к боковой стороне, образует с основанием угол $\arcsin\frac{3}{5}$.

27. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании в 3 раза больше косинуса угла при вершине. Найти синус угла при основании.

28. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

29. Основание равнобедренного треугольника равно 12, а боковая сторона 18 см. К боковым сторонам проведены биссектрисы. Вычислите $10k$, где k — длина отрезка, концами которого служат основания биссектрис.

30. Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, а боковая сторона 18 см. К боковым сторонам проведены высоты. Вычислить утроенную длину отрезка, концами которого служат основания высот.

3.3. Произвольный треугольник

31. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки длиной 2 и 4 см, а высота, проведенная к той же стороне, равна $\sqrt{15}$ см. Найти стороны треугольника и определить его вид.

32. Найти отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон.

33. В треугольнике ABC известно, что $BC = 12$ см, $AC = 8$ см и $\angle A$ вдвое больше $\angle B$. Найти AB.

34. Высота треугольника равна 6 см и делит угол в отношении 2 : 1, а основание треугольника — на отрезки, меньший из которых равен 3 см. Найти большую сторону треугольника.

35. Основание треугольника равно 4. Медиана, проведенная к основанию, равна $\sqrt{6}-\sqrt{2}$, а один из углов при основании равен 15°. Найти острый угол между медианой и основанием.

36. В треугольнике внутренние углы относятся как 2 : 3 : 5. Найти внешний угол треугольника, смежный с меньшим внутренним углом.

37. Найти меньшую высоту треугольника со сторонами 13, 14, 15.

38. В треугольнике ABC проведена медиана AK, равная $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ и составляющая со стороной AC угол 30°. Найти BC, если $\angle BCA = 45°$.

39. В треугольнике ABC даны три стороны $a=\sqrt{10}$, $b = 2$, $c = 3$. Найти его медиану m_a.

40. Найти синус угла A в треугольнике ABC, если $BC=3\sqrt{3}$, $AC = 15$ и $\angle ABC = 60°$.

41. В ΔMNP $MN = 2$ см. Из вершины N к стороне MP проведена медиана $NK = 1$ см. Найти площадь ΔMNP, если $\angle NKM = 30°$.

42. Найти углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равные части.

43. Высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найти углы треугольника.

44. Длины сторон треугольника равны 11 см, 13 см и 12 см. Найти медиану, проведенную к большей стороне.

45. В ΔMNP $\angle N = 60°$ и $\angle P = 45°$. Найти длину стороны MP, если $MN = \frac{7\sqrt{6}}{2}$.

46. BM — высота ΔABC. Из точки M на сторону BC опущен перпендикуляр ME. Найти BM, если $EC = 4$, $ME = 3$.

47. В ΔABC $AB = 3, AC = 4, BC = 5$. Определить, в каком отношении точка пересечения биссектрис O делит биссектрису угла $\angle B$ (считая от вершины B).

48. Найти медиану ΔABC, проведенную из вершины B, если $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 8$, $BC = 3\sqrt{2}$.

49. Углы треугольника составляют арифметическую прогрессию. Стороны, образующие средний по величине угол, имеют длины 1 см и 4 см. Найти площадь треугольника.

50. В треугольнике известны длины двух сторон: 6 см и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

3.4. Вписанные и описанные треугольники

51. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найти радиус описанной окружности, если сторона, средняя по длине, равна 4 см.

52. Площадь прямоугольного треугольника равна 24, а гипотенуза равна 10. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

53. Найти больший катет прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно равны 2 и 5.

54. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания гипотенузы и окружности делит гипотенузу на отрезки 3 и 10. Найти больший катет.

55. Площадь прямоугольного равнобедренного треугольника равна 8. Найти площадь описанного круга.

56. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а проекция меньшего катета на гипотенузу 3,6. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

57. Окружность касается большего катета треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе. Найти ее радиус, если длины катетов треугольника равны 3 и 4.

58. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найти меньшую сторону треугольника.

59. В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 см найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

60. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) радиус вписанного круга составляет 0,4 высоты BD, а периметр треугольника равен 40. Найти длину основания AC.

61. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а боковая сторона — 25. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.

62. Найти радиус окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника с основанием 16 и высотой 4.

63. Расстояние от боковой стороны равнобедренного треугольника, равной 16, до центра описанной около него окружности равно 6. Найти радиус этой окружности.

64. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, в 1,5 раза меньше радиуса описанной окружности. Найти угол при основании.

65. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°. Найти отношение радиуса вписанной к радиусу описанной около треугольника окружности.

66. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 30°. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанной окружности на 2. Найти основание треугольника.

67. В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса $\sqrt{3}$. Высота, проведенная к основанию, делится окружностью в отношении 1 : 2. Найти площадь треугольника.

68. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны 30°, а высота, опущенная на основание, равна 5. Найти радиус описанной окружности.

69. Стороны треугольника 26, 28 и 30. Найти произведение радиусов вписанной и описанной окружностей.

70. В треугольнике ABC, вписанном в окружность радиуса 1, $\angle B = 30°$, $\angle A = \alpha$. При каком значении α площадь треугольника принимает наибольшее значение?

71. Стороны треугольника равны 29 см, 25 см и 6 см. Найти радиус окружности, проведенной через середины сторон треугольника.

72. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D. Найти AC, если известно, что $CD = 2$ см, $AB = BC = 6$ см.

73. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC и имеет центр на AB. Найти радиус окружности, если $AC = 48$ см, $BC = 140$ см, $AB = 148$ см.

74. Стороны треугольника 10, 12 и 18. Проведена окружность, касающаяся двух меньших сторон, а центр находится на большей стороне. Найти ее радиус.

75. В ΔABC $AB = BC = 39$ см, $AC = 30$ см. Проведены высоты AD и BE. Найти радиус окружности, проходящей через точки D и E и касающейся стороны BC.

3.5. Параллелограмм

76. Одна из диагоналей параллелограмма, равная $4,5\sqrt{6}$, составляет с основанием угол 60°. Найти длину второй диагонали, если она составляет с тем же основанием угол 45°.

77. В параллелограмме боковая сторона равна 8 и острый угол при основании 30°. Найти проекцию высоты, опущенной на основание, на боковую сторону.

78. Найти сторону параллелограмма, площадь которого равна 4, если другая сторона равна $\sqrt{2}$, а угол между ними равен 45°.

79. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $DA = 6$, а косинус угла между ними равен $\frac{1}{3}$. Найти длину диагонали BD.

80. Площадь параллелограмма со сторонами 5 см и 8 см равна 32 см^2. Чему равен косинус большего угла параллелограмма?

81. В параллелограмм, одна из сторон которого равна $7\sqrt{2}$ м, вписана окружность радиуса $3\sqrt{3}$ м. Найти площадь параллелограмма.

82. Вокруг параллелограмма, одна из диагоналей которого равна $7\sqrt{8}$ м, описана окружность. Найти площадь круга.

83. Дан параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна $5\sqrt{3}$ см^2, а угол при вершине A равен 60°. Высота BM, проведенная к стороне AD, равна $\sqrt{3}$ см. Найти диагональ BD.

84. В прямоугольник с диагональю $3\sqrt{6}$ м вписана окружность. Вычислить площадь круга.

85. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24 см. Точка O принадлежит этому прямоугольнику. Найти сумму расстояний от этой точки до всех сторон прямоугольника.

86. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M так, что $AM = \sqrt{2}$, $BM = 2$ и $CM = 6$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$, если известно, что $AD = 2AB$.

87. Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого равна $(2\pi - 4)$. Найти площадь квадрата.

88. В квадрате $ABCD$ точка M — середина BC, O — точка пересечения DM и AC. Найти величину $\angle MOC$.

89. Сторона ромба равна 4. Радиус окружности, вписанной в этот ромб, равен 1. Найти величину острого угла ромба.

90. Диагонали ромба равны $\log_4 49$ и $\log_7 2$. Найти площадь.

91. В ромб вписан круг радиуса 3 см. Определить сторону ромба, если его площадь в 3 раза больше площади круга.

92. Диагонали ромба относятся как 4 : 3. Определить отношение площади ромба к площади круга, вписанного в ромб.

93. Найти площадь ромба, если его сторона равна 5, а радиус вписанного круга равен 2.

94. В ромб, диагональ которого делит его на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2 см. Найти сторону ромба.

95. В ромб $ABCD$ со стороной 4 см и углом BAD, равным 60°, вписана окружность. К ней проведена касательная, пересекающая AB в точке M и AD в точке P. Найти MB и PD, если $MP = 2$ см.

3.6. Трапеция

96. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна полусумме оснований, а периметр равен 48. Найти боковую сторону трапеции.

97. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 см и 4 см, а длины непараллельных сторон 20 см и 13 см. Найти высоту трапеции.

98. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны и равны (каждая) 8 см.

99. Меньшее основание равнобедренной трапеции имеет длину 4 см. Его концы соединены с серединой большего основания. Все три полученные треугольника — прямоугольные. Найти площадь трапеции.

100. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.

101. В равнобедренной трапеции площадью $27\sqrt{3}$ диагонали пересекаются под углом 60°. Найти длину средней линии трапеции.

102. Найти отношение большего основания трапеции к меньшему, если средняя линия делится диагоналями на три равные части.

103. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание равно 8 см, периметр равен 112 см. Найти площадь трапеции.

104. В равнобедренной трапеции одно из оснований в два раза больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции, если ее высота равна $5\sqrt[4]{3}$.

105. Найти площадь равнобедренной трапеции, описанной вокруг окружности, если разность ее оснований 6 см, а боковая сторона — 5 см.

106. Высота равнобедренной трапеции равна 14, а основания 12 и 16. Определить радиус описанного круга.

107. Около окружности радиуса 5 описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания боковых сторон равно 8. Найти площадь трапеции.

108. В полукруг радиуса 1 вписана трапеция, основание которой диаметр, а периметр равен 5. Найти площадь трапеции.

109. В равнобедренной трапеции диагональ делит острый угол пополам. Найти среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 48, а большее основание — 18.

110. Длина диагонали равнобедренной трапеции равна 12, длина боковой стороны 4, синус угла при основании равен 0,9. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$, где α — острый угол между диагоналями трапеции.

3.7. Разные задачи

111. В прямоугольный треугольник вписан ромб так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника, а угол, равный 60°, является общим углом треугольника и ромба. Найти стороны треугольника, если сторона ромба равна 6.

112. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AKM так, что точка K лежит на стороне BC, точка M — на CD и $AM = AK$. Найти $\angle MAD$, если известно, что $\operatorname{tg} \angle AKM = 3$.

113. Прямоугольник со сторонами 36 и 48 разделен диагональю на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найти расстояние между их центрами.

114. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48 см^2, а диагональ равна 10 см. Точка O удалена от вершин B и D на расстояние 13 см. Найти расстояние от точки O до наиболее удаленной от этой точки вершины прямоугольника.

115. В ΔABC точка H — ортоцентр (точка пересечения высот). Найти AH, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

116. В ΔABC проведена медиана BD. Найти отношение радиуса окружности, описанной около треугольника ABD, к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AB = 2$, $AC = 6$ и $\angle BAC = 60°$.

117. Одно из оснований трапеции равно 24 см, а расстояние между серединами диагоналей 4 см. Найти другое основание.

118. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найти радиус окружности.

119. Из одной точки проведены перпендикуляр и две наклонные длиной 10 см и 17 см к данной прямой. Проекции наклонных соотносятся как 2 : 5. Найти длину перпендикуляра.

120. Около равностороннего треугольника описана окружность радиуса $R = 2\sqrt{3}$, через центр которой проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между двумя сторонами треугольника.

Глава 3

ТИПОВЫЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА

§ 4. Шкала пересчета первичного балла за выполнение работы в отметку по пятибалльной шкале

Первичный балл за выполнение работы начисляется следующим образом:

1. Задания 1–8 считаются выполненными верно, если в бланке с заданиями обведен номер правильного ответа или вписан правильный ответ. За верное выполнение каждого из заданий учащемуся начисляется 1 балл. В итоге за выполнение заданий первой части можно максимально набрать 8 баллов.

2. Задания 9–12 считаются выполненными верно, если в бланке с заданиями учащимся вписан правильный ответ. За верное выполнение заданий 9–11 учащемуся начисляется 1 балл. За верное выполнение задания 12 учащийся может получить 2 балла. Задание 13 считается выполненным верно, если из записи учащегося понятен ход его рассуждений и требуемые утверждения доказаны. Верное выполнение задания 13 оценивается в 2 балла. Таким образом, за успешное выполнение заданий второй части можно максимально набрать 7 баллов.

3. В третью часть работы включены два задания (14, 15) высокого уровня сложности. При верном выполнении заданий третьей части в первичный балл засчитывается 2 балла за задание 14, и 3 балла за задание 15. В итоге максимально за выполнение заданий третьей части можно получить 5 баллов. Задания 14 и 15 считаются выполненными верно, если учащийся выбрал правильный путь решения, из записи понятен ход его рассуждений, в результате получен правильный ответ. В зависимости от полноты и правильности решения каждого задания третьей части учащийся может получить не только полный балл, но и «частичный», вплоть до одного.

Отметка по 5-балльной шкале	2	3	4	5
Первичный балл за работу	Менее 6	6–8	9–14	15–20

§ 5. Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по геометрии дается 2,5 часа (150 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 15 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий обязательного уровня. К первым пяти заданиям приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий обведите кружком **номер** выбранного ответа в экзаменационной работе. Если вы ошиблись при выборе ответа, то зачеркните отмеченную цифру и обведите нужную:

1) 26 $\quad$ ~~2~~) 20 $\quad$ 3) 15 $\quad$ 4) 10

К заданиям 6–8 дайте только ответ (решение записывать не нужно). Ответ записывается в экзаменационной работе в отведенном для этого месте. В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите рядом новый.

Часть 2 содержит 5 более сложных заданий. К заданиям 9–12 необходимо дать только ответ (целое число или десятичная дробь), к заданию 13 — записать решение.

Часть 3 содержит 2 самых сложных задания, при выполнении которых требуется записать обоснованное решение.

При выполнении работы разрешается использовать линейку, угольник, циркуль и транспортир. Использование калькулятора не допускается.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны в работе. С целью экономии времени пропускайте задание, которое не удается выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у вас останется время, то можно вернуться к пропущенным заданиям.

За каждый правильный ответ в зависимости от сложности задания дается один или более баллов. Баллы, полученные вами за все задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать как можно большее количество баллов.

Желаем успеха!

Вариант 1

Часть 1

К каждому из заданий 1–5 даны 4 варианта ответа, из которых только один правильный. Номер этого ответа обведите кружочком.

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите $\angle DCO$, если $\angle COD = 54°$.

1) 46°; 2) 23°; 3) 66°; 4) 63°.

2. К окружности с центром O из точки A проведена касательная AM. Найдите радиус окружности, если $\angle AOM = 60°$ и $OA = 18$.

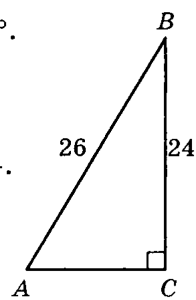
1) 12; 2) 9; 3) 8; 4) 6.

3. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 120°. Чему равен угол между боковыми сторонами этого треугольника?

1) 60°; 2) 100°; 3) 80°; 4) 90°.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\cos \angle A$.

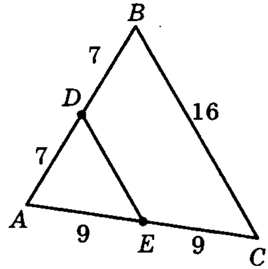
1) $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{12}{5}$; 4) $\frac{5}{13}$.



5. Длина окружности равна 30π. Найдите радиус этой окружности.

1) 6; 2) 6,5; 3) 15; 4) 8.

При выполнении заданий 6–11 запишите ответ (целое число или десятичную дробь) в отведенном для него месте. Единицы измерения (градусы, метры и др.) не указывайте.



6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр треугольника ADE.

7. Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, если ее основания равны 13 и 23, а высота равна 12.

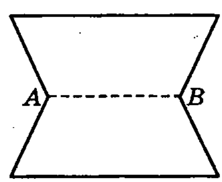
8. В равнобедренном треугольнике основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Найдите длину основания, если периметр треугольника равен 20.

Часть 2

9. MN — диаметр окружности с центром O. K — точка этой окружности. Найдите периметр ΔMOK, если известно, что $MK = 12$, $KN = 5$.

10. Внешний угол правильного n-угольника равен $\frac{\pi}{4}$.

Найдите число сторон многоугольника.



11. Имеется лист фанеры прямоугольной формы, длина и ширина которого соответственно равны 8 дм и 5 дм. Из него, как показано на рисунке, вырезаны две одинаковые части в форме равнобедренных треугольников. Сколько кг краски потребуется, чтобы покрасить получившуюся фигуру, если $AB = 4$, а на 1 дм^2 поверхности расходуется 0,02 кг краски?

При выполнении задания 12 обведите кружком номера ответов, которые вы выбрали как правильные. После слова «Ответ» запишите номера выбранных ответов, например 123.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Точка пересечения медиан всегда расположена внутри треугольника.
2) Медианы треугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.
3) Медиана делит треугольник на два треугольника равной площади.
4) Медиана всегда делит пополам один из углов треугольника.
5) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Для записи ответов на задания 13–15 используйте подписанный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем его решение.

13. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BE и BF, причем точка E лежит на стороне AD, а точка F лежит на стороне CD. Докажите, что $\Delta ABE \sim \Delta CBF$, а $\angle EBF = \angle A$.

Часть 3

14. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный ΔABC, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

15. В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7. Найдите отношение R/r, если площадь ΔABC равна 144.

Вариант 2

Часть 1

1. Диагонали прямоугольника $MNKP$ пересекаются в точке O. Найдите $\angle KOP$, если $\angle OKP = 72°$.

1) 34°; 2) 36°; 3) 40°; 4) 44°.

2. К окружности радиуса 8 и с центром O из точки A проведена касательная AB (B — точка касания). Найдите $\angle AOB$, если $AO = 16$.

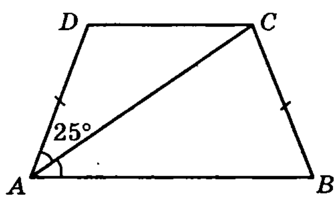
1) 60°; 2) 30°; 3) 45°; 4) 90°.

3. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен 80°. Чему равен угол при основании этого треугольника?

1) 40°; 2) 60°; 3) 100°; 4) 20°.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\angle ACB$.

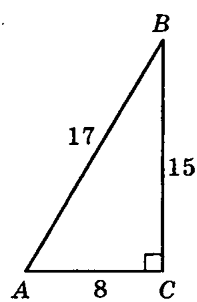
1) 110°; 2) 105°;
3) 90°; 4) 115°.



5. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\operatorname{ctg} \angle B$.

1) $\frac{15}{8}$; 2) $\frac{17}{8}$;

3) $\frac{8}{15}$; 4) $\frac{8}{17}$.



6. Точки M, N и K лежат на окружности с центром O. Найдите $\angle MON$, если $\angle MKN = 72°$.

7. Найдите высоту равнобедренной трапеции, если ее основания равны 16 и 26, а боковая сторона равна 13.

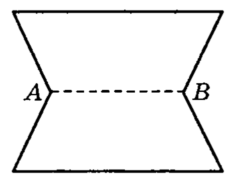
8. Периметр равнобедренного треугольника равен 7, а сумма его боковых сторон в 2,5 раза больше основания. Найдите длину боковой стороны.

Часть 2

9. MN — диаметр окружности с центром O. K — точка этой окружности. Найдите периметр ΔKON, если известно, что $MK = 12$, $KN = 5$.

10. Внешний угол правильного n-угольника равен $\frac{2\pi}{9}$. Найдите число сторон многоугольника.

11. Имеется лист фанеры прямоугольной формы, длина и ширина которого соответственно равны 8 дм и 4 дм. Из него, как показано на рисунке, вырезаны две одинаковые части в форме равнобедренных треугольников. Сколько кг краски потребуется, чтобы покрасить получившуюся фигуру, если длина отрезка $AB = 5$ дм, а на 1 дм^2 поверхности расходуется 0,01 кг краски?



12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Диагонали правильного пятиугольника равны.
2) Каждый из углов правильного пятиугольника острый.
3) Радиус окружности, описанной около правильного пятиугольника, меньше его стороны.
4) Каждый из углов правильного пятиугольника тупой.
5) Радиус окружности, вписанной в правильный пятиугольник, в 2 раза меньше его стороны.

13. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке E, а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке F. Докажите, что ΔABE — равнобедренный, а $\Delta ABE = \Delta CDF$.

Часть 3

14. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а проекция меньшего катета на гипотенузу 3,6. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

15. В ΔABC угол при вершине A тупой. Известно, что $AB = 9$, $AC = 10$, а площадь треугольника составляет 0,4 от произведения сторон AB и AC. Найдите периметр ΔABC.

Вариант 3

Часть 1

1. Диагональ трапеции образует с меньшим основанием угол, равный 56°. Найдите величину угла, который эта диагональ образует с бóльшим основанием.

1) 34°; 2) 43°; 3) 56°; 4) 65°.

2. AB — касательная к окружности, AC — секущая, $AD = 4$ — внешняя часть, $DC = 5$. Найдите AB.

1) 9; 2) 8; 3) 5; 4) 6.

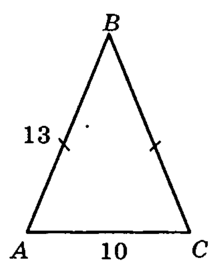
3. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 120°. Чему равен внешний угол при вершине этого треугольника?

1) 60°; 2) 120°; 3) 100°; 4) 140°.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\operatorname{ctg} \angle A$.

1) $\frac{12}{5}$; 2) $\frac{12}{13}$;

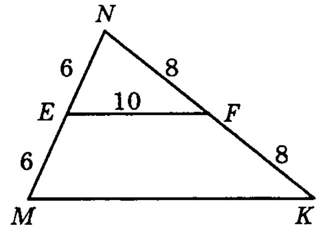
3) $\frac{13}{12}$; 4) $\frac{5}{12}$.



5. $ABCD$ — параллелограмм. O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Найдите $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}$.

1) $\overrightarrow{CO}$; 2) $\overrightarrow{OB}$; 3) $\overrightarrow{BO}$; 4) $\overrightarrow{OC}$.

6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр ΔMNK.



7. В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC отмечена точка E так, что $AB = BE$. Найдите $\angle BCD$, если $\angle EAD = 15°$.

8. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно 16, а боковая сторона 10.

Часть 2

9. Сторона ромба $ABCD$ равна 4 см, $\angle C = 60°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

10. Угол правильного n-угольника в 3 раза больше внешнего угла n-угольника, взятого при той же вершине. Найдите число сторон многоугольника.

11. В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$), $AC = 6$ см, $AB = 9$ см, CD — высота. Найдите BD.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.
2) Радиус окружности, описанной около квадрата, в $\sqrt{2}$ раз меньше его стороны.
3) Каждый из углов квадрата острый.
4) Каждый из углов квадрата прямой.
5) Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен его стороне.

13. В ромбе $MNKP$ из вершины тупого угла N к стороне MP проведена высота NE и к стороне KP —

высота NF. Докажите, что $\Delta MNE = \Delta KNF$, и $\angle ENF = \angle NMP$.

Часть 3

14. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности и гипотенузы делит ее на отрезки 3 и 10. Найдите больший катет.

15. В ΔABC $AB = 15$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 4$ и составляет 4/9 длины стороны BC. Найдите площадь ΔABC, если $AD = 13$.

Вариант 4

Часть 1

1. Диагональ трапеции образует с бо́льшим основанием угол, равный 46°. Найдите величину угла, который эта диагональ образует с бо́льшим основанием.

1) 46°; 2) 54°; 3) 45°; 4) 64°.

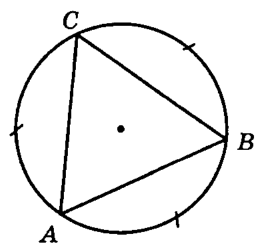
2. MK — касательная к окружности, $MC = 16$ — секущая, MB — внешняя часть, $BC = 12$. Найдите MK.

1) 4; 2) 8; 3) 12; 4) 6.

3. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен 80°. Чему равен внешний угол при основании этого треугольника?

1) 120°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 140°.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\cos \angle A$.



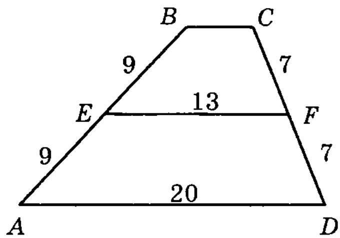
1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 1.

5. $MKPC$ — параллелограмм, E — точка пересечения диагоналей MP и KC. Найдите $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{EP}$.

1) $\overrightarrow{EK}$; 2) $\overrightarrow{MK}$; 3) $\overrightarrow{KC}$; 4) $\overrightarrow{CE}$.

6. Четырехугольник $ABCD$ — трапеция. Используя данные, указанные на рисунке, найдите BC.



7. В параллелограмме $ABCD$ на стороне BC отмечена точка M так, что $AB = BM$. Найдите $\angle BCD$, если $\angle MAD = 25°$.

8. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно 18, а площадь 108.

Часть 2

9. Сторона ромба $MNPK$ равна 7 см, $\angle P = 60°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MK}$.

10. Внешний угол правильного n-угольника в 4 раза меньше внутреннего угла этого n-угольника. Найдите число сторон n-угольника.

11. В прямоугольном ΔKPE ($\angle P = 90°$), $PE = 8$ см, $KE = 16$ см, PF — высота. Найдите длину отрезка FK.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Все диагонали правильного двенадцатиугольника равны.
2) Каждый из углов правильного двенадцатиугольника — острый.
3) Каждый из углов правильного двенадцатиугольника — тупой.
4) Радиус окружности, описанной около правильного двенадцатиугольника, больше его стороны.

5) Последовательно взятые через одну вершины правильного двенадцатиугольника являются вершинами правильного шестиугольника.

13. В правильном шестиугольнике $MNKPEF$ из точки M проведены диагонали. Докажите, что $\Delta MKP = \Delta MEP$, а прямые NK и MP параллельны.

Часть 3

14. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16 и высотой 4.

15. В ΔABC известны длины сторон: $AB = 6{,}5$; $BC = 7{,}5$; $AC = 7$. Из вершины B проведены высота BD и биссектриса BK. Найдите площадь ΔBKD.

Вариант 5

Часть 1

1. В ромбе $ABCD$ проведена диагональ BD. Найдите $\angle ADC$, если известно, что $\angle ABD = 65°$.

1) 25°; 2) 130°; 3) 120°; 4) 115°.

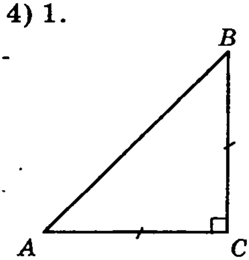
2. $MK = 8$ — касательная к окружности, MC — секущая, MB — внешняя часть. Найдите MB, если $BC = 12$.

1) 16; 2) 12; 3) 8; 4) 4.

3. Найдите длину (модуль) вектора $\vec{a}\{3;\ 4\}$.

1) 5; 2) $\sqrt{13}$; 3) 7; 4) 1.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\operatorname{tg} \angle A$.



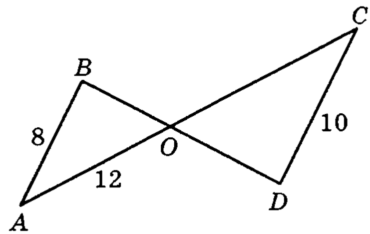
1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{2}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 1.

5. Найдите длину окружности, радиус которой равен 8.

1) 8π; 2) 16π; 3) 12π; 4) 18π.

6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите AC, если известно, что $AB \parallel CD$.

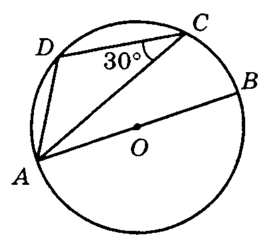


7. В параллелограмме $MNEF$ на стороне MF отмечена точка K так, что $MN = MK$. Найдите $\angle NEF$, если $\angle MNK = 70°$.

8. В ΔABC $\angle A = 120°$; $AB = 3$; $AC = 2$. Найдите квадрат стороны BC.

Часть 2

9. Используя данные, указанные на рисунке, найдите градусную меру $\angle DCB$, где AB — диаметр окружности.



10. Внешний угол правильного n-угольника в 3,5 раза меньше внутреннего угла n-угольника. Найдите число сторон n-угольника.

11. Высоты параллелограмма равны 6 см и 10 см, а периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите разность между смежными сторонами параллелограмма.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Высоты треугольника могут не пересекаться.
2) Высота всегда делит пополам один из углов треугольника.
3) Высота всегда проходит через середину стороны треугольника.

4) Высота может совпадать с одной из сторон треугольника.
5) Высота всегда образует с прямой, содержащей одну из сторон треугольника, равные углы.

13. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFMN$. Докажите, что $\Delta ABE = \Delta EDA$, а прямые BD и AE параллельны.

Часть 3

14. Радиус окружности, описанной около ΔABC, равен 5. Сторона $AB = 5$, высота $BD = 4$. Найдите длину стороны BC.

15. Площадь ΔABC равна 40. Известно, что биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и DC, причем $BD : DC = 3 : 2$. Биссектриса AD пересекает медиану BM в точке E. Найдите площадь четырехугольника $EDCM$.

Вариант 6

Часть 1

1. В ромбе $PKMN$ проведена диагональ PM. Найдите $\angle NPM$, если известно, что $\angle K = 140°$.

1) 70°; 2) 50°; 3) 40°; 4) 20°.

2. $AB = 6$ — касательная к окружности, AC — секущая, AD — внешняя часть. Найдите AD, если $CD = 5$.

1) 9; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

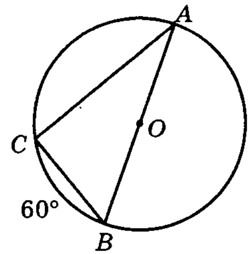
3. Найдите длину (модуль) вектора $\overline{m}\{4; 5\}$.

1) 9; 2) $\sqrt{21}$; 3) $\sqrt{41}$; 4) 3.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\cos \angle B$.

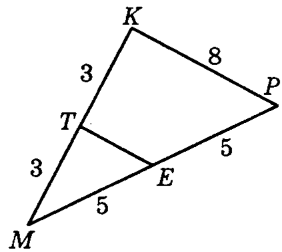
1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\frac{1}{2}$; 4) $\sqrt{3}$.

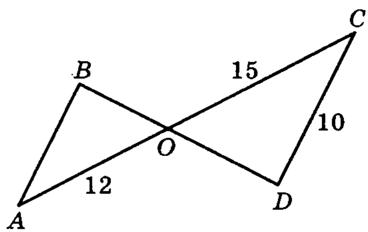


5. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр ΔMTE.

1) 8; 2) 12;
3) 9; 4) 10.



6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите AB, если известно, что $AB \parallel CD$.

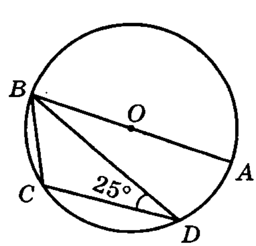


7. В параллелограмме $MNEF$ на стороне MF отмечена точка P так, что $MN = MP$. Найдите $\angle NPF$, если $\angle NMP = 40°$.

8. Длины сторон треугольника 10; 10; 12. Найдите косинус угла между неравными сторонами треугольника.

Часть 2

9. Используя данные, указанные на рисунке, найдите градусную меру $\angle CDA$, где AB — диаметр окружности.



10. Угол правильного n-угольника в 5 раз больше внешнего угла n-угольника, взятого при той же вершине. Найдите число сторон многоугольника.

11. Высоты параллелограмма равны 12 см и 16 см. Периметр параллелограмма равен 98 см. Найдите разность между смежными сторонами параллелограмма.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Любые две стороны квадрата равны и параллельны.
2) Диагонали квадрата равны и точкой пересечения делятся пополам.
3) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.
4) Диагонали квадрата в 2 раза больше его стороны.
5) Вершины квадрата являются серединами сторон ромба, острый угол которого равен 60°.

13. В правильном шестиугольнике $MNKPEF$ из точки K проведены диагонали. Докажите, что $\Delta MKF = \Delta EKF$, а прямые PE и KF параллельны.

Часть 3

14. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 40°. Определите острый угол между радиусом описанной окружности, проведенным в вершину прямого угла, и гипотенузой.

15. Площадь ΔABC равна 70. Известно, что биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и DC, причем $BD : DC = 3 : 2$. На стороне AC выбрана точка M такая, что биссектриса AD пересекает BM в точке F и $BF : FM = 5 : 2$. Найдите площадь четырехугольника $FDCM$.

Вариант 7

Часть 1

1. Точка M расположена на отрезке $AB = 16$ так, что $AM : MB = 1 : 3$. Найдите расстояние между серединами отрезков AM и MB.

1) 5; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

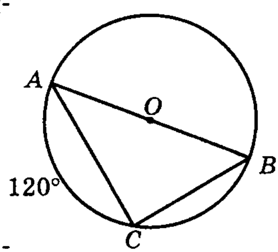
2. Найдите радиус окружности, если дуга длиной 3π стягивает центральный угол $\frac{\pi}{3}$.

1) 9; 2) 6; 3) 18; 4) 8.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$.

1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{DB}$; 3) $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{BD}$.

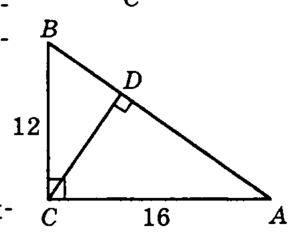
4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\sin \angle A$.



1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$.

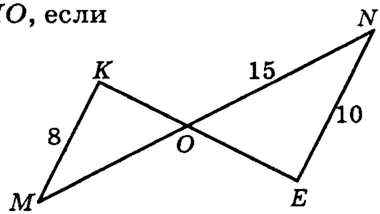
5. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите высоту CD.



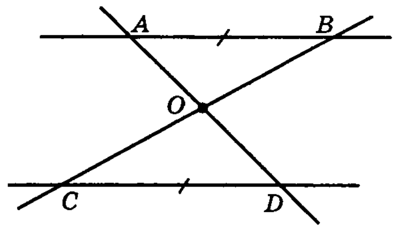
1) $6\sqrt{3}$; 2) 9,6;

3) 9,5; 4) 8.

6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите MO, если известно, что $MK \parallel EN$.



7. Прямые AD и BC пересекаются в точке O. Отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых. Найдите BC, если $OC = 6$.



8. В ΔABC известно, что $AB = 6$; $AC = 9$; $\angle A = 30°$. Найдите площадь ΔABC.

Часть 2

9. Сторона ромба $MNPK$ равна $6\sqrt{3}$ см, $\angle P = 60°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MK}$.

10. Величины углов выпуклого пятиугольника пропорциональны числам $2 : 3 : 4 : 5 : 6$. Найдите величину большего из углов.

11. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BC = 9$ дм, $AD = 16$ дм, $BD = 18$ дм. O — точка пересечения AC и BD. Найдите OB.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Диагонали правильного пятиугольника равны.
2) Радиус окружности, вписанной в правильный пятиугольник, в 2 раза меньше его стороны.
3) Каждый из углов правильного пятиугольника — тупой.
4) Центр правильного пятиугольника лежит на его диагонали.
5) Радиус окружности, описанной около правильного пятиугольника, меньше его стороны.

13. Дан правильный восьмиугольник $ABCDEFMN$. Докажите, что $\Delta ADE = \Delta AFE$, а прямые DF и AE перпендикулярны.

Часть 3

14. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а угол при основании равен 30°. Определите диаметр описанной окружности.

15. В прямоугольном треугольнике длины медиан, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите длину гипотенузы треугольника.

Вариант 8

Часть 1

1. Точка K расположена на отрезке MN так, что $MK : KN = 1 : 2$. Найдите расстояние между серединами MK и KN.

1) 6; 2) 9; 3) 8; 4) 10.

2. Хорда, длина которой равна 9, стягивает дугу величины $\frac{\pi}{3}$. Найдите длину дуги.

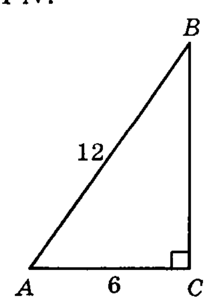
1) $\frac{\pi}{27}$; 2) 27π; 3) 6π; 4) 3π.

3. Дан параллелограмм $MNKP$. Укажите вектор, равный сумме векторов $\overrightarrow{KN}$ и $\overrightarrow{KP}$.

1) $\overrightarrow{KM}$; 2) $\overrightarrow{MK}$; 3) $\overrightarrow{NP}$; 4) $\overrightarrow{PN}$.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите величину $\angle A$.

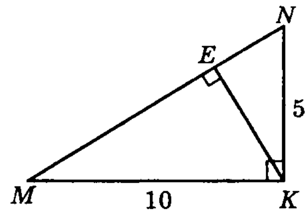
1) 45°; 2) 30°;
3) 60°; 4) 75°.



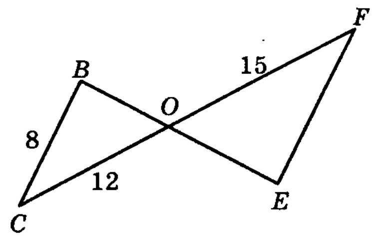
5. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите высоту KE.

1) $2\sqrt{5}$; 2) 4,5;

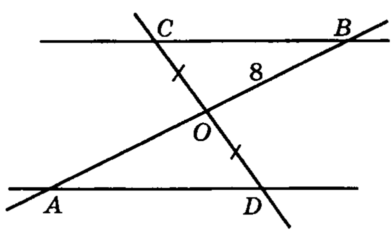
3) $5\sqrt{3}$; 4) 7,5.



6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите FE, если известно, что $CD \parallel FE$.



7. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Отрезки CB и AD лежат на параллельных прямых. Найдите AB, если $OB = 8$.



8. Сторона ромба равна 4, а острый угол 30°. Найдите площадь ромба.

Часть 2

9. AB — диаметр окружности с центром O, C — точка этой окружности. Найдите периметр ΔBOC, если известно, что $AB = 15$, $AC = 12$.

10. Величины углов выпуклого пятиугольника пропорциональны числам 4 : 5 : 6 : 7 : 8. Найдите величину большего из углов.

11. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BC = 6$ дм, $AD = 14$ дм, $AC = 15$ дм. E — точка пересечения диагоналей AC и BD. Найдите CE.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Любой прямоугольник является квадратом.
2) Любой квадрат является трапецией.
3) Любой квадрат является параллелограммом.
4) Любой прямоугольник является ромбом.
5) Любой прямоугольник является параллелограммом.

13. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках M и N. Докажите, что точки B, N, D и M являются вершинами параллелограмма, а $\angle ABN = \angle CDM$.

Часть 3

14. Сумма меньшего катета и гипотенузы равна 3. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Найдите радиус описанной окружности.

15. В ΔABC $AB = 13$; $BC = 15$; $AC = 14$. Вычислите площадь треугольника, заключенного между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины B.

Вариант 9

Часть 1

1. Диагональ ромба равна его стороне. Найдите больший угол ромба.

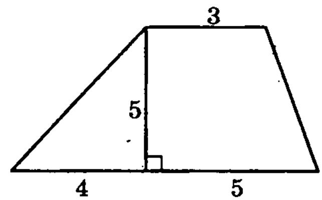
1) 130°; 2) 120°; 3) 150°; 4) 160°.

2. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки окружности на диаметр, если его основание делит диаметр на отрезки длиной 16 и 4.

1) 4; 2) 8; 3) 6; 4) 10.

3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь трапеции.

1) 30; 2) 60;
3) 45; 4) 20.



4. В равнобедренном ΔABC $\angle C = 106°$. AM — высота треугольника. Найдите $\angle MAB$.

1) 127°; 2) 16°; 3) 37°; 4) 53°.

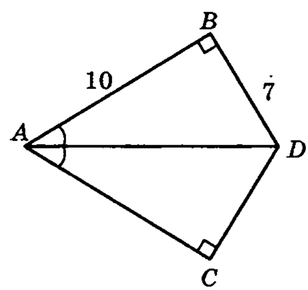
5. AD — медиана ΔABC. Найдите $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DB}$.

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AD}$;

3) $\overrightarrow{DA}$; 4) $\overrightarrow{BA}$.

6. Из точки B к окружности с центром O проведена касательная, A — точка касания. Найдите радиус окружности, если $AB = 8\sqrt{3}$, $\angle ABO = 30°$.

7. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр четырехугольника $ABDC$.



8. Сторона ромба равна $2\sqrt{5}$, а одна из диагоналей равна 4. Найдите площадь ромба.

Часть 2

9. Сторона равностороннего ΔQTR равна 8 см. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{QR}$ и $\overrightarrow{RT}$.

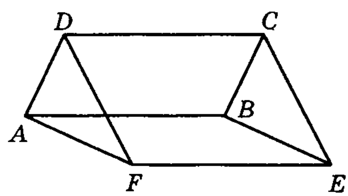
10. Внешний угол правильного многоугольника меньше внутреннего угла на 140°. Найдите число сторон данного многоугольника.

11. В ΔMNP MM_1 и PP_1 — медианы, $MM_1 = 9\sqrt{3}$, $PP_1 = 6$, $\angle MOP = 150°$. Найдите MP.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Медиана делит треугольник на два треугольника равной площади.
2) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
3) Медиана всегда делит пополам один из углов треугольника.
4) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.
5) Медианы треугольника делятся в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины.

13. На рисунке $ABCD$ и $ABEF$ — параллелограммы. Докажите, что четырехугольник $DCEF$ — параллелограмм и $\Delta ADF = \Delta BCE$.



Часть 3

14. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника с углом 60° и проходит через вершину этого угла. Найдите периметр треугольника, если центр окружности лежит на гипотенузе, а длина ее радиуса равна $\frac{3-\sqrt{3}}{5}$.

15. Основание треугольника равно 20, медианы боковых сторон равны 18 и 24. Найдите площадь треугольника.

Вариант 10

Часть 1

1. Диагональ ромба, лежащая против угла 60°, равна 13. Найдите сторону ромба.

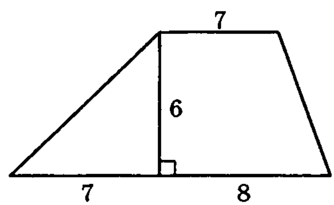
1) 8; 2) 26; 3) 6,5; 4) 13.

2. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки окружности на диаметр, если его основание делит диаметр на отрезки длиной 3 и 12.

1) 6; 2) 15; 3) 4; 4) 5.

3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь трапеции.

1) 132; 2) 33;
3) 90; 4) 66.



4. В равнобедренном треугольнике угол, смежный с углом при вершине треугольника, равен 70°. Найдите угол при основании треугольника.

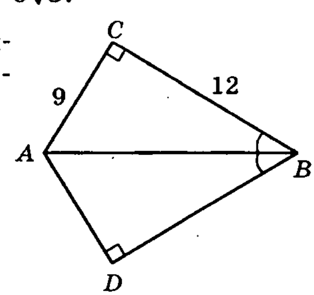
1) 70°; 2) 35°; 3) 105°; 4) 85°.

5. NE — медиана ΔMNK. Найдите $\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{MN}$.

1) $\overrightarrow{NK}$; 2) $\overrightarrow{KN}$; 3) $\overrightarrow{NE}$; 4) $\overrightarrow{EN}$.

6. Из точки B к окружности с центром O проведена касательная, A — точка касания. Найдите радиус окружности, если $BO = 12$, $AB = 6\sqrt{3}$.

7. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр четырехугольника $ACBD$.



8. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, у которого $\angle A = 150°$, $AB = 3$; $AD = 8$.

Часть 2

9. В ΔMNS $MN = 5$ см, $NS = 2\sqrt{2}$ см, $\angle N = 135°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{NM}$ и $\overline{NS}$.

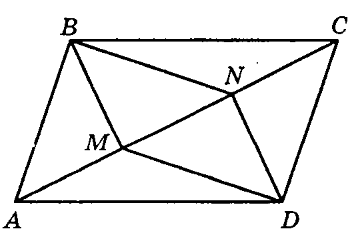
10. Внешний угол правильного многоугольника на 144° меньше внутреннего угла. Найдите число сторон данного многоугольника.

11. В ΔABC AA_1 и BB_1 — медианы, M — точка их пересечения, $AA_1 = 9$; $BB_1 = 15$, $\angle AMB = 120°$. Найдите AB.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Медианы делят треугольник на 6 треугольников равной площади.
2) Медиана всегда перпендикулярна к одной из сторон треугольника.
3) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины.
4) Медиана делит пополам сторону треугольника, к которой она проведена.
5) Точка пересечения медиан произвольного треугольника — центр окружности, вписанной в этот треугольник.

13. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляры, проведенные через вершины тупых углов к диагонали AC, пересекают ее в точках M и N. Докажите, что $BN = DM$, а $\Delta ABM = \Delta CDN$.



Часть 3

14. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, длина которой равна $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

15. Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

Вариант 11

Часть 1

1. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 60°. Найдите угол между диагональю и большей стороной прямоугольника.

1) 50°; 2) 80°; 3) 60°; 4) 30°.

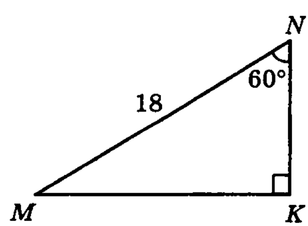
2. Через точку M окружности с центром O проведена касательная MK. Найдите OK, если $OM = 4$ и $\angle MOK = 60°$.

1) $4\sqrt{3}$; 2) 8; 3) $8\sqrt{3}$; 4) 4.

3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет MK.

1) $6\sqrt{3}$; 2) $9\sqrt{3}$;

3) 9; 4) $18\sqrt{3}$.



4. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 130°. Чему равен внешний угол при вершине треугольника?

1) 100°; 2) 110°; 3) 130°; 4) 80°.

5. Найдите длину вектора $\vec{m}\{6; -8\}$.

1) $\sqrt{2}$; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{14}$.

6. Точки M, N и T лежат на окружности с центром O. Найдите $\angle MON$, если $\angle MTN = 69°$.

7. Найдите сторону AC ΔABC, если известно, что $AB = 8$, $BC = 10$, $\cos \angle B = \frac{1}{8}$.

8. Диагонали параллелограмма равны 6 и 8, а угол между ними 30°. Найдите площадь параллелограмма.

Часть 2

9. Сторона равностороннего ΔFEM равна 10 см. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EM}$.

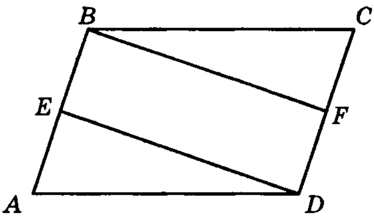
10. Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $5\sqrt{3}$ см. Найдите периметр шестиугольника.

11. В прямоугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Известно, что угол ACB в 8 раз меньше, чем $\angle CAB$. Найдите $\angle CAB$.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Точка пересечения биссектрис находится внутри треугольника.
2) Биссектриса всегда делит пополам один из углов треугольника.
3) Точка пересечения биссектрис произвольного треугольника — центр окружности, описанной около этого треугольника.
4) Биссектриса всегда перпендикулярна к одной из сторон треугольника.
5) Точка пересечения биссектрис произвольного треугольника — центр окружности, вписанной в этот треугольник.

13. Точки E и F — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $BF = DE$, а $\triangle AED = \triangle CBF$.



Часть 3

14. В $\triangle ABC$ длина стороны BC равна длине радиуса описанной окружности. Найдите величину $\angle BAC$ (в градусах).

15. В прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Найдите отношение площади $\triangle ABC$ к площади $\triangle A_1B_1C_1$, если известно, что $AC = 4$, $BC = 3$.

Вариант 12

Часть 1

1. В ромбе $ABCD$ проведена диагональ AC. Найдите $\angle ABC$, если известно, что $\angle CAD = 30°$.

1) 120°; 2) 60°; 3) 140°; 4) 80°.

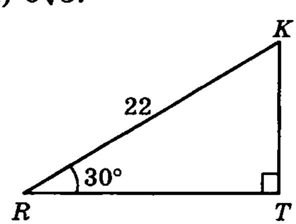
2. Через точку A окружности с центром O проведена касательная AB. Найдите радиус окружности, если $OB = 12$, $\angle AOB = 60°$.

1) 8; 2) 6; 3) $6\sqrt{2}$; 4) $6\sqrt{3}$.

3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет RT.

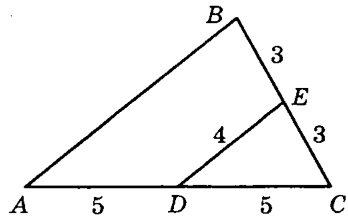
1) $11\sqrt{3}$; 2) $22\sqrt{3}$;

3) 11; 4) $22\sqrt{2}$.



4. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр треугольника ABC.

1) 12; 2) 18;
3) 24; 4) 20.



5. Найдите длину вектора $\vec{n}$ $\{12; -5\}$.

1) $\sqrt{13}$; 2) 17; 3) 13; 4) 7.

6. Площадь круга равна 100π. Найдите радиус этой окружности.

7. Найдите сторону MP ΔMNP, если известно, что $MN = 4$, $NP = 5$, $\cos \angle N = \frac{1}{8}$.

8. Диагонали параллелограмма равны $2\sqrt{3}$ и 80, а угол между ними равен 60°. Найдите площадь параллелограмма.

Часть 2

9. Сторона равностороннего ΔABC равна 9 см, CD — высота треугольника. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

10. Окружность описана около правильного шестиугольника со стороной $2/\pi$. Найдите длину окружности.

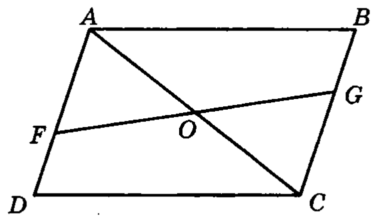
11. Периметр параллелограмма равен 60. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны относятся как 2 : 3, а острый угол равен 30°.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Если в трапеции две стороны равны, то она обязательно равнобедренная.
2) Трапеция является равнобедренной, если углы при одном из ее оснований равны.

3) Любая трапеция, углы между основаниями и одной из боковых сторон которой равны, является прямоугольной.
4) Если у трапеции боковые стороны равны, то она называется равнобедренной.
5) Если в трапеции два угла равны, то она обязательно прямоугольная.

13. В четырехугольнике $ABCD$ AC — диагональ, $AB \parallel DC$, $AB = DC$; $FD = BG$. Докажите, что $FO = OG$, а $\angle FAO = \angle GCO$.



Часть 3

14. В ΔABC $\angle ACB = 120°$. Найдите длину стороны AB, если радиус описанной окружности равен $5\sqrt{3}$.

15. В прямоугольном ΔABC из вершины прямого угла B проведены медиана BE и высота BK. Длина KE равна 1, а $\angle BAK = 60°$. Найдите длину гипотенузы.

Вариант 13

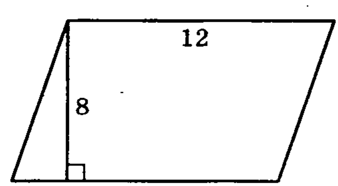
Часть 1

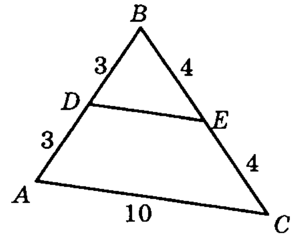
1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите величину угла CBD, если $\angle AOD = 130°$.

1) 25°; 2) 30°; 3) 50°; 4) 40°.

2. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь параллелограмма.

1) 20; 2) 48;
3) 64; 4) 96.





3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр ΔDBE.

1) 16; 2) 12;
3) 14; 4) 22.

4. Найдите длину вектора $4\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}\{6; 3\}$, $\vec{b}\{5; 4\}$.

1) $\sqrt{53}$; 2) 7; 3) 9; 4) $2\sqrt{53}$.

5. Найдите площадь круга, вписанного в квадрат с диагональю, равной $5\sqrt{2}$.

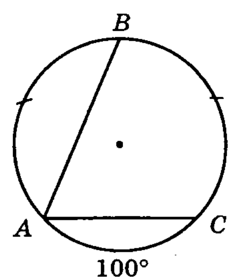
1) 6,25π; 2) 2,25π; 3) 5π; 4) 10π.

6. В окружности с центром O проведена хорда MN. Найдите $\angle MON$, если $\angle OMN = 62°$.

7. Две стороны треугольника, равные 6 и 10, образуют угол, равный 120°. Найдите третью сторону треугольника.

8. Периметр равнобедренной трапеции равен 36, а средняя линия равна 10. Найдите боковую сторону трапеции.

Часть 2



9. Хорда AC делит окружность на две дуги, причем $\smile AC = 100°$, $\smile AB = \smile BC$. Найдите величину $\angle BAC$.

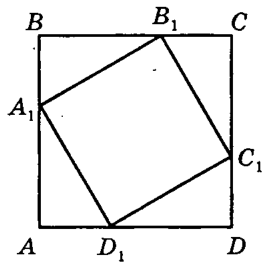
10. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно 2π?

11. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр ΔCDP, если $DK = 18$, $PK = 24$, $AD = 15$.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Центр правильного девятиугольника — точка пересечения его диагоналей.
2) Каждый из углов правильного девятиугольника — тупой.
3) Каждый из углов правильного девятиугольника — острый.
4) Радиус окружности, описанной около правильного девятиугольника, больше его стороны.
5) Радиус окружности, вписанной в правильный девятиугольник, меньше радиуса окружности, описанной около этого правильного девятиугольника.

13. Дан квадрат $ABCD$. На каждой из его сторон отложены равные отрезки AA_1, BB_1,CC_1 и DD_1; точки A_1, B_1, C_1 и D_1 последовательно соединены. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, а $\angle BA_1B_1 = \angle CB_1C_1$.



Часть 3

14. В ΔABC длина стороны $BC = 2\sqrt{2}$, $\angle BAC = 45°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

15. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 9, а величина угла при основании равна 30°. Из точки M на основании опущены перпендикуляры на боковые стороны. Найдите сумму длин этих перпендикуляров.

Вариант 14

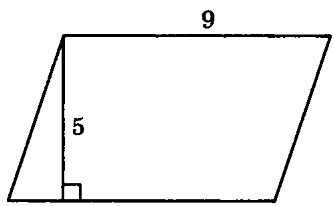
Часть 1

1. Диагонали AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Найдите $\angle BAC$, если известно, что $\angle ADC = 65°$.

1) 30°; 2) 25°; 3) 15°; 4) 20°.

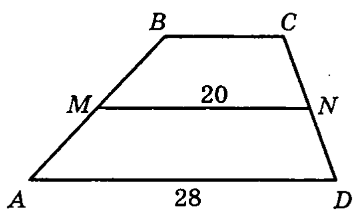
2. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь параллелограмма.

1) 90; 2) 22,5;
3) 45; 4) 14.



3. $ABCD$ — трапеция, MN — средняя линия. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину BC.

1) 24; 2) 16;
3) 14; 4) 12.



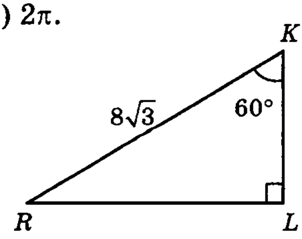
4. Найдите длину вектора $7\vec{a} - 3\vec{b}$, если $\vec{a}\{1; -1\}$, $\vec{b}\{5; -2\}$.

1) $\sqrt{65}$; 2) $\sqrt{63}$; 3) 8; 4) 7.

5. Найдите длину окружности, вписанной в ромб со стороной, равной 12, и острым углом 30°.

1) 8π; 2) 6π; 3) 4π; 4) 2π.

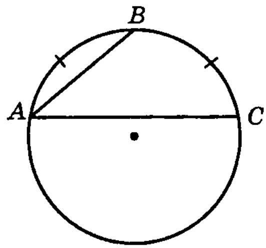
6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите катет RL.



7. Площадь ΔABC равна 90. Найдите сторону AB, если $AC = 15$, $\angle BAC = 150°$.

8. В равнобедренном треугольнике основание равно 30, а высота равна 20. Определите высоту, опущенную на боковую сторону.

Часть 2



9. Хорда AC делит окружность на две дуги, причем $\cup AC = 220°$, $\cup AB = \cup BC$. Найдите величину $\angle BAC$.

10. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, у которого отношение длины описанной окружности к стороне многоугольника равно $\pi\sqrt{2}$?

11. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр ΔCBT, если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Все диагонали правильного шестиугольника равны.
2) Каждый из углов правильного шестиугольника — тупой.
3) Каждый из углов правильного шестиугольника — острый.
4) Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности.
5) Угол правильного шестиугольника в 2 раза больше его внешнего угла.

13. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $CD = AD$. Середины сторон четырехугольника последовательно соединены. Доказать, что полученный четырехугольник является прямоугольником.

Часть 3

14. В ΔABC $AC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60°$, а $P_{\Delta ABC} = 14\sqrt{3}$. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до вершины B.

15. В треугольнике со сторонами 5; 6 и 10 к меньшей стороне проведены медиана и биссектриса. Найдите расстояние между точками пересечения медианы и биссектрисы с меньшей стороной.

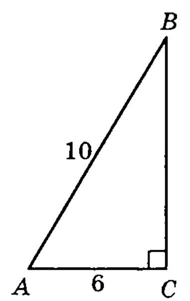
Вариант 15

Часть 1

1. Диагональ параллелограмма образует с одной из его сторон угол, равный 44°. Найдите величину угла, который эта диагональ образует с противоположной параллелограмма.

1) 46°; 2) 136°; 3) 44°; 4) 134°.

2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\text{ctg}\,\angle B$.



1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{5}{4}$;

3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{4}{5}$.

3. В окружности с центром O проведена хорда MK. Найдите $\angle MOK$, если $\angle OKM = 63°$.

1) 63°; 2) 54°; 3) 36°; 4) 77°.

4. Известно, что векторы $\vec{a}\{2;\,m\}$ и $\vec{b}\{12;\,4\}$ перпендикулярны. Найдите значение m.

1) –3; 2) –6; 3) 6; 4) 3.

5. Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен 50°. Найдите внешний угол при основании треугольника.

1) 120°; 2) 135°; 3) 140°; 4) 155°.

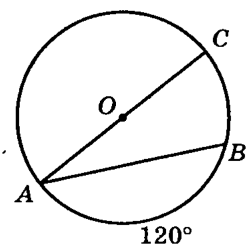
6. Из точки D к окружности с центром O проведена касательная, A — точка касания. Найдите радиус окружности, если $OD = 14$, $AD = 4\sqrt{6}$.

7. Площадь ΔKPE равна $60\sqrt{3}$. Найдите сторону KP, если $PE = 12$, $\angle KPE = 120°$.

8. Сторона ромба равна $3\sqrt{5}$. Найдите косинус острого угла ромба, если его меньшая диагональ равна 3.

Часть 2

9. Используя данные, приведенные на рисунке, определите угол между хордой AB и диаметром AC окружности.



10. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, меньшая диагональ которого равна 22.

11. В треугольнике ABC проведена биссектриса CM. Найдите периметр ΔABC, если $BC = 8$, $BM = 3$, $\angle ABC = 60°$.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Радиус окружности, описанной около правильного пятиугольника, меньше его стороны.
2) Каждый из углов правильного пятиугольника — острый.
3) Каждый из углов правильного пятиугольника — тупой.

4) Центр правильного пятиугольника лежит на его диагонали.
5) Диагонали правильного пятиугольника равны.

13. Доказать, что если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию, то диагональ, соединяющая их концы, является биссектрисой угла, прилежащего к большей стороне.

Часть 3

14. Периметр прямоугольного треугольника равен 24, а радиус описанной около него окружности — 5. Найдите радиус вписанной окружности.

15. В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 из вершины большего острого угла проведена биссектриса. Найдите длину проекции биссектрисы на больший катет.

Вариант 16

Часть 1

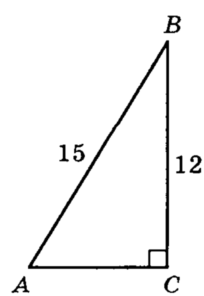
1. Одна из сторон параллелограмма равна 17, а периметр равен 90. Найдите длину стороны параллелограмма, смежной с данной.

1) 32; 2) 45; 3) 56; 4) 28.

2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\cos \angle A$.

1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$;

3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{5}{4}$.



3. Точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Найдите $\angle AOB$, если $\angle ACB = 38°$.

1) 38°; 2) 83°; 3) 116°; 4) 76°.

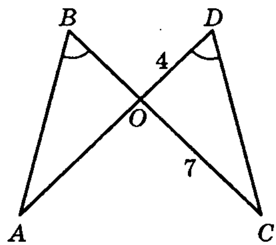
4. Известно, что векторы $\vec{a}\{2; -4\}$ и $\vec{b}\{m; 8\}$ коллинеарны. Найдите значение m.

1) –4; 2) –2; 3) 4; 4) 2.

5. Хорда круга имеет длину 7 и стягивает дугу, равную 60°. Найдите площадь круга.

1) 7π; 2) 49π; 3) 14π; 4) 21π.

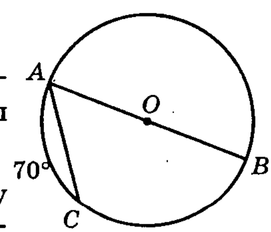
6. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка AD.



7. Площадь ΔDEF равна 70. Найдите сторону FE, если $DE = 14$, $\angle DEF = 30°$.

8. Стороны параллелограмма равны 4 и 7,5, а косинус угла между ними равен 29/48. Найдите длину меньшей диагонали.

Часть 2



9. Используя данные, приведенные на рисунке, определите угол между хордой AC и диаметром AB.

10. Найдите расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $10\sqrt{3}$.

11. В ΔABC с прямым углом B и катетами $BC = 5$ и $AB = 12$ проведена биссектриса AD. Найдите площадь ΔACD.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Если треугольник равнобедренный, то наименьшей из сторон является его основание.
2) Если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным.
3) Если биссектриса треугольника делит противоположную сторону на равные отрезки, то этот треугольник равнобедренный.
4) Если треугольник равносторонний, то длина любой его высоты равна длине любой его биссектрисы.
5) Если треугольник равнобедренный, то высота, опущенная на боковую сторону, равна высоте, опущенной на основание.

13. На серединах сторон AB, BC, CD и AD трапеции $ABCD$, где AD и BC основания ($BC < AD$), отмечены соответственно точки M, N, K и P. Доказать, что четырехугольник $MNKP$ — ромб, а $\angle AMP = \angle DKP$.

Часть 3

14. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 3,5, а периметр треугольника — 36. Найдите радиус описанной окружности.

15. Длина медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, равна $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$. Периметр треугольника равен $\frac{24}{\sqrt{\pi}}$. Найдите площадь вписанного в треугольник круга.

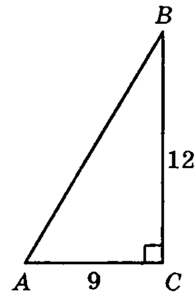
Вариант 17

Часть 1

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагональ $AC \perp CD$. Найдите величину угла D, если $\angle ACB = 64°$.

1) $32°$; 2) $16°$; 3) $26°$; 4) $30°$.

2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\sin \angle A$.



1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$;

3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{3}{4}$.

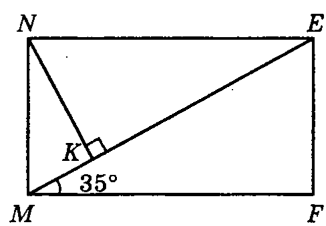
3. Найдите длину окружности, описанной около квадрата со стороной $6\sqrt{2}$.

1) 12π; 2) 6π; 3) 18π; 4) 9π.

4. Найдите длину вектора $2\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}\{-2; -3\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$.

1) 8; 2) 9; 3) 6; 4) 5.

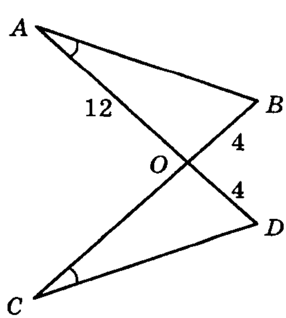
5. Четырехугольник $MNEF$ — прямоугольник. Используя данные, приведенные на рисунке, укажите градусную меру $\angle MNK$.



1) $40°$; 2) $35°$;

3) $45°$; 4) $30°$.

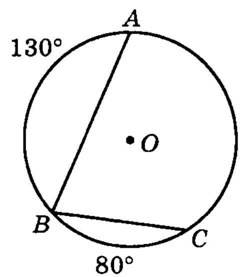
6. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка BC.



7. Площадь ΔABC равна 270, $AB = 27$, $BC = 29$. Найдите длину медианы BD.

8. В равнобедренной трапеции нижнее основание равно 11, верхнее равно 5, а боковая сторона составляет с основанием угол 45°. Найдите площадь трапеции.

Часть 2



9. Хорды AB и BC стягивают дуги, градусные меры которых указаны на рисунке. Найдите величину $\angle ABC$.

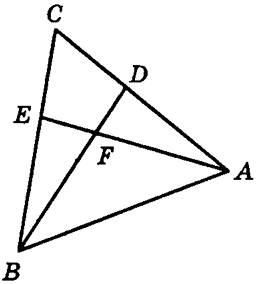
10. В некотором многоугольнике можно провести 20 диагоналей. Найдите число сторон этого многоугольника.

11. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках M и N соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BM = 6$, $CN = 8$ и $AB : AD = 1 : 3$.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Если треугольник равносторонний, то сумма длин его высот равна сумме длин его медиан.
2) Если периметр треугольника в 3 раза больше одной из его сторон, то он является равносторонним.
3) Если одна высота треугольника делит противоположную сторону пополам, то этот треугольник равнобедренный.
4) Если треугольник равносторонний, то сумма длин его высот равна сумме длин его медиан.
5) Если треугольник равнобедренный, то высота, проведенная к основанию, делит его на два равных треугольника.

13. В ΔABC $AE \perp BC$ и $BD \perp AC$. Докажите, что $\Delta ADF \sim \Delta BFE$.



Часть 3

14. В ΔABC $\angle ABC = 45°$. Вычислите длину стороны AC, если радиус окружности, описанной около треугольника, равен $2\sqrt{2}$.

15. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке E, а медианы — в точке F. Точка T — середина отрезка FE. Найдите площадь ΔATC, если известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $CE = 3\sqrt{2}$, $\angle BAC = 45°$.

Вариант 18

Часть 1

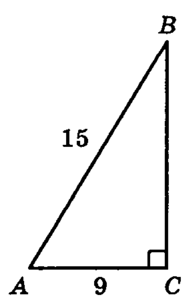
1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) $AB \perp BD$, $\angle A = 70°$. Найдите $\angle C$.

1) 130°; 2) 80°; 3) 120°; 4) 110°.

2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{5}{3}$;

3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{3}{5}$.



3. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 5 и 12.

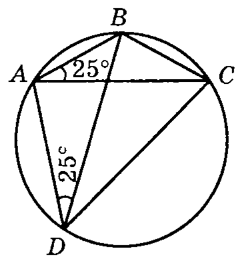
1) 5π; 2) 13π; 3) 12π; 4) 15π.

4. Найдите длину вектора $3\vec{a} + 4\vec{b}$, если $\vec{a}\{-2; -4\}$, $\vec{b}\{-1; 3\}$.

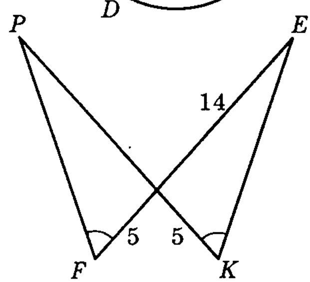
1) 8; 2) 6; 3) 10; 4) 5.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Используя данные, приведенные на рисунке, укажите меру $\angle ABC$.

1) 120°; 2) 140°;
3) 110°; 4) 130°.



6. Отрезки PK и EF пересекаются в точке O. Используя данные, указанные на рисунке, найдите длину отрезка KP.

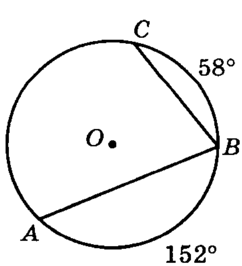


7. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6, другой катет равен 8. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

8. В равнобедренной трапеции основания равны 6 и 10. Диагональ трапеции равна 10. Найдите площадь трапеции.

Часть 2

9. Хорды AB и BC стягивают дуги, градусные меры которых указаны на рисунке. Найдите величину $\angle ABC$.



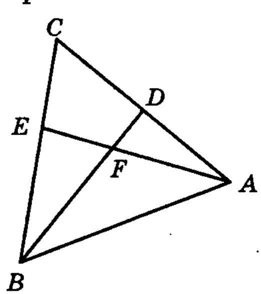
10. В некотором многоугольнике можно провести 14 диагоналей. Найдите число сторон этого многоугольника.

11. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках M и N соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что $BM = 5$, $CN = 12$ и $AB : AD = 2 : 3$.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Если сумма двух углов равна 180°, то эти углы смежные.
2) Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник является прямоугольным.
3) Треугольник равносторонний, если он равнобедренный и один из углов равен 60°.
4) Высота треугольника обладает свойством: все ее точки равноудалены от сторон угла, из которого она проведена.
5) Если в прямоугольном треугольнике острый угол равен 30°, то другой угол будет равен 60°.

13. В ΔABC известно, что $AE \perp BC$ и $BD \perp AC$. Докажите, что $\Delta AEC \sim \Delta BDC$.



Часть 3

14. Расстояние от боковой стороны равнобедренного треугольника, равной 16, до центра описанной около него окружности равно 6. Найдите радиус этой окружности.

15. В ΔABC проведены высоты AE и BF и отмечена точка P — середина стороны AB. Найдите AB, если известно, что $\angle ACB = 105°$, а площадь $\Delta FEP = 9$.

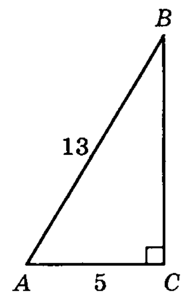
Вариант 19

Часть 1

1. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите $\angle ABC$, если $\angle CAD = 25°$.

1) 130°; 2) 40°; 3) 120°; 4) 50°.

2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\operatorname{tg} \angle A$.



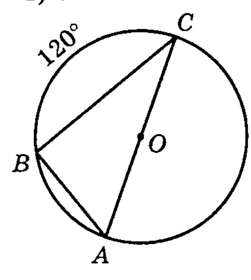
1) $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{5}{13}$;

3) $\frac{12}{5}$; 4) $\frac{13}{5}$.

3. Найдите длину вектора $\vec{m} + \vec{n}$, если $\vec{m}\{2; -3\}$, $\vec{n}\{1; 7\}$.

1) 5; 2) 4; 3) 7; 4) 3.

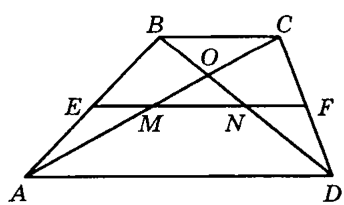
4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите величину $\angle ACB$.



1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$;

3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

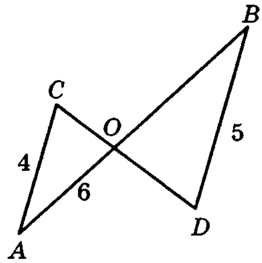
5. $ABCD$ — трапеция, $AD = 23$, $BC = 18$, EF — средняя линия. Найдите MN.



1) 2,5; 2) 5;

3) 7,5; 4) 8.

6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите AB, если известно, что $AC \parallel BD$.

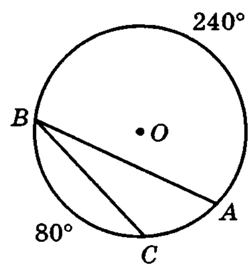


7. В прямоугольном треугольнике медиана, опущенная из вершины прямого угла, равна одному из катетов. Найдите меньший угол треугольника.

8. Площадь параллелограмма равна 120, а его стороны 15 и 10. Найдите большую высоту параллелограмма.

Часть 2

9. Хорды AB и BC стягивают дуги, градусные меры которых указаны на рисунке. Найдите величину $\angle ABC$.



10. В выпуклом четырехугольнике два угла — прямые, разность двух других равна 10°. Найдите величину меньшего угла.

11. В прямоугольнике $ABCD$ точка N делит сторону CD в отношении 1 : 3 ($ND = 3CN$). Прямая AN пересекает диагональ BD в точке E. Найдите площадь ΔEND, если площадь прямоугольника равна 56.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Две высоты равнобедренного треугольника равны.
2) Две медианы равнобедренного треугольника равны.
3) Если углы равны, то они вертикальные.
4) Любая точка биссектрисы угла треугольника равноудалена от его сторон.
5) Если треугольник прямоугольный, то медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

6. Зак. 450

13. Середина F стороны DC квадрата $ABCD$ соединена с вершиной B. Из вершины A проведен перпендикуляр к отрезку BF, пересекающий этот отрезок в точке K. Докажите равенство отрезков AD и DK.

Часть 3

14. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, а длины катетов равны 3 и $2\sqrt{10}$.

15. В ΔABC проведены высоты AM и BN и отмечена точка K — середина стороны AB. Найдите AB, если известно, что $\angle ACB = 120°$, а площадь ΔMNK равна $4\sqrt{3}$.

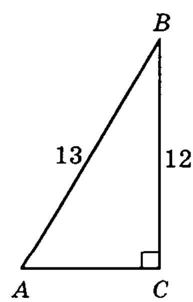
Вариант 20

Часть 1

1. Диагональ ромба равна его стороне. Найдите меньший угол ромба.

1) 40°; 2) 60°; 3) 80°; 4) 75°.

2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\operatorname{tg} \angle A$.



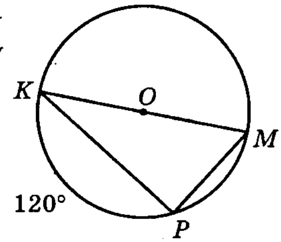
1) $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{13}{12}$;

3) $\frac{12}{13}$; 4) $\frac{12}{5}$.

3. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}\{9; 8\}$, $\vec{b}\{-6; 0\}$.

1) 13; 2) $\sqrt{73}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) 17.

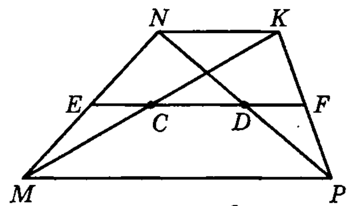
4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите величину $\angle KMP$.



1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{6}$;

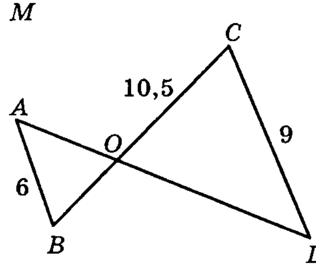
3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{4}$.

5. $MNKP$ — трапеция, EF — средняя линия, $MP = 26$, $NK = 19$. Найдите CD.



1) 3,5; 2) 9;
3) 7; 4) 3.

6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите BC, если известно, что $AB \parallel CD$.

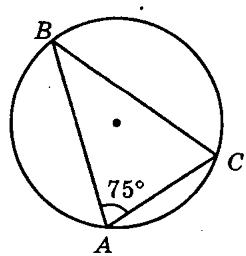


7. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 3, а котангенс прилежащего угла равен 0,75. Найдите гипотенузу.

8. Разность двух оснований равнобедренной трапеции равна 3. Синус угла при основании трапеции равен 0,8. Найти длину боковой стороны трапеции.

Часть 2

9. Известно, что $\smile AB = 2\smile AC$. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите величину $\smile AB$.



10. Внутренние углы выпуклого четырехугольника относятся как 2 : 2,5 : 9,5 : 10. Найдите величину меньшего угла.

11. Биссектриса BD равнобедренного ΔABC ($AC = BC$) делит сторону AC в отношении 3 : 5, считая от вершины A. Найдите периметр ΔABC, если известно, что $AC - AB = 4{,}8$.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Если диагонали четырехугольника равны, то он прямоугольник.
2) Если противоположные стороны четырехугольника равны, то он параллелограмм.
3) В прямоугольнике диагонали являются биссектрисами его углов.
4) Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то он ромб.
5) Если в четырехугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то он параллелограмм.

13. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\angle MAD = \angle MDA = 15°$. Докажите, что ΔBCM — равносторонний.

Часть 3

14. В ΔABC $AC = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$, $\angle ABC = 60°$, а периметр треугольника равен $\dfrac{15}{\sqrt{\pi}}$. Найдите площадь вписанного в треугольник круга.

15. В ΔABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 14$ и $AC = 15$ найдите расстояние от точки пересечения высот до вершины A.

§ 6. Ответы к тестам

Вариант	Часть 1								Часть 2				Часть 3	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	2	1	4	3	24	13	8	25	8	1,6	1; 3; 5	3	4
2	2	1	1	2	1	144	12	2,5	18	9	0,26	1; 3; 4	2	36
3	3	4	2	4	3	48	30	48	8	8	5	1; 2; 4	12	54
4	1	2	4	2	1	6	50	12	24,5	10	12	3; 4; 5	10	2,25
5	2	4	1	4	2	27	40	19	120	9	6	1; 4; 5	8	11
6	4	2	3	3	2	8	110	0,6	115	12	7	2; 3	80	16
7	4	1	4	4	2	12	12	13,5	54	162	6,48	1; 3; 5	10	10
8	2	4	1	3	1	10	16	8	24	144	4,5	3; 5	1	9
9	2	2	1	4	3	8	34	16	−32	18	14	1; 4; 5	1,8	288
10	4	1	4	2	3	6	42	12	−10	20	14	1; 3; 4	0,25	235,2
11	4	2	1	2	2	138	12	12	50	30	80	1; 2; 5	30	5
12	1	2	1	3	3	10	6	120	0	4	108	2; 3; 4	15	4
13	1	4	2	4	1	56	14	8	65	6	72	2; 4; 5	2	4,5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
14	4	3	4	1	2	12	24	24	35	4	44	2; 4; 5	2	0,625
15	3	1	2	2	4	10	20	0,9	30	11	20,8	1; 3; 5	2	9
16	4	3	4	1	2	11	20	6	55	30	15,6	3; 4	7,25	4
17	3	2	1	1	2	16	26	24	75	8	72	3; 4; 5	4	11,25
18	4	1	2	3	4	19	5	48	75	7	45	2; 3; 5	10	12
19	1	3	1	4	1	13,5	30	12	20	85	9	4; 5	2,1	8
20	2	4	4	3	1	17,5	5	2,5	140	30	31,2	2; 5	0,75	8,25

Глава 4

РЕШЕНИЯ ВАРИАНТОВ 1, 10, 20

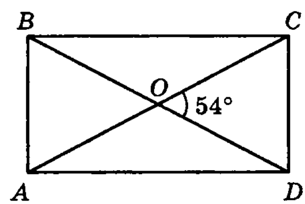
§ 7. Решение заданий варианта 1

Часть 1

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите $\angle DCO$, если $\angle COD = 54°$.

1) 46°; 2) 23°; 3) 66°; 4) 63°.

Решение.



Диагонали прямоугольника равны (по свойству). Так как прямоугольник является параллелограммом, то диагонали AC и BD в точке пересечения O делятся пополам, т. е. $OC = OD$. Значит, ΔCOD — равнобедренный. По условию $\angle COD = 54°$, тогда $\angle DCO = (180° - 54°) : 2 = 63°$.

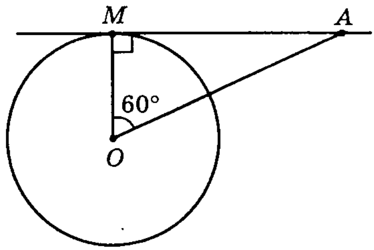
Верный ответ: 4.

2. К окружности с центром O из точки A проведена касательная AM. Найдите радиус окружности, если $\angle AOM = 60°$ и $OA = 18$.

1) 12; 2) 9; 3) 8; 4) 6.

Решение.

Известно, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания (по свойству касательной). Значит, ΔAMO — прямоугольный, где $\angle AMO = 90°$, $\angle AOM = 60°$ (по условию), тогда $\angle OAM = 90° - 60° = 30°$, следовательно, $OM = \frac{1}{2}AO = 9$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).



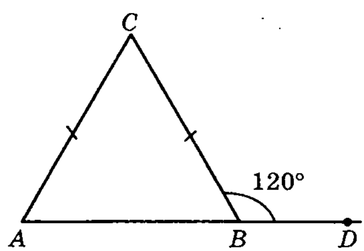
Верный ответ: 2.

3. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 120°. Чему равен угол между боковыми сторонами этого треугольника?

1) 60°; 2) 100°; 3) 80°; 4) 90°.

Решение.

Так как $\angle CBD = 120°$, то $\angle ABC = 180°-120° = 60°$. По условию ΔABC — равнобедренный, тогда углы при основании равны (по свойству), значит, $\angle A = \angle ABC = 60°$, тогда $\angle C = 180° - (60° + 60°) = 60°$.

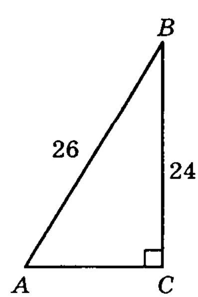


Верный ответ: 1.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\cos \angle A$.

1) $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{5}{12}$;

3) $\frac{12}{5}$; 4) $\frac{5}{13}$.



Решение.

По определению косинуса острого угла прямоугольного треугольника, имеем: $\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$, где $AB = 26$. Катет AC найдем по теореме Пифагора: $AC^2 = AB^2 - BC^2$, $AC = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10$. Тогда $\cos \angle A = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$.

Верный ответ: 4.

5. Длина окружности равна 30π. Найдите радиус этой окружности.

1) 6; 2) 6,5; 3) 15; 4) 8.

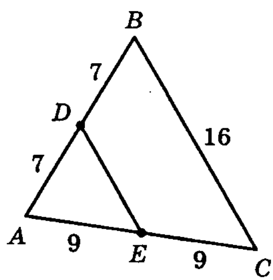
Решение.

Длина окружности определяется по формуле $C = 2\pi R$, где $C = 30\pi$ (по условию). Тогда $2\pi R = 30\pi$, откуда $R = 30\pi : 2\pi = 15$.

Верный ответ: 3.

6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр треугольника ADE.

Решение.

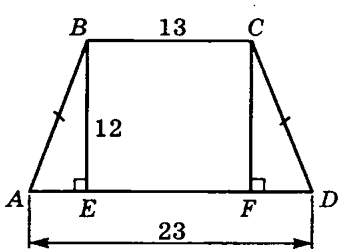


Так как $AD = DB$ и $AE = EC$, то DE — средняя линия ΔABC, тогда $DE = \frac{1}{2}BC = 8$ (по свойству средней линии треугольника). Тогда периметр $P = AD + DE + AE = 7 + 8 + 9 = 24$.

Ответ: 24.

7. Найдите боковую сторону равнобедренной трапеции, если ее основания равны 13 и 23, а высота равна 12.

Решение.



В трапеции $ABCD$ $AD = 23$; $BC = 13$, высоты BE и CF равны по 12. По свойству равнобедренной трапеции $\angle BAE = \angle CDF$, тогда $\Delta ABE = \Delta DCF$ (по гипотенузе и острому углу). Значит,

$AE = FD = \dfrac{1}{2}(AD - BC) = 5$. Из ΔABE по теореме Пифагора имеем: $AB^2 = AE^2 + BE^2$, $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Ответ: 13.

8. В равнобедренном треугольнике основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Найдите длину основания, если периметр треугольника равен 20.

Решение.

Пусть x — длина основания, y — длина боковой стороны, тогда $x : y = 4 : 3$, откуда $y = \dfrac{3}{4}x$.

Так как периметр равнобедренного треугольника равен 20, то получим $x + 2y = 20$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{3}{4}x, \\ x + 2y = 20. \end{cases}$ Решая способом подстановки, получим: $x + 2 \cdot \dfrac{3}{4}x = 20$,

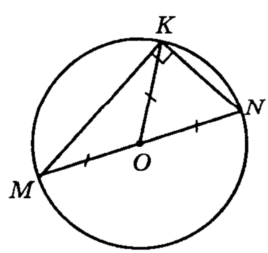
$x + \dfrac{3}{2}x = 20$, $\dfrac{5}{2}x = 20$, откуда $x = 20 \cdot \dfrac{2}{5} = 8$.

Итак, основание треугольника равно 8.

Ответ: 8.

Часть 2

9. MN — диаметр окружности с центром O. K — точка этой окружности. Найдите периметр ΔMOK, если известно, что $MK = 12$, $KN = 5$.



Решение.

Так как MN — диаметр окружности и $\angle MKN$ — вписанный, то

$\angle MKN = 90°$. Тогда $MO = ON = OK$ — как радиусы окружности. Периметр ΔMOK равен: $P = MO + OK + MK$. Из ΔMKN, где $MK = 12$ и $KN = 5$, по теореме Пифагора $MN^2 = MK^2 + KN^2$, откуда $MN = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$, тогда $MO = OK = 13 : 2 = 6{,}5$ и $P = 6{,}5 + 6{,}5 + 12 = 25$.

Ответ: 25.

10. Внешний угол правильного n-угольника равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите число сторон многоугольника.

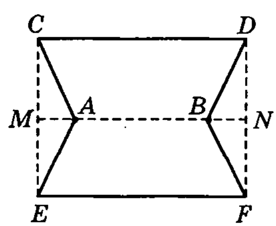
Решение.

Сумма внешних углов правильного n-угольника равна 2π, тогда число сторон многоугольника будет равно $2\pi : \frac{\pi}{4} = 8$.

Ответ: 8.

11. Имеется лист фанеры прямоугольной формы, длина и ширина которого соответственно равны 8 дм и 5 дм. Из него, как показано на рисунке, вырезаны две одинаковые части в форме равнобедренных треугольников. Сколько кг краски потребуется, чтобы покрасить получившуюся фигуру, если $AB = 4$, а на 1 дм^2 поверхности расходуется 0,02 кг краски?

Решение.



Из условия следует, что ΔACE и ΔBDF — равнобедренные, а вершины A и B лежат на прямой $MN \perp CE$, тогда $MN \parallel CD \parallel EF$, т. е. $ACDB$ и $ABFE$ — равные равнобедренные трапеции.

Следовательно, площадь фигуры будет равна:

$$S = 2 \cdot \frac{AB + CD}{2} \cdot \frac{CE}{2} = 2 \cdot \frac{4+8}{2} \cdot \frac{5}{2} = 30 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Расход краски будет равен $30 \cdot 0{,}02 = 0{,}6$ (кг).

Ответ: 0,6.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Точка пересечения медиан всегда расположена внутри треугольника.
2) Медианы треугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.
3) Медиана делит треугольник на два треугольника равной площади.
4) Медиана всегда делит пополам один из углов треугольника.
5) Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

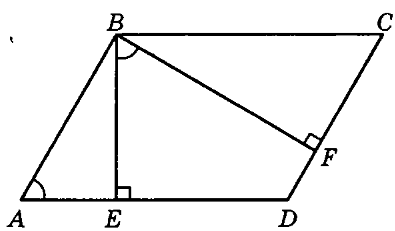
Решение.

Из перечисленных утверждений верны 1), 3) и 5).

Ответ: 1; 3; 5.

13. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BE и BF, причем точка E лежит на стороне AD, а точка F лежит на стороне CD. Докажите, что $\Delta ABE \sim \Delta CBF$, а $\angle EBF = \angle A$.

Решение.

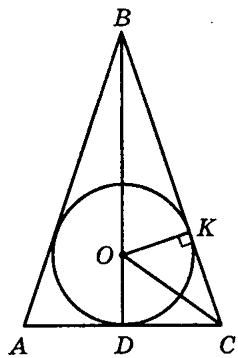


Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A = \angle C$ (по свойству). Тогда $\Delta ABE \sim \Delta BFC$, как прямоугольные, имеющие по равному острому углу. Пусть в ΔABE $\angle A = \alpha$, тогда $\angle ABE = 90° - \alpha$. Так как $BF \perp CD$ и $AB \parallel CD$, то $AB \perp BF$, тогда $\angle EBF = 90° - \angle ABE = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Итак, $\angle EBF = \angle A$.

Часть 3

14. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный ΔABC, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см.

Решение.



Высоту BD найдем из ΔABD по теореме Пифагора, где $AB = 10$ см, $AD = \frac{1}{2}AC = 6$ см: $BD^2 = AB^2 - AD^2$, или $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (см).

Тогда радиус r вписанной окружности можно найти различными способами:

1) Из подобия ΔBOK и ΔBDC: $\frac{OK}{BO} = \frac{DC}{BC}$ или $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$,

$10r = 48 - 6r$, $16r = 48$, откуда $r = 3$.

2) По свойству биссектрисы OC ΔBCD: $\frac{OD}{BO} = \frac{DC}{BC}$,

или $\frac{r}{8-r} = \frac{6}{10}$ и т. д.

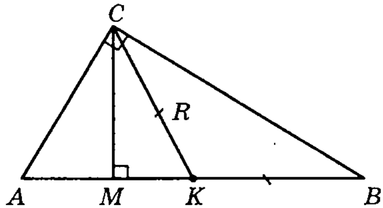
3) По формуле $S = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ — полупериметр. Имеем: $r = \frac{S}{p} = \frac{6 \cdot 8}{6+10} = 3$ (см).

Ответ: 3.

15. В прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7. Найдите отношение R/r, если площадь ΔABC равна 144.

Решение.

Так как ΔABC прямоугольный, то $AB = 2R$ — диаметр описанной окружности, где $CK = AK = KB = R$. Пусть $AC = x$, $BC = y$, где $x, y > 0$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}xy =$



$= pr = 144$, откуда $xy = 288$; $p = \frac{1}{2}(x + y + 2R)$, или $\frac{1}{2}(x + y + 2R)r = 144$, откуда $r = \frac{288}{x+y+2R}$, тогда $\frac{R}{r} = \frac{2R}{x+y-2R}$, где $r = \frac{1}{2}(x + y - 2R)$.

По условию задачи $CK - CM = 7$, или $R - CM = 7$.

Но $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot CM$, или $xy = 2R \cdot CM$, откуда $CM = \frac{xy}{2R} = \frac{144}{R}$.

Следовательно, имеем уравнение: $R - \frac{144}{R} = 7$, или $R^2 - 7R - 144 = 0$, откуда $R_1 = 16$, $R_2 = -9$ (не подходит, так как $R > 0$). Итак, $R = 16$. Кроме того, из ΔACB имеем: $x^2 + y^2 = 4R^2$, $x^2 + y^2 = 1024$. Так как $xy = 288$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ xy = 288, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ 2xy = 576. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем:
$(x + y)^2 = 1600$, откуда $x + y = 40$ $(x + y > 0)$.
Следовательно, $\frac{R}{r} = \frac{2R}{x+y-2R} = \frac{32}{40-32} = \frac{32}{8} = 4$.

Ответ: 4.

§ 8. Решение заданий варианта 10

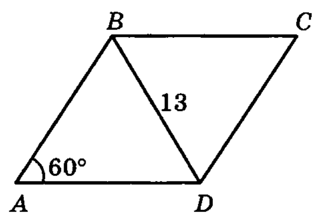
Часть 1

1. Диагональ ромба, лежащая против угла 60°, равна 13. Найдите сторону ромба.

1) 8; 2) 26; 3) 6,5; 4) 13.

Решение.

Так как $ABCD$ — ромб, то $AB = AD$, тогда ΔABD — равнобедренный. По условию $\angle A = 60°$, тогда $\angle ABD = \angle ADB = (180° - 60°) : 2 = 60°$. Значит, ΔABD — равносторонний, тогда $AB = AD = BC = CD = 13$.



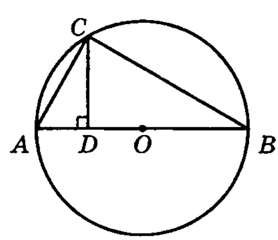
Верный ответ: 4.

2. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки окружности на диаметр, если его основание делит диаметр на отрезки длиной 3 и 12.

1) 6; 2) 15; 3) 4; 4) 5.

Решение.

Так как AB — диаметр окружности, то $\angle ACB = 90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой). По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем:



$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$, где $AD = 3$;

$DB = 12$.

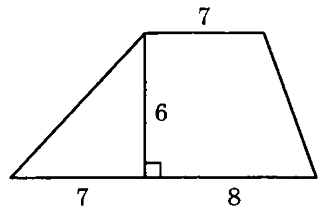
Следовательно, $CD = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$.

Верный ответ: 1.

3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите площадь трапеции.

1) 132; 2) 33; 3) 90; 4) 66.

Решение.



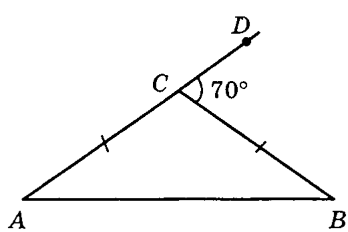
Площадь трапеции определяется по формуле $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$, где a, b — основания трапеции, h — высота, тогда $S=\frac{(7+8)+7}{2}\cdot 6=$ $=22\cdot 3=66$.

Верный ответ: 4.

4. В равнобедренном треугольнике угол, смежный с углом при вершине треугольника, равен 70°. Найдите угол при основании треугольника.

1) 70°; 2) 35°; 3) 105°; 4) 85°.

Решение.



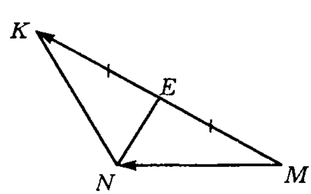
По условию задачи ΔABC — равнобедренный, тогда $\angle A=\angle B$ (по свойству). $\angle DCB$ — внешний угол ΔABC, тогда имеем: $\angle A+\angle B=\angle DCB$, или $\angle A=$ $=\angle B=70° : 2=35°$.

Верный ответ: 2.

5. NE — медиана ΔMNK. Найдите $\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{MN}$.

1) $\overrightarrow{NK}$; 2) $\overrightarrow{KN}$; 3) $\overrightarrow{NE}$; 4) $\overrightarrow{EN}$.

Решение.

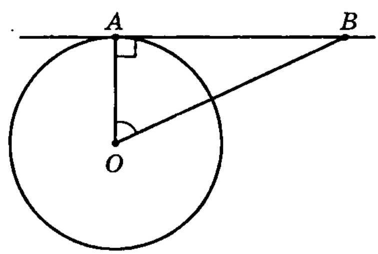


В ΔMNK NE — медиана, тогда $ME=EK$ и $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{EK}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{ME}$, тогда $\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NE}$.

Верный ответ: 3.

6. Из точки B к окружности с центром O проведена касательная, A — точка касания. Найдите радиус окружности, если $BO = 12$, $AB = 6\sqrt{3}$.

Решение.



Так как касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, то ΔAOB — прямоугольный, где $AB = 6\sqrt{3}$ и $BO = 12$, тогда по теореме Пифагора получим:

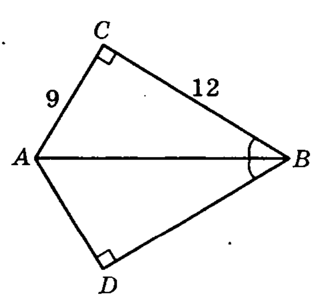
$AO^2 = OB^2 - AB^2$, или

$AO = \sqrt{144-108} = \sqrt{36} = 6$.

Ответ: 6.

7. Используя данные, указанные на рисунке, найдите периметр четырехугольника $ACBD$.

Решение.

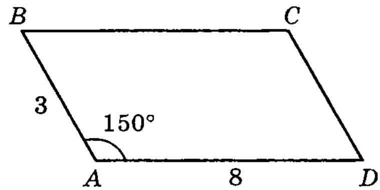


По условию $\angle C = \angle D = 90°$, $\angle ABC = \angle ABD$, AB — общая сторона (гипотенуза), тогда $\Delta ACB = \Delta ADB$ (по гипотенузе и острому углу). Из равенства треугольников следует, что $AC = AD = 9$ и $BC = BD = 12$, тогда $P_{ACBD} = 2 \cdot (9 + 12) = 42$.

Ответ: 42.

8. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, у которого $\angle A = 150°$, $AB = 3$; $AD = 8$.

Решение.



Известно, что если a и b смежные стороны, α — угол между ними, то площадь параллелограмма определяется по формуле: $S = ab \sin \alpha$.

Тогда $S = 3 \cdot 8 \cdot \sin 150° = 24 \cdot \sin (180° - 30°) =$

$= 24 \cdot \sin 30° = 24 \cdot \dfrac{1}{2} = 12.$

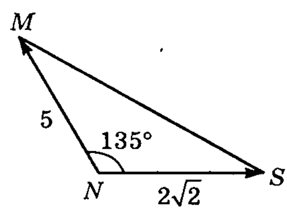
Итак, $S = 12$.

Ответ: 12.

Часть 2

9. В ΔMNS $MN = 5$ см, $NS = 2\sqrt{2}$ см, $\angle N = 135°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{NS}$.

Решение.



$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NS} = \left|\overrightarrow{NM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{NS}\right| \cos 135° =$

$= 5 \cdot 2\sqrt{2} \cos (180° - 45°) =$

$= 10\sqrt{2}\,(-\cos 45°) =$

$= -10\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -10.$

Ответ: –10.

10. Внешний угол правильного многоугольника на 144° меньше внутреннего угла. Найдите число сторон данного многоугольника.

Решение.

Пусть α_n и β_n соответственно внутренний и внешний углы правильного многоугольника, тогда $\alpha_n - \beta_n = 144°$. С другой стороны, эти углы смежные, тогда $\alpha_n + \beta_n = 180°$. Складывая полученные равенства, имеем: $2\alpha_n = 324$, откуда $\alpha_n = 162°$ — внутренний угол правильного многоугольника.

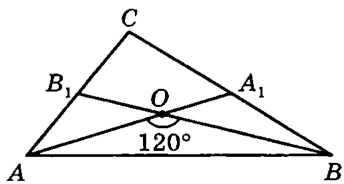
Но $\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$, где n — число сторон.

Тогда получим $\frac{n-2}{n} \cdot 180° = 162°$, или $\frac{n-2}{n} \cdot 10 = 9$, или $(n-2) \cdot 10 = 9n$, откуда $10n - 9n = 20$, т. е. $n = 20$.

Ответ: 20.

11. В ΔABC AA_1 и BB_1 — медианы, M — точка их пересечения, $AA_1 = 9$; $BB_1 = 15$, $\angle AMB = 120°$. Найдите AB.

Решение.



Известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины.

Тогда $AM = \frac{2}{3}AA_1 = 6$; $BM = \frac{2}{3}BB_1 = 10$.

Из ΔAMB по теореме косинусов имеем:
$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos 120°$.

Но $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$,

$AM = 6$; $BM = 10$, тогда $AB^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$,

или $AB^2 = 136 + 60 = 196$, откуда $AB = 14$.

Ответ: 14.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

1) Медианы делят треугольник на 6 треугольников равной площади.
2) Медиана всегда перпендикулярна к одной из сторон треугольника.

3) Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2 : 1, считая от соответствующей вершины.
4) Медиана делит пополам сторону треугольника, к которой она проведена.
5) Точка пересечения медиан произвольного треугольника — центр окружности, вписанной в этот треугольник.

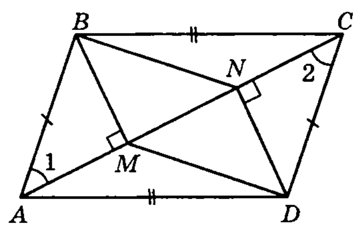
Решение.

Из перечисленных утверждений верными являются 1), 3) и 4).

Ответ: 1; 3; 4.

13. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляры, проведенные через вершины тупых углов к диагонали AC, пересекают ее в точках M и N. Докажите, что $BN = DM$, а $\Delta ABM = \Delta CDN$.

Решение.



Так как по условию $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$ (по свойству). Кроме того, $\angle 1 = \angle 2$ — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC.

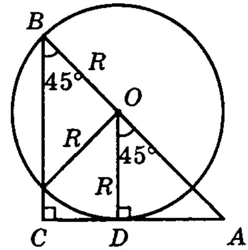
По условию $BM \perp AC$ и $DN \perp AC$, тогда $BM \parallel DN$. Значит, $\Delta ABM = \Delta CDN$ (по гипотенузе и острому углу). Из равенства треугольников следует, что $BM = DN$.

Выходит, что четырехугольник $BMDN$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма), тогда $BN = DM$, что и требовалось доказать.

Часть 3

14. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе, длина которой равна $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

Решение.



Пусть гипотенуза $AB = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

По условию ΔABC равнобедренный и прямоугольный, тогда $\angle ABC = \angle A = 45°$, $OD \perp AC$, тогда $\angle AON = 45°$.

Так как $OD = AD = R$, то $AO^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, $AO = R\sqrt{2}$.

Имеем $AB = BO + OA = R + R\sqrt{2} = R\left(1+\sqrt{2}\right)$.

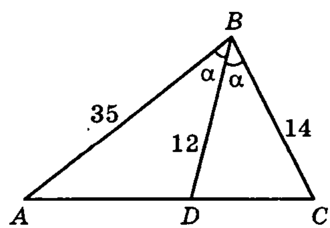
Учитывая, что $AB = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$, получим

$R\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$, откуда $R = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

15. Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.

Решение.



Пусть в ΔABC $AB = 35$, $BC = 14$, биссектриса $BD = 12$.

Пусть $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$, тогда $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC}$.

Но $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 2\alpha$,

$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin \alpha$,

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot BC \sin \alpha$, тогда получим:

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC \sin 2\alpha = \frac{1}{2}AB \cdot BD \sin \alpha + \frac{1}{2}BD \cdot BC \sin \alpha.$$

Но $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, значит, $2 \cdot 35 \cdot 14 \cos \alpha =$ $= 35 \cdot 12 + 12 \cdot 14$, откуда $\cos \alpha = \dfrac{12\cdot(35+14)}{2\cdot 35\cdot 14} = \dfrac{3}{5}$,

тогда $\sin \alpha = \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$,

где $\sin \alpha > 0$, так как $0 < \alpha < 90°$.

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}(AB + BC)BD \sin \alpha =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 49 \cdot 12 \cdot \dfrac{4}{5} = 235{,}2.$

Ответ: 235,2.

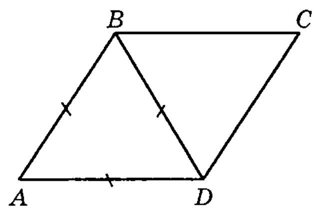
§ 9. Решение заданий варианта 20

Часть 1

1. Диагональ ромба равна его стороне. Найдите меньший угол ромба.

1) 40°; 2) 60°; 3) 80°; 4) 75°.

Решение.



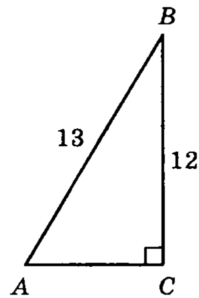
У ромба все стороны равны (по определению). $AB = BD = AD$ (по условию). Значит, ΔABD — равносторонний, тогда $\angle A = \angle C = 60°$ — меньший угол ромба.

Верный ответ: 2.

2. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

1) $\dfrac{5}{12}$; 2) $\dfrac{13}{12}$; 3) $\dfrac{12}{13}$; 4) $\dfrac{12}{5}$.

Решение.



По определению тангенса острого угла прямоугольного треугольника, имеем: $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{BC}{AC}$.

Катет AC найдем по теореме Пифагора:

$AC^2 = AB^2 - BC^2$,

$AC = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$.

Тогда $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{12}{5}$.

Верный ответ: 4.

3. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}\{9; 8\}$, $\vec{b}\{-6; 0\}$.

1) 13; 2) $\sqrt{73}$; 3) $\sqrt{67}$; 4) 17.

Решение.

Найдем координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$:

$\vec{a} - \vec{b} = \{9 - (-6); 8 - 0\} = \{15; 8\}$.

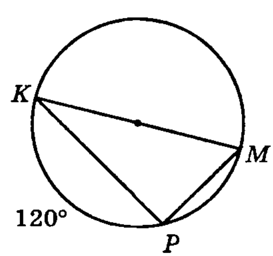
Тогда $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$.

Верный ответ: 4.

4. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите величину $\angle KMP$.

1) $\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\pi}{3}$; 4) $\dfrac{\pi}{4}$.

Решение.



Угол KMP — вписанный, опирающийся на дугу KP, тогда

$\angle KMP = \dfrac{1}{2} \cup KP = 60°$, или

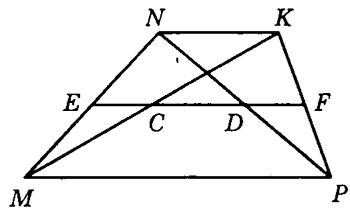
$\angle KMP = \dfrac{\pi}{3}$.

Верный ответ: 3.

5. $MNKP$ — трапеция, EF — средняя линия, $MP = 26$, $NK = 19$. Найдите CD.

1) 3,5;   2) 9;   3) 7;   4) 3.

Решение.



Так как EF — средняя линия трапеции $MNKP$, то $EF \parallel NK \parallel MP$.

В ΔMNP ED — средняя линия, тогда $ED = \dfrac{1}{2}MP = 13$.

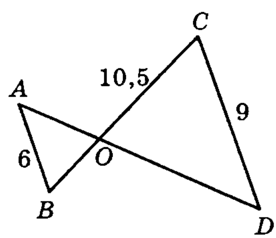
Аналогично, в ΔNMK EC — средняя линия, тогда $EC = \dfrac{1}{2}NK = 9{,}5$.

Значит, $CD = ED - EC = 13 - 9{,}5 = 3{,}5$.

Верный ответ: 1.

6. Используя данные, указанные на рисунке, найдите BC, если известно, что $AB \parallel CD$.

Решение.



По условию $AB \parallel CD$, тогда $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$, как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых и секущей.

Тогда $\Delta ABO \sim \Delta COD$ (по двум углам).

Из подобия следует $\dfrac{AB}{BO} = \dfrac{CD}{OC}$, или $\dfrac{6}{BO} = \dfrac{9}{10{,}5}$, откуда

$BO = \dfrac{6 \cdot 10{,}5}{9} = 7$, тогда $BC = BO + OC = 7 + 10{,}5 = 17{,}5$.

Ответ: 17,5.

7. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 3, а котангенс прилежащего угла равен 0,75. Найдите гипотенузу.

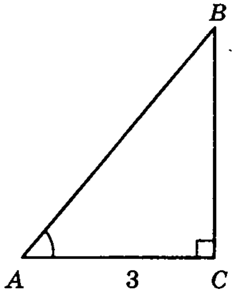
Решение.

По условию $AC = 3$, $\operatorname{ctg} \angle A = 0{,}75$.

Но $\operatorname{ctg} \angle A = \dfrac{AC}{BC}$ или $\dfrac{3}{BC} = \dfrac{3}{4}$,

откуда $BC = 4$, тогда, по теореме Пифагора, имеем: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, или $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5.



8. Разность двух оснований равнобедренной трапеции равна 3. Синус угла при основании трапеции равен 0,8. Найдите длину боковой стороны трапеции.

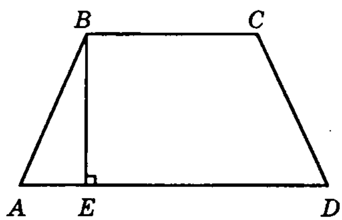
Решение.

Пусть $BC = 2x$, $AD = 2y$.

Так как трапеция равнобедренная, то

$$AE = \frac{1}{2}(AD - BC) =$$

$$= \frac{1}{2}(2y - 2x) = y - x.$$



По условию $\sin \angle A = 0{,}8$.

Кроме того, $AD - BC = 3$, или $2y - 2x = 3$, откуда $y - x = 1{,}5$, тогда $AE = y - x = 1{,}5$.

Так как $\sin \angle A = 0{,}8$, то $\cos \angle A = \sqrt{1 - 0{,}8^2} =$

$= \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ ($\angle A$ — острый, $\cos \angle A > 0$).

Но $\cos \angle A = \dfrac{AE}{AB}$, откуда $AB = \dfrac{AE}{\cos \angle A} = \dfrac{1{,}5}{0{,}6} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

Часть 2

9. Известно, что $\smile AB = 2 \smile AC$. Используя данные, приведенные на рисунке, найдите величину $\smile AB$.

Решение.

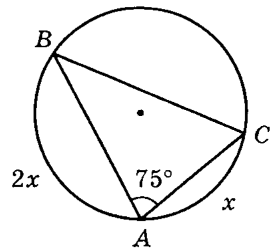
Пусть $\cup AC = x$, тогда $\cup AB = 2x$. Так как $\angle BAC = 75°$, то $\cup BC = 150°$.

Получим уравнение

$2x + x + 150 = 360$, $3x = 210$,

$x = 70$, тогда $2x = \cup AB = 140°$.

Ответ: 140.



10. Внутренние углы выпуклого четырехугольника относятся как 2 : 2,5 : 9,5 : 10. Найдите величину меньшего угла.

Решение.

Пусть k — коэффициент пропорциональности, тогда углы четырехугольника будут равны $2k$, $2{,}5k$, $9{,}5k$ и $10k$, а их сумма равна 360°.

Получим уравнение: $2k + 2{,}5k + 9{,}5k + 10k = 360$, $24k = 360$, $k = 360 : 24 = 15$, тогда $2k = 15 \cdot 2 = 30°$ — величина меньшего угла.

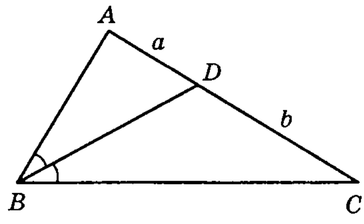
Ответ: 30.

11. Биссектриса BD равнобедренного ΔABC ($AC = BC$) делит сторону AC в отношении 3 : 5, считая от вершины A. Найдите периметр ΔABC, если известно, что $AC - AB = 4{,}8$.

Решение.

Пусть в ΔABC BD — биссектриса $\angle ABC$, $AD = a$, $DC = b$.

По условию $AC = BC = a + b$ и $AC - AB = 4{,}8$, кроме того, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5}$.



По свойству биссектрисы угла треугольника имеем: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{a+b}$ и $(a + b) - AB = 4{,}8$, откуда

$AB = (a + b) - 4{,}8$, тогда $\dfrac{a}{b} = \dfrac{AB}{a+b} = \dfrac{3}{5}$, $AB = \dfrac{3}{5}(a + b)$, значит, $\frac{3}{5}(a+b)=(a+b)-\frac{24}{5}$, $\frac{2}{5}(a+b)=\frac{24}{5}$, откуда $a+b=12$.

Значит, $P_{\Delta ABC}=AB+2AC=\frac{a}{b}(a+b)+2(a+b)=$

$=(a+b)\left(\frac{a}{b}+2\right)=12\cdot\left(\frac{3}{5}+2\right)=\frac{156}{5}=31{,}2.$

Ответ: 31,2.

12. Укажите, какие из перечисленных ниже утверждений верны.

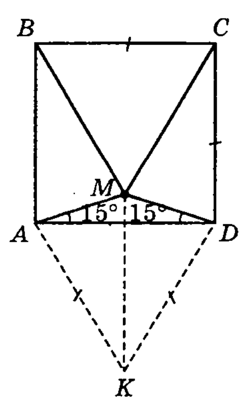
1) Если диагонали четырехугольника равны, то он прямоугольник.
2) Если противоположные стороны четырехугольника равны, то он параллелограмм.
3) В прямоугольнике диагонали являются биссектрисами его углов.
4) Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то он ромб.
5) Если в четырехугольнике противоположные стороны равны и параллельны, то он параллелограмм.

Решение.

Из перечисленных утверждений верны 2) и 5).

Ответ: 2; 5.

13. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\angle MAD=\angle MDA=15°$. Докажите, что ΔBCM — равносторонний.



Решение.

На стороне AD квадрата $ABCD$ вне его построим равносторонний ΔADK.

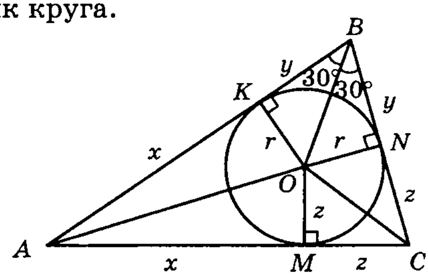
Так как по условию $\angle MAD=\angle MDA=15°$, то ΔMAD — равнобедренный, значит, $MA=MD$ и

$MB = MC$, т. е. ΔBMC — равнобедренный. Заметим, что $\Delta MDK = \Delta MCD$ (по I признаку равенства треугольников), так как MD — общая сторона, $DK = DC$ и $\angle KDM = \angle MDC = 60° + 15° = 75°$.

Выходит, что $MK = MC = KD = MB = BC$, т. е. ΔBCM — равносторонний.

Часть 3

14. В ΔABC $AC = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, $\angle ABC = 60°$, а периметр треугольника равен $\frac{15}{\sqrt{\pi}}$. Найдите площадь вписанного в треугольник круга.



Решение.

Пусть в ΔABC $AC = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, $P_{\Delta ABC} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$, или $AB + BC + AC = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$. Пусть $AK = AM = x$, $BK = BN = y$, $CM = CN = z$, где точки M, N и K — точки касания, тогда $2x + 2y + 2z = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$.

По условию $AC = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, или $x + z = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, тогда

$2y + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$, откуда $y = \frac{1,5}{\sqrt{\pi}}$.

В ΔOBN имеем $\angle OBN = 30°$, $\angle ONB = 90°$, значит,

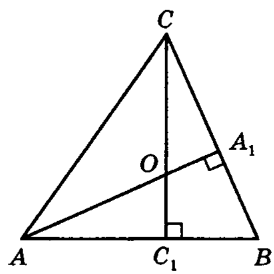
$$r = y \operatorname{tg} 30° = \frac{1{,}5}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3\pi}},$$ тогда

$$S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{9}{4\cdot 3\cdot \pi} = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

15. В ΔABC $AB = 13$, $BC = 14$ и $AC = 15$. Найдите расстояние от точки пересечения высот до вершины A.

Решение.



Пусть в ΔABC AA_1 и CC_1 — высоты, проведенные соответственно к сторонам BC и AB.

По условию $AB = c = 13$, $BC = a = 14$, $AC = b = 15$.

Тогда, по теореме косинусов, имеем:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B$,

откуда $\cos\angle B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{14^2+13^2-15^2}{2\cdot 14\cdot 13} = \dfrac{5}{13}$.

Следовательно, $\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\dfrac{25}{169}} = \dfrac{12}{13}$,

тогда $\operatorname{ctg}\angle B = \dfrac{\cos\angle B}{\sin\angle B} = \dfrac{5}{12}$.

Из ΔAA_1B имеем $AA_1 = c\cdot\sin\angle B = 12$, тогда

$A_1C = \sqrt{AC^2 - AA_1^2} = \sqrt{15^2-12^2} = \sqrt{81} = 9$.

Из ΔCA_1O, где $\angle A_1CO = 90° - \angle B$, находим

$A_1O = A_1C\operatorname{tg}(90° - \angle B) = 9\cdot\operatorname{ctg}\angle B = 9\cdot\dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{14}$.

Значит, искомое расстояние будет равно

$AO = AA_1 - A_1O = 12 - \dfrac{15}{4} = \dfrac{33}{4} = 8{,}25$.

Ответ: 8,25.

Глава 5

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРИИ X–XI КЛАССОВ

При решении задач стереометрии возрастают требования к качеству чертежа и его наглядности.

Освоение принципов и техники построения пространственного чертежа — необходимое условие для успешного решения задач.

Пространственные тела можно условно разделить на удобные для пространственного изображения и неудобные. К первой категории относятся многогранники: параллелепипед, треугольная призма, треугольная и четырехугольная пирамида. Все остальные будем считать неудобными для изображения.

В некоторых случаях при решении задач можно вообще обойтись одним плоским чертежом или несколькими (в случае необходимости) и не строить пространственное изображение.

Основным средством решения задач является аналитический метод.

§ 10. Многогранники

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

1) задачи на вычисление;

2) задачи на сечения.

К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных приз и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., далее угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади: боковой поверхности, полной поверхности, основания.

В основе второго типа задач — задач на построение лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскостью сечения и т. д.

Многогранником называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами многоугольника**.

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями многогранника**.

Многогранники бывают **выпуклые и невыпуклые**.

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым**.

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

10.1. Призма

Призмой (рис. 80) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (**основания призмы**) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все

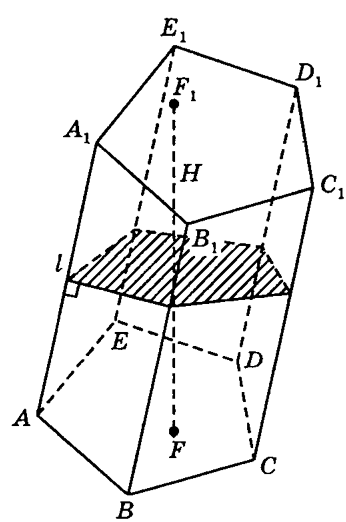


Рис. 80

остальные грани (AA_1B_1B; BB_1C_1C и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (AA_1, BB_1 и т. д.).

Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра AA_1, BB_1 и т. д. называются **боковыми**.

Перпендикуляр FF_1, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы.

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной, четырехугольной** и т. д.

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется **наклонной**.

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной**.

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники**.

Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 80).

Произвольная призма

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H; \quad V = S_{\text{сеч.}} \cdot l;$$
$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Прямая призма

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

10.2. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 81).

У параллелепипеда **6 граней** и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и **параллельны**.

Параллелепипед имеет **4 диагонали**, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Любая грань параллелепипеда может быть принята за **основание**.

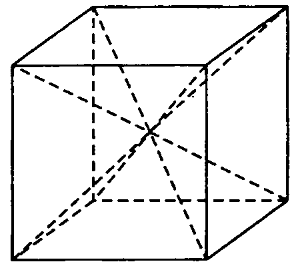


Рис. 81

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым**.

Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 82).

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты, называется **кубом**.

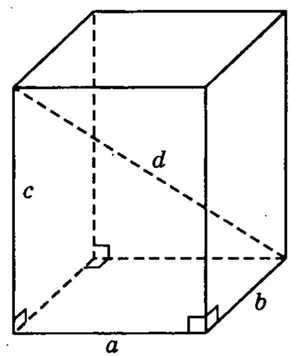


Рис. 82

Прямоугольный параллелепипед (рис. 82):

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 2(a+b)c;$
$V = abc;$
$S_{\text{полн.}} = 2(ab+bc+ac);$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$

Куб

Если a — ребро куба, то

$$V = a^3;\ d = a\sqrt{3};\quad S_{\text{полн.}} = 6a^2.$$

10.3. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — **основание пирамиды** — произвольный многоугольник $ABCDE$ (рис. 83), а остальные **боковые грани** — треугольники с общей вершиной M.

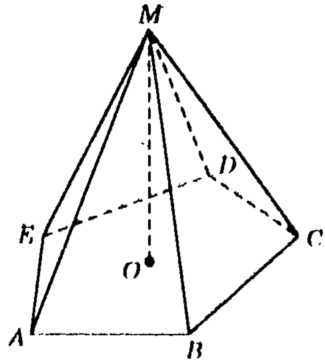


Рис. 83

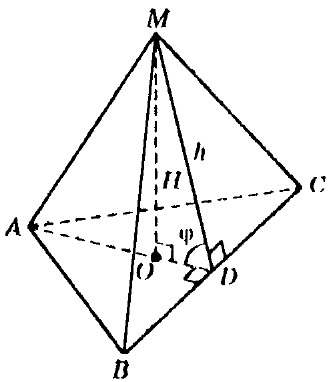


Рис. 84

Перпендикуляр MO, опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды**.

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д.

Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (четырехгранником).

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 84).

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани MD называется **апофемой** правильной пирамиды.

Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Правильная пирамида (рис. 79)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h; \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 85).

Параллельные грани усеченной пирамиды (ABC и $A_1B_1C_1$) называются ее **основаниями**; расстояние между ними (OO_1) — **высотой**.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Правильная усеченная пирамида (рис. 85)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\text{, где}$$

P_1, P_2 — периметры оснований.

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2$, где S_1, S_2 — площади оснований.

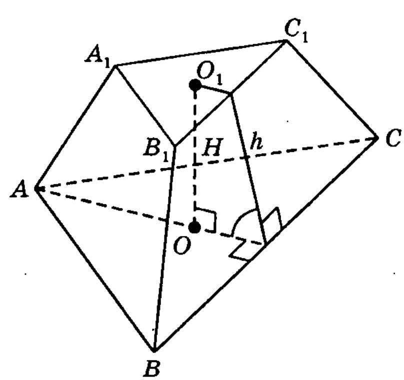


Рис. 85

10.4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы (рис. 86), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

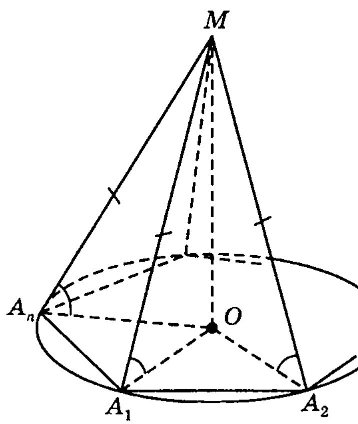


Рис. 86

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 87).

3. Если высота треугольной пирамиды $MABC$ проходит через точку пересечения высот ΔABC, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 88).

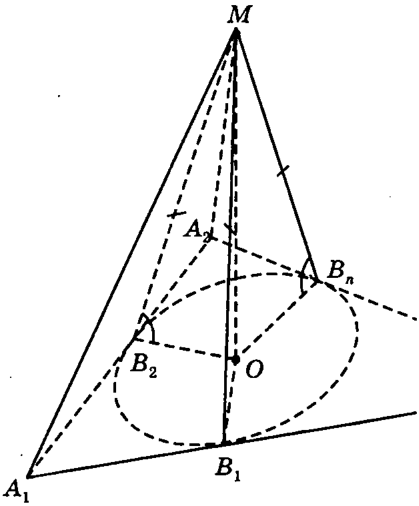


Рис. 87

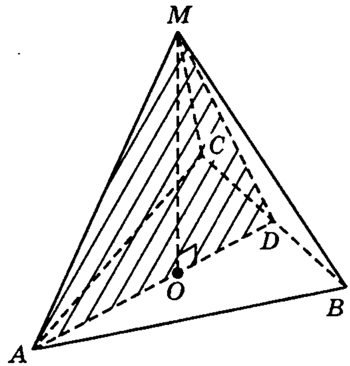


Рис. 88

4. Если MO — высота пирамиды $MABC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 88).

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1, то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 89).

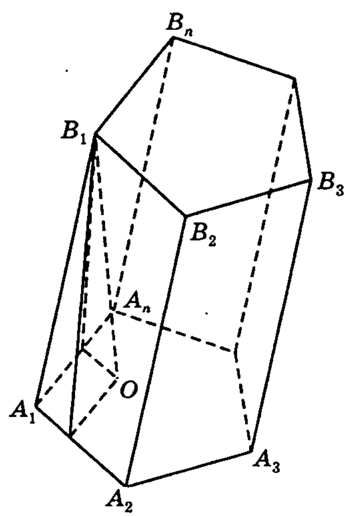


Рис. 89

§ 11. Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная) и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

11.1. Цилиндр

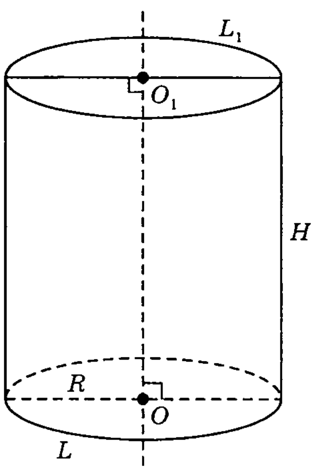


Рис. 90

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (рис. 90).

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра.**

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра.**

Прямая OO_1 называется **осью цилиндра.**

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым.**

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, является кругом.

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}};$$
$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R+H); \quad V = \pi R^2 H.$$

11.2. Конус

Конусом называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L **(рис. 91).**

Коническая поверхность называется боковой поверхностью конуса, а круг — основанием конуса.

Точка C — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса.**

Прямая OC **называется осью конуса, а отрезок** OC **называется высотой конуса.**

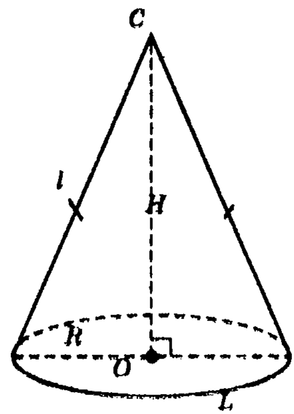


Рис. 91

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым.**

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$
$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R+l); \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 92).

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой усеченного конуса.**

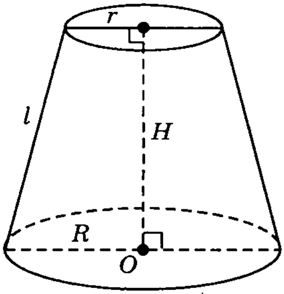


Рис. 92

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{бок.} = \pi l(R + r);\ S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2;\ S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2;\ V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

11.3. Шар

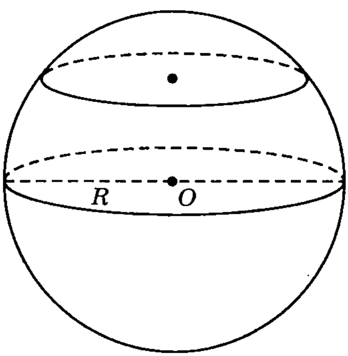


Рис. 93

Шаровой, или **сферической, поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра** шара (точка O, рис. 93).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полукруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр O, представляет собой наибольший круг.

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания** плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник.**

Многогранник называется **вписанным в сферу,** если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника.**

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \pi D^2; \quad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

1. **Шаровой сегмент** (рис. 94).

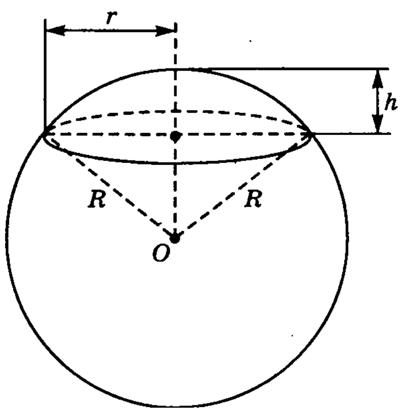


Рис. 94

Если S — площадь сферической поверхности сегмента, h — высота, V — объем, r — радиус основания, то

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h).$$

2. **Шаровой сектор** (рис. 94).

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h.$$

8. Шаровой пояс (рис. 95).

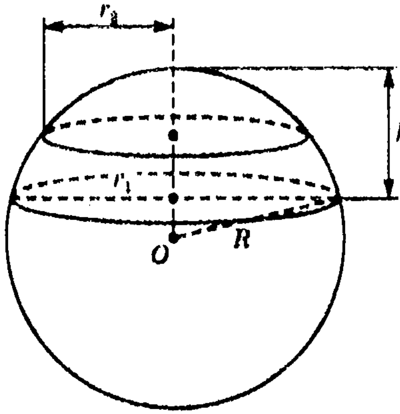


Рис. 95

Если h — высота шарового пояса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, то

$$S_{бок.} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$
$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$
$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Глава 6

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 12. Задачи с решениями

12.1. Многогранники

12.1.1. Параллелепипед

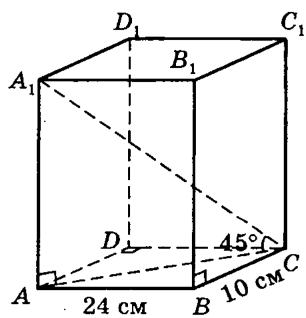
Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 24 см и 10 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найти боковое ребро параллелепипеда.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

$AB = 24$ см, $BC = 10$ см, A_1C — диагональ параллелепипеда, $\angle A_1CA = 45°$.

Найти боковое ребро AA_1.



Решение.

Так как параллелепипед прямоугольный, то все его грани — прямоугольники. Из ΔABC, где $\angle B = 90°$, найдем AC:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2},$$

$$AC = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26 \text{ (см)}.$$

Так как $AA_1 \perp (ABCD) \Rightarrow AA_1 \perp AC$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). Значит,

ΔA_1AC — прямоугольный, и так как $\angle A_1CA = 45°$ (по условию), то $\angle AA_1C = 45°$, т. е. $AC = AA_1 = 26$ см.

Ответ: 26 см.

Пример 2. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60°. Меньшая из площадей диагональных сечений равна 130 см^2. Найти площадь поверхности параллелепипеда.

Дано:

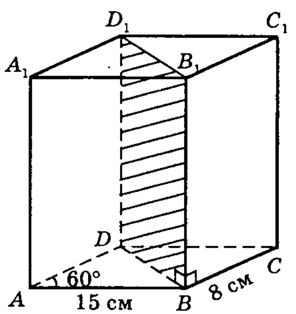
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед.

$AB = 15$ см, $BC = 8$ см,

$\angle DAB = 60°$, $S_{\text{сеч.}} = 130$ см^2

Найти $S_{\text{полн.}}$

Решение.



Так как параллелепипед прямой, то боковые грани — прямоугольники. Заметим, что $DB < AC$, тогда DD_1B_1B — наименьшее диагональное сечение.

Пусть $BB_1 = H$ — высота сечения (а значит, и параллелепипеда). Так как $BB_1 \perp (ABCD) \Rightarrow$ $\Rightarrow BB_1 \perp BD$.

Следовательно, сечение BB_1D_1D — прямоугольник.

$S_{\text{сеч}} = H \cdot BD = 130$ (см^2). Диагональ основания BD найдем из ΔDAB по теореме косинусов:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60°, \text{ или } BD^2 = 169,$$

откуда $BD = 13$ (см), тогда $H = 130 : 13 = 10$ (см).

Так как прямой параллелепипед является одновременно и призмой, то

$$S_{\text{бок}} = P \cdot H, \text{ где } P = 2(15 + 8) = 46 \text{ (см)}, H = 10 \text{ см},$$

$$\text{тогда } S_{\text{бок}} = 460 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \sin 60° = 15 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Следовательно,

$S_п = S_{бок} + 2S_{осн} = 460 + 120\sqrt{3} = 20(23 + 6\sqrt{3})$ см^2.

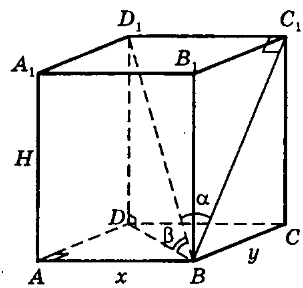
Ответ: $20(23 + 6\sqrt{3})$ см^2.

Пример 3. **Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет угол α с плоскостью боковой грани и угол β с плоскостью основания. Найти объем параллелепипеда, если его высота равна H.**

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, D_1B — диагональ параллелепипеда, $\angle D_1BC_1 = \alpha$, $\angle D_1BD = \beta$, $AA_1 = =H$ — высота.

Найти V.

Решение.



Заметим, что DB — проекция диагонали D_1B на плоскость основания $ABCD$, тогда $\angle D_1BD = \beta$. Аналогично BC_1 — проекция диагонали D_1B на плоскость боковой грани, тогда $\angle D_1BC_1 = \alpha$. По условию высота прямоугольного параллелепипеда есть любое боковое ребро, значит, $AA_1 = DD_1 = BB_1 = CC_1 = H$.

Так как $DD_1 \perp (ABCD) \Rightarrow D_1D \perp DB$, тогда из ΔD_1DB имеем $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{DD_1}{DB} = \dfrac{H}{DB}$, откуда $DB = \dfrac{H}{\operatorname{tg}\beta} = H\operatorname{ctg}\beta$.

Аналогично находим $D_1B = \dfrac{H}{\sin\beta}$. Пусть $AB = x$, $BC = y$, тогда из ΔADB по теореме Пифагора имеем $x^2 + y^2 = H^2\operatorname{ctg}^2\beta$. Из ΔBC_1D_1 : $D_1C_1 = D_1B\sin\alpha$, и так как $D_1C_1 = AB = x$, то $x = D_1B\sin\alpha = \dfrac{H}{\sin\beta}$, $\sin\alpha = \dfrac{H\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Подставляя значение x в равенство $x^2+y^2=H^2\operatorname{ctg}^2\beta$, имеем $y^2 = H^2 \operatorname{ctg}^2\beta - \dfrac{H^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = H^2\cdot\dfrac{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$,

откуда $y = \dfrac{H}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$.

Следовательно, объем прямоугольного параллелепипеда $V = xyH = \dfrac{H^3\sin\alpha}{\sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$ (куб. ед.).

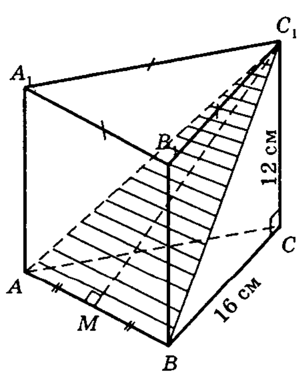
Ответ: $\dfrac{H^3\sin\alpha}{\sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$ (куб. ед.).

12.1.2. Призма

Пример 4. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 16 см, боковое ребро равно 12 см. Найти площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AB = BC = AC = 16$ см, $CC_1 = 12$ см.

Найти $S_{сеч}$.



Решение.

Так как призма правильная, то все боковые грани — равные прямоугольники. Тогда $BC_1 = AC_1$, т. е. сечение ABC_1 — равнобедренный треугольник с основанием $AB = 16$ см.

Далее, $C_1C \perp (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow C_1C \perp BC$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости).

Из ΔC_1CB находим $BC_1 = \sqrt{12^2+16^2} = \sqrt{400} = 20$ (см). C_1M — медиана и высота равнобедренного ΔABC_1, тогда $MB = \frac{1}{2}AB = 8$ (см) и из ΔC_1MB находим

$$C_1M = \sqrt{BC_1^2 - MB^2}, \text{ или}$$

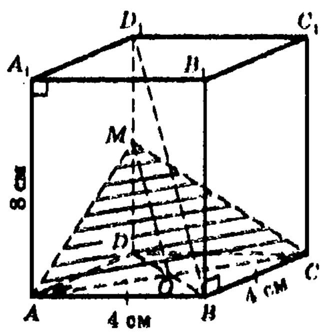
$$C_1M = \sqrt{400-64} = \sqrt{336} = \sqrt{16\cdot 21} = 4\sqrt{21} \text{ (см)}.$$

Следовательно,

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2}AB\cdot C_1M = \frac{1}{2}\cdot 16\cdot 4\sqrt{21} = 32\sqrt{21}.$$

Ответ: $32\sqrt{21}$ см^2.

Пример 5. В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найти площадь сечения, если сторона основания призмы равна 4 см, а ее высота 8 см.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, $AB = 4$ см, $AA_1 = 8$ см — высота, AC — диагональ основания $(AMC)\|D_1B$, D_1B — диагональ призмы.

Найти $S_{\text{сеч}}$.

Решение.

Через скрещивающиеся прямые D_1B и AC проведем плоскость, параллельную D_1B. В плоскости D_1DB проведем $OM\|D_1B$, где O — точка пересечения диагоналей основания. Соединим точку M с точками A и C, тогда $(AMC)\|D_1B$, так как известно, что если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости (признак параллельности прямой и плоскости).

Итак, ΔAMC — искомое сечение. Заметим, что $\Delta ADM = \Delta MDC$ (по трем сторонам). Далее, $DO = OB$ и $OM \| D_1B$ (по построению), значит, OM — средняя линия ΔD_1DB, $DM = MD_1$. Так как ΔAMC — равнобедренный ($AM = MC$, $AO = OC$), то MO — медиана и высота. Из ADB, где $AB = AD = 4$ см, $DB = 4\sqrt{2}$ (см).

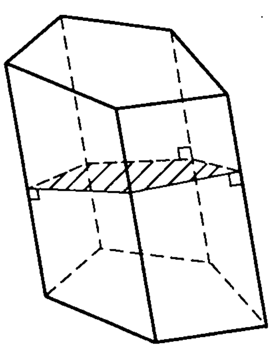
Из ΔD_1DB

$$D_1B = \sqrt{D_1D^2 + DB^2} = \sqrt{8^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

Тогда $MO = \dfrac{1}{2} D_1B = 2\sqrt{6}$ (см) и $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{1}{2} AC \cdot MO$ или

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

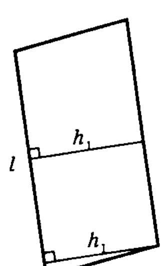
Ответ: $8\sqrt{3}$ см^2.



Пример 6. Доказать, что площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Решение.

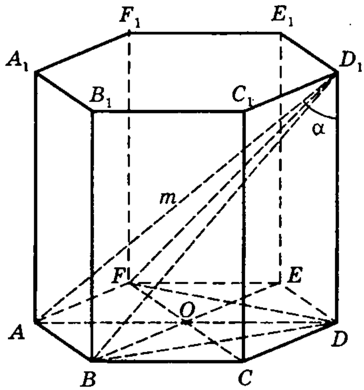
Пусть l — длина бокового ребра; $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения (на рисунке заштриховано).



Заметим, что так как призма наклонная, то боковые грани — параллелограммы. Сечение перпендикулярно каждой боковой грани, т. е. перпендикулярно боковым ребрам.

Пусть h_1 — высота параллелограмма — одной из боковых граней, тогда $S = l \cdot h_1$ — площадь одной из боковых граней.

Так как таких граней всего n и каждая боковая грань имеет свою высоту, то имеем $S_{бок.} = S_1 + S_2 + ... + S_n = = l \cdot h_1 + l \cdot h_2 + + ... + l \cdot h_n = l(h_1 + h_2 + ... + h_n) = l \cdot P_\perp$, что и требовалось доказать.



Пример 7. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину m, составляет с боковым ребром призмы угол α. Определить объем призмы.

Решение.

Заметим, что из каждой вершины призмы, например из вершины D_1, можно провести три диагонали: D_1A, D_1F и D_1B. Они проецируются на плоскость основания $ABCDEF$ диагоналями основания AD, FD и BD.

Из приведенных трех наклонных D_1A, D_1F и D_1B та больше, у которой проекция больше. Следовательно, наибольшая наклонная будет AD_1.

Так как призма правильная, то $DD_1 \perp (ABCDEF) \Rightarrow \Rightarrow DD_1 \perp AD$. Из ΔADD_1, где $AD_1 = m$ и $\angle AD_1D = \alpha$, находим $D_1D = H = m\cos\alpha$ и $AD = m\sin\alpha$. Так как диагонали основания AD, BD и CE делят правильный шестиугольник на 6 правильных треугольников, то $S_{\Delta AOB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $a = AB = AO = BO$, тогда

$$S_{осн} = 6 \cdot \frac{(AO)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} m^2 \sin^2\alpha.$$

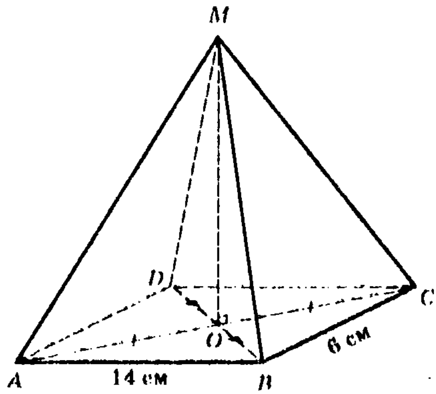
Следовательно, $V = S_{осн} \cdot H$, или

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{8} m^3 \sin^2\alpha \cos\alpha \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} m^3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha$ (куб. ед.).

12.1.3. Пирамида

Пример 8. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 6 см и 14 см и одной из диагоналей 12 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 см. Найти боковые ребра пирамиды.



Дано: $MABCD$ — пирамида,
$ABCD$ — параллелограмм,
$DB = 12$ см, $AB = 14$ см, $BC = 6$ см, $MO = 4$ см — высота пирамиды.
Найти MA, MB, MC, MD.

Решение.

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то диагонали его AC и BD в точке пересечения делятся пополам, т. е. $AO = OC$ и $OD = OB$. Тогда $AM = MC$ и $MB = MD$ как наклонные, имеющие равные проекции (так как MO — высота пирамиды, то $MO \perp (ABCD) \Rightarrow MO \perp AC$ и $MO \perp BD$). По свойству параллелограмма (связывающего стороны и диагонали) имеем

$$2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2 \text{ или } 2(196 + 36) = AC^2 + 144,$$

$AC^2 = 320$, откуда $AC = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ (см), $AO = 4\sqrt{5}$ (см).

Из ΔAOM найдем $AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} =$

$$= \sqrt{80+16} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \text{ (см)}.$$

Значит, $AM = MC = 4\sqrt{6}$ (см). Аналогично

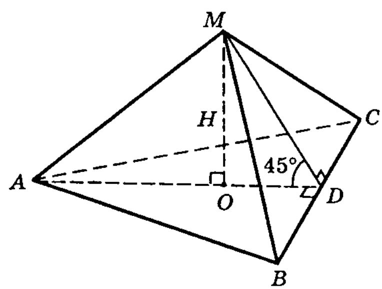
$$OB = \frac{1}{2}BD = 6 \text{ (см)}.$$

Из ΔMOB $MB = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (см).

$$MB = MD = 2\sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Ответ: $MA = MC = 4\sqrt{6}$ см; $MB = MD = \sqrt{13}$ см.

Пример 9. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, а двугранный угол при стороне основания равен 45°. Найти площадь поверхности пирамиды.



Дано: $MABC$ — правильная треугольная пирамида, $MO = H$ — высота пирамиды, $\angle ODM = 45°$.

Найти $S_{\text{полн.}}$

Решение.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$

Так как пирамида правильная, то ΔABC — равносторонний и точка O — центр вписанной и описанной окружностей. Пусть $AB = x$, где $x > 0$, тогда $S_{\text{осн.}} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ (площадь правильного треугольника).

Так как $MO = H$ — высота пирамиды, то $MO \perp (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow MO \perp OD$, т. е. ΔMOD — прямоугольный и $\angle ODM =$ $= 45°$ — двугранный угол при стороне основания (угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания).

В ΔMOD $\angle OMD = \angle ODM = 45°$, т. е. $MO = OD = H$, тогда $MD = \sqrt{H^2 + H^2} = H\sqrt{2}$.

Следовательно, $S_{\text{бок.}} = \dfrac{1}{2} P_{\text{осн.}} \cdot h$, где $P_{\text{осн.}} = 3AB = 3x$ и $h = MD = H\sqrt{2}$.

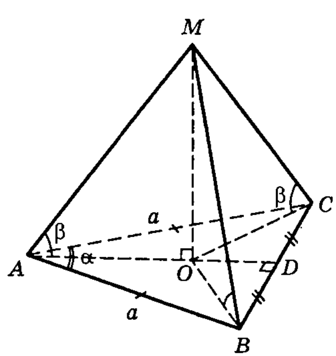
Так как ΔABC — правильный, то $AB = 2r\sqrt{3} = 2 \cdot OD\sqrt{3} = 2H\sqrt{3}$, тогда $P_{\text{осн.}} = 3 \cdot 2H\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,H$ и $S_{\text{бок.}} = 3\sqrt{6}\,H^2$.

Теперь находим $S_{\text{полн.}} = 3\sqrt{6}\,H^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2H\sqrt{3})^2 =$

$$= 3\sqrt{3}\,H^2(\sqrt{2} + 1).$$

Ответ: $3\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)H^2$.

Пример 10. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a, и углом между ними, равным α. Все боковые ребра наклонены к основанию под углом β. Определить объем пирамиды.



Дано: $MABC$ — пирамида, ΔABC — равнобедренный, $AB = AC = a$, $\angle BAC = \alpha$; $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \beta$.
Определить объем V пирамиды.

Решение.

Высота MO пирамиды $MABC$ должна проходить через центр окружности, описанной около равнобедренного ΔABC. Так как $\angle BAC = \alpha$ — произвольный, то положение центра O может быть в любой точке отрезка AD, где D — середина BC и даже на продолжении его за точку D, если угол α — тупой.

Из ΔAOM, где $\angle OAM = \beta$ (по условию) и $AO = R$ — радиус описанной окружности, найдем высоту пирамиды MO: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{MO}{R} \Rightarrow MO = R \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Из ΔABC по теореме синусов получим $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R$, откуда $R = \dfrac{BC}{2\sin\alpha}$. Но $BC = 2BD$; $BD = a\sin\dfrac{\alpha}{2}$, тогда

$$R = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}, \text{ значит, } MO = \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}.$$

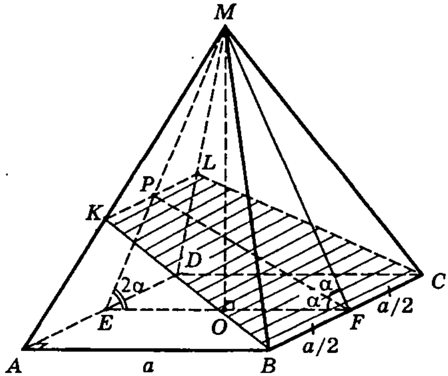
$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha.$$

Следовательно, $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot MO = \dfrac{1}{6}a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

Итак, $V = \dfrac{a^3}{6}\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$ (куб. ед.).

Ответ: $\dfrac{a^3}{6}\sin\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

Пример 11. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоско-



стью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

Дано: $MABCD$ — правильная четырехугольная пирамида,

$$AB = a,\ \angle OFM = 2\alpha,\ \angle EFP = \angle PFM = \alpha.$$

Найти $S_{\text{сеч.}}$

Решение.

Пусть $KLBC$ — данное сечение.

Проведем $(MFE) \perp BC$.

По условию $\angle MEF = \angle MFE = 2\alpha$, $\angle EFP = \angle MFP = \alpha$, $BC = AD = EF = a$. Тогда $S_{\text{сеч.}} = \dfrac{1}{2}(KL + BC)\cdot PF$ или

$$S_{\text{сеч.}} = (BF + KP)\cdot PF.$$

Из ΔEPF $\angle EPF = 180° - (2\alpha + \alpha) = 180° - 3\alpha$.

По теореме синусов имеем: $\dfrac{PF}{\sin 2\alpha} = \dfrac{EF}{\sin(180° - 3\alpha)}$, откуда $PF = \dfrac{a\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Из подобия ΔMKP и ΔMAE имеем $\dfrac{KP}{AE} = \dfrac{MP}{ME}$, откуда $KP = \dfrac{AE\cdot MP}{ME}$.

Далее, из ΔMOE находим $ME = \dfrac{EO}{\cos 2\alpha}$ или $ME = \dfrac{a}{2\cos 2\alpha}$. Так как $MF = ME$ и $\angle MPF = 180° - \angle EPF = 180° - (180° - 3\alpha) = 3\alpha$, то из ΔMPF имеем по теореме синусов $\dfrac{MP}{\sin\alpha} = \dfrac{MF}{\sin 3\alpha}$, откуда $MP = \dfrac{a\sin\alpha}{2\cos 2\alpha\sin 3\alpha}$.

Следовательно,

$$KP = \frac{a}{2}\cdot\frac{a\sin\alpha}{2\cos 2\alpha\sin 3\alpha} : \frac{a}{2\cos 2\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{2\sin 3\alpha}.$$

Итак, $S_{сеч.} = \left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a \sin\alpha}{2\sin 3\alpha}\right) \cdot \dfrac{a \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} =$

$$= \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2\sin^2 3\alpha}(\sin 3\alpha + \sin\alpha) =$$

$$= \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2\sin^2 3\alpha} \cdot 2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos\alpha}{\sin^2 3\alpha} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $\dfrac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

12.1.4. Усеченная пирамида

Пример 12. Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 10 см и 6 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно 2 см. Найти площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная пирамида.

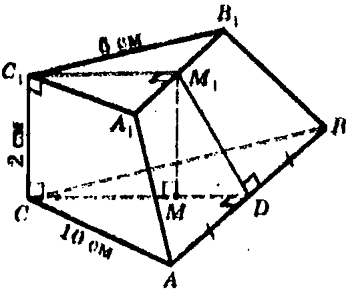
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — правильные.

$AC = 10$ см, $A_1C_1 = 6$ см,

$CC_1 = 2$ см,

$CC_1 \perp (ABC)$ и $CC_1 \perp (A_1B_1C_1)$.

Найти $S_{бок.}$



Решение.

Так как по условию $CC_1 \perp (ABC)$, то $CC_1 \perp CD \perp CA \perp$ $\perp CB$, тогда трапеции AA_1C_1C и BB_1C_1C равны ($AC = CB$ и $A_1C_1 = C_1B_1$).

Значит, $S_{ACC_1A_1} = S_{BCC_1B_1}$.

Так как $AA_1 = BB_1$ и $AB \parallel A_1B_1$, то грань ABB_1A_1 — равнобедренная трапеция. Следовательно,

$S_{бок.} = 2S_{ACC_1A_1} + S_{ABB_1A_1}$,

$$S_{ACC_1A_1} = \frac{1}{2}(AC + A_1C_1) \cdot CC_1 = \frac{1}{2}(10 + 6) \cdot 2 = 16 \text{ (см}^2\text{).}$$

$$S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{2}(AB + A_1B_1) \cdot M_1D = \frac{1}{2}(10 + 6) \cdot M_1D = 8 \cdot M_1D.$$

Высоту боковой грани M_1D найдем из ΔM_1MD, где $MM_1 = C_1C = 2$ см; $MD = CD - CM = CD - C_1M_1$.

Из ΔADC, где $AC = 10$ см, $AD = 5$ см, имеем

$$CD = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

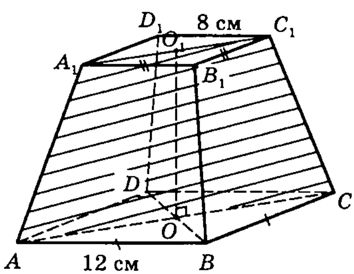
Аналогично из $\Delta A_1M_1C_1$ $C_1M_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$, тогда $MD = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

Значит, $S_{ABB_1A_1} = 8 \cdot \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 8\sqrt{16} = 32$ (см^2).

Итак, $S_{бок.} = 2 \cdot 16 + 32 = 64$ (см^2).

Ответ: 64 см^2.

Пример 13. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны 12 см и 8 см, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, равна 30 см^2. Найти объем усеченной пирамиды.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида.

$AB = 12$ см, $A_1B_1 = 8$ см

$S_{AA_1C_1C} = 30$ см^2.

Найти $V_{ус.пир.}$

Решение.

Так как пирамида правильная, то

$$V_{ус.пир.} = \frac{H}{3}\left(S_H + S_B + \sqrt{S_H \cdot S_B}\right), \text{ где } H = OO_1,$$

$S_H = S_{ABCD} = AB^2 = 144$ (см^2), $S_в = S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1{}^2 = 64$ (см^2).

Остается найти высоту $OO_1 = H$ усеченной пирамиды.

Так как $AC \parallel A_1C_1$ и $AA_1 = CC_1$, то сечение AA_1C_1C — равнобедренная трапеция. По условию задачи $S_{AA_1C_1C} = 30$ см^2.

С другой стороны, $S_{AA_1C_1C} = \dfrac{AC + A_1C_1}{2} \cdot O_1O$.

Из ΔABC находим $AC = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (см); аналогично из $\Delta A_1B_1C_1$ $A_1C_1 = 8\sqrt{2}$ (см), тогда

$$(12\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) \cdot H = 2 \cdot 30, \text{ откуда } H = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ (см).}$$

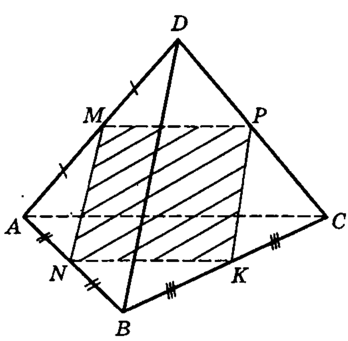
Значит, $V_{\text{ус.пир.}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{2}}(144 + 64 + 12 \cdot 8) =$

$$= 152\sqrt{2} \text{ (см}^3\text{).}$$

Ответ: $152\sqrt{2}$ см^3.

12.1.5. Построение сечений

Пример 14. В тетраэдре $DABC$ точки M, N и K являются серединами ребер AD, AB и BC; $DB = 5$ см; $AC = 6$ см. Доказать, что плоскость MNK проходит через середину P ребра DC, и найти периметр четырехугольника, полученного при пересечении тетраэдра плоскостью MNK.



Дано: тетраэдр $DABC$, M — середина AD, N — середина AB, K — середина BC,

$$DB = 5 \text{ см}, AC = 6 \text{ см}.$$

1) Доказать, что плоскость MNK проходит через середину P ребра DC.

2) Найти P_{MNKP}.

Решение.

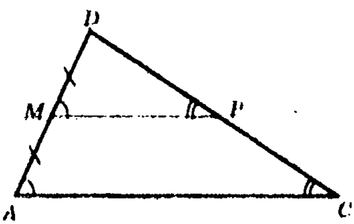
1) Найдем точки пересечения плоскости MNK с ребрами тетраэдра. Так как N — середина AB и K — середина BC, то NK — средняя линия ΔABC, тогда $NK \| AC$.

$AC \subset (DAC)$, поэтому $NK \| (DAC)$, так как известно, что если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна данной плоскости (признак параллельности прямой и плоскости).

Заметим, что плоскости DAC и MNK имеют общую точку M, значит, они пересекаются по прямой MP, проходящей через точку M в плоскости DAC.

А нам известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Итак, $MP \| NK$, а раз $NK \| AC$, то $NK \| MP$ (две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу).

Пусть P — точка пересечения этой прямой с ребром DC. Докажем, что точка P — середина DC. $\Delta DMP \sim \Delta DAC$ (по двум углам).



$$\frac{DM}{DA} = \frac{DP}{DC} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2},$$

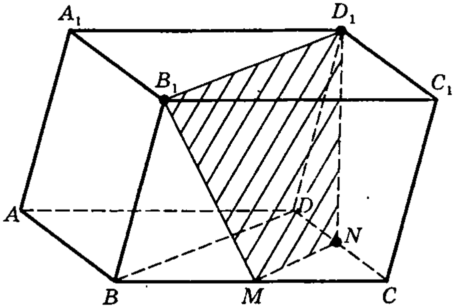
т. е. P — середина DC. Выходит, что $MNKP$ — параллелограмм (по определению).

2) $P_{MNKP} = 2(NK + PK) = 2\left(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD\right) =$

$$= AC + BD = 11 \text{ (см)}.$$

Ответ: 11 см.

Пример 15. Изобразить параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и построить его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Доказать, что построенное сечение — трапеция.



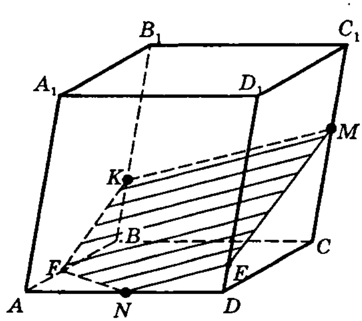
Решение.

По условию точка N — середина DC.

Известно, что если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Значит, плоскость сечения пересечет основания $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным отрезкам. Проведем BD; $BD \| B_1D_1$. Из точки N проводим $MN \| BD$. Значит, $MN \| B_1D_1$. Соединим точки B_1 и M; D_1 и N. Тогда B_1D_1NM — искомое сечение.

Таким образом, в четырехугольнике B_1D_1NM имеем $B_1D_1 \| NM$, значит, B_1D_1NM — трапеция (по определению).

Пример 16. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах CC_1 AD и BB_1.



Построение

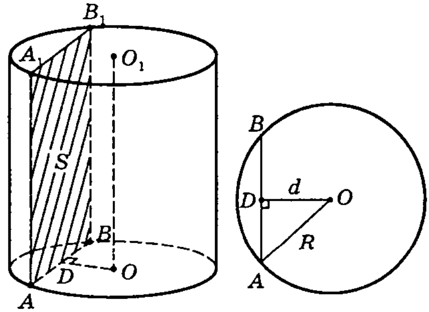
1. Так как $K \in B_1B$ и $M \in C_1C$, то $KM \subset (BB_1C_1C)$.
2. Точка $N \in (AA_1D_1D)$ и секущей плоскости.
3. Секущая плоскость, проходя через точку N, пересечет параллельные грани AA_1D_1D и BB_1C_1C по параллельным прямым; проводим в плоскости AA_1D_1D $NE \| KM$.
4. В плоскости DD_1C_1C проводим EM.
5. Секущая плоскость проходит через точку K и пересекает противоположные грани AA_1B_1B и DD_1C_1C по параллельным прямым; поэтому в плоскости грани AA_1B_1B проводим $KF \| ME$.
6. В плоскости $ABCD$ соединим точки F и N.
7. Пятиугольник $KMENF$ — искомое сечение.

12.2. Круглые тела

12.2.1. Цилиндр

Пример 1. Высота цилиндра равна 16 см, радиус равен 10 см. Найти площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси, если расстояние между этой плоскостью и осью цилиндра равно 6 см.

Дано: цилиндр.
$H = 16$ см,
$R = 10$ см,
$d = 6$ см.
Найти $S_{\text{сеч.}}$



Решение.

Сечение AA_1B_1B — прямоугольник, так как $AA_1 \perp$ основанию $\Rightarrow AA_1 \perp AB$. Аналогично $AA_1 \perp A_1B_1$. Кроме того, $AA_1 \| BB_1$ — как образующие цилиндра. ΔAOB — равнобедренный, так как $AO = BO = R$. Так как $OD = d$ — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения, то $OD \perp AB$, тогда ΔAOD — прямоугольный и $AD = \sqrt{R^2 - d^2}$, $AD = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ (см), $AB = 2 \cdot AD = 16$ (см) и $S_{\text{сеч.}} = AB \cdot AA_1 = 16 \cdot 16 = 256$ (см^2).

Ответ: 256 см^2.

Пример 2. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найти радиус основания и высоту цилиндра.

Решение.

Пусть H — высота, R — радиус основания цилиндра. По условию

$$H - R = 12. \qquad (1)$$

Известно, что $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H)$, что по условию задачи равно 288π см^2. Следовательно, имеем

$$2\pi R(R + H) = 288\pi, \text{ или } R(R + H) = 144. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) рассматриваем как систему уравнений

$$\begin{cases} H - R = 12, \\ R(R + H) = 144, \end{cases} \quad \begin{cases} H = R + 12, \\ R(R + 6) = 72. \end{cases}$$

Решая уравнение $R^2 + 6R - 72 = 0$, находим $R_1 = 6$, $R_2 = -12$ (не подходит, так как $R > 0$).

Если $R = 6$, то $H = 6 + 12 = 18$.

Ответ: $R = 6$ см, $H = 18$ см.

Пример 3. Площадь основания цилиндра равна M, а площадь его осевого сечения равна Q. Найти объем цилиндра.

Решение.

Пусть R — радиус основания цилиндра, H — высота. Так как осевое сечение цилиндра — прямоугольник, то $2R \cdot H = Q$. (1)

В основании цилиндра круг, тогда $\pi R^2 = M$. (2)

Следовательно, $V = \pi R^2 H = MH$.

Из (1) $R = \dfrac{Q}{2H}$, тогда (2) примет вид $\dfrac{\pi Q^2}{4H^2} = M$,

откуда $H = \dfrac{Q}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{M}}$, значит, объем

$$V = M \cdot \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{\pi}{M}} = \frac{Q}{2}\sqrt{\pi M} \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\dfrac{Q}{2}\sqrt{\pi M}$.

Пример 4. Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см^3.

Решение.

Так как цистерна имеет форму цилиндра, то $V = \pi R^2 H$, где $R = 18 : 2 = 9$ (м), $V = \pi \cdot 81 \cdot 7 = 567\pi$ (м^3).

Известно, что плотность $\rho = \dfrac{m}{V}$, откуда $m = \rho V$ или

$$m = 0{,}85 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-6}} \cdot 567 \cdot 3{,}14 = 1513 \cdot 10^3 \text{ (кг)} = 1513 \text{ (т).}$$

Ответ: 1513 т.

12.2.2. Конус

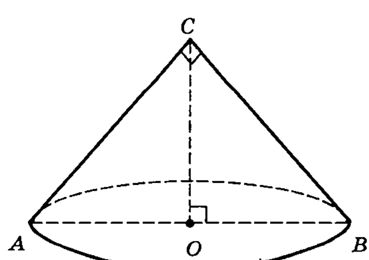
Пример 5. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найти площадь этого сечения, если радиус основания конуса равен 5 см.

Дано: конус ACB.

$\angle ACB = 90°$,

$AO = 5$ см.

Найти $S_{\text{сеч.}}$



Решение.

Так как $AC = CB$ — как образующие конуса, то

$$S_{\text{сеч.}} = S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot CB.$$

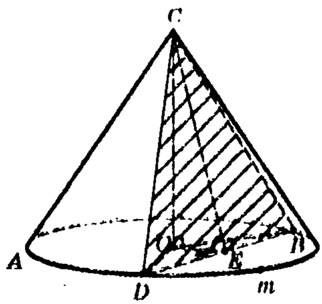
Пусть $AC = CB = x$, тогда

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}x^2.$$

Кроме того, по теореме Пифагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$ или $x^2 + x^2 = 2\cdot(AO)^2$, $2x^2 = 100$, откуда $x^2 = 50$, тогда

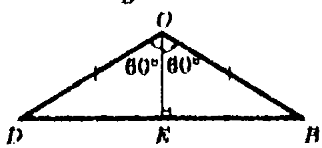
$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}\cdot 50 = 25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 25 см^2.



Пример 6. Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 120°, проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 45°. Найти площадь сечения, если радиус основания равен 8 см.

Дано: конус ABC.
DB — хорда основания,
$\angle CEO = 45°$, $OB = 8$ см,
$\cup DmB = 120°$.
Найти $S_{\text{сеч.}}$



Решение.

Если $\cup DmB = 120°$, то

$$\angle DOB = 120°.$$

$\triangle CDB$ — сечение, где $CD = CB$ — как образующие конуса.

Проведем высоту CE — сечения. CE — высота и медиана равнобедренного $\triangle CDB$, тогда

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}DB\cdot CE. \qquad (1)$$

Из $\triangle DOB$ по теореме синусов имеем

$$\frac{DB}{\sin 120°} = \frac{OB}{\sin 30°},\ DB = \frac{OB\cdot\sin 120°}{\sin 30°} = \frac{8\cdot\cos 30°}{\frac{1}{2}} =$$

$$=16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}\ (\text{см}).$$

В ΔDEO $\angle ODE = 30°$, тогда $OE = \frac{1}{2}OD = 4$ (см).

По условию $\angle CEO = 45°$, значит,

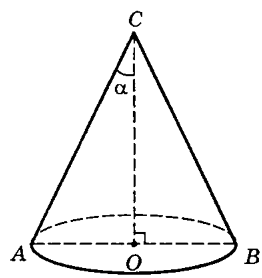
$$CE=\frac{OE}{\sin 45°}=4\sqrt{2}\ (\text{см}).$$

Теперь из соотношения (1) находим площадь искомого сечения:

$$S_{\text{сеч.}}=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{2}=16\sqrt{6}\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $16\sqrt{6}$ см^2.

Пример 7. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна m. Найти объем и полную поверхность конуса.



Дано: конус ABC.
$\angle ACB = 2\alpha$,
$CO + AC = m$.
Найти V и $S_{\text{пол.}}$

Решение.
Пусть $AO = R$, $CO = H$, $AC = l$.
По условию задачи

$$l + H = m. \qquad (1)$$

Из ΔAOC, где $\angle ACO = \alpha$, имеем $H = l\cos\alpha$, $R = l\sin\alpha$, тогда (1) примет вид $l + l\cos\alpha = m$, $l(1 + \cos\alpha) = m$, откуда

$$l=\frac{m}{1+\cos\alpha}=\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}};\ \text{тогда}\ R=l\sin\alpha=\frac{m\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Теперь находим $S_{\text{полн}} = \pi R(R + l) =$

$$=\frac{\pi m \sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{m\cdot\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{m}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\pi m^2\sin\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}}(1+\sin\alpha).$$

Но $1 + \sin\alpha = 1 + \cos(90° - \alpha) = 2\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$, тогда

$$S_{\text{полн}} = \frac{\pi m^2 \sin\alpha\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4\frac{\alpha}{2}};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi m^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $S_{\text{полн}} = \dfrac{\pi m^2 \sin\alpha\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4\frac{\alpha}{2}}$ (кв. ед.);

$V = \dfrac{\pi m^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{24\cos^6\frac{\alpha}{2}}$ (куб. ед.).

12.2.3. Усеченный конус

Пример 8. Образующая усеченного конуса l составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпендикулярна к прямой, соединяющей верхний конец ее с нижним концом противоположной образующей. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

Дано: ABB_1A_1 — усеченный конус;

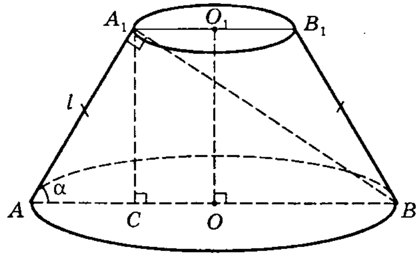
$AA_1 = l$ — образующая;

$\angle A_1AC = \alpha$;

$AA_1 \perp A_1B$.

Найти $S_{\text{бок}}$.

8. Зак. 450



Решение.

$S_{бок.} = \pi l(R + r)$, где $l = AA_1$, $R = AO$,

$r = A_1O_1$. Из ΔACA_1 имеем $AC = l \cos \alpha$.

Так как $AA_1 \perp A_1B$ (по условию), то ΔAA_1B — прямоугольный, тогда $AB = 2R = \dfrac{l}{\cos\alpha}$, значит,

$$AO = R = \frac{l}{2\cos\alpha}.$$

Следовательно, $A_1O_1 = CO = r = AO - AC$ или

$$r = \frac{l}{2\cos\alpha} - l\cos\alpha = \frac{l\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)}{2\cos\alpha}.$$

Теперь находим $S_{бок.} = \pi l(R + r) =$

$$= \frac{\pi l^2}{2\cos\alpha}\left(1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = \frac{\pi l^2}{2\cos\alpha}\cdot 2\sin^2\alpha =$$

$$= \pi l^2 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha.$$

Ответ: $S_{бок.} = \pi l^2 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha$.

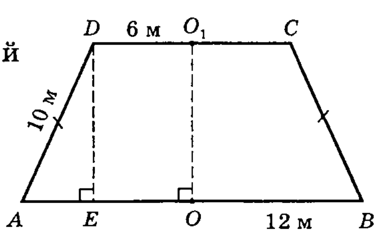
Пример 9. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 м и 12 м, а образующая равна 10 м. Найти объем усеченного конуса.

Дано: $ABCD$ — усеченный конус.

$AO = 12$ м; $DO_1 = 6$ м;

$AD = 10$ м.

Найти V.



Решение.

$V = \dfrac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$, где $H = OO_1 = DE$, $R = AO = 12$ м, $r = DO_1 = 6$ м. Остается найти высоту $H = DE$. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса — равнобедренную трапецию $ABCD$. Высоту H найдем из ΔADE, где $AE = AO - EO = AO - DO_1 = 12 - 6 = 6$ (м).

Тогда $DE = H = \sqrt{AD^2 - AE^2}$, $H = \sqrt{10^2 - 6^2} =$

$$= \sqrt{64} = 8 \text{ (м)}.$$

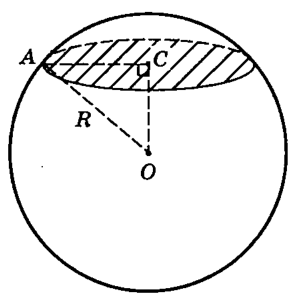
Теперь находим объем

$V = \dfrac{\pi \cdot 8}{3}(12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2) = \dfrac{8\pi}{3} \cdot 252 = 672\pi$ (м^3).

Ответ: 672π м^3.

12.2.4. Шар, сфера

Пример 10. Шар радиуса 26 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 10 дм от центра. Найти площадь сечения.



Дано: шар (O; R).
$R = AO = 26$ дм,
$OC = 10$ дм.
Найти $S_{\text{сеч.}}$

Решение.

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Пусть AC — радиус сечения, тогда $S_{\text{сеч.}} = \pi\,(AC)^2$. Заметим, что OC перпендикулярна плоскости сечения, тогда $OC \perp AC$. Из прямоугольного ΔACO находим

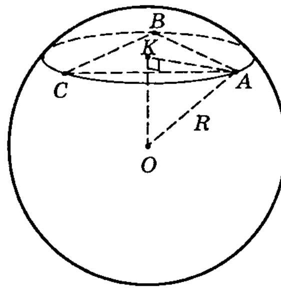
$$AC = \sqrt{AO^2 - OC^2},\ AC = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} =$$

$$= 24 \text{ (дм), тогда } S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot 24^2 = 576\pi \text{ (дм}^2).$$

Ответ: $S_{\text{сеч.}} = 576\pi$ дм^2.

Пример 11. Вершины ΔABC лежат на сфере радиуса 26 см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, $AC = 20$ см.

Дано: сфера $(O; R)$.
$R = OA = 26$ см,
$AB = 12$ см, $BC = 16$ см,
$AC = 20$ см,
точки A, B и C лежат на сфере.
Найти расстояние от центра сферы до плоскости ΔABC.



Решение.

Плоскость ΔABC пересекает сферу с центром O по окружности; эта окружность описана вокруг ΔABC. Из точки O проведем $OK \perp (ABC) \Rightarrow OK \perp AK$, т. е. OK есть расстояние от центра сферы до плоскости ΔABC, где точка K — центр описанной около ΔABC окружности. Соединим точку K с одной из вершин ΔABC, например с точкой A, и соединим точку A с центром O сферы. По условию $AB = 12$ см, $BC = 16$ см и $AC = 20$ см. Заметим, что $20^2 = 12^2 + 16^2$, т. е. ΔABC — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора). Но тогда $\angle ABC$ — вписанный, значит, AC — диаметр окружности, описанной около ΔABC, и точка K — ее центр.

Значит, $AK = \frac{1}{2} AC = 10$ (см).

Из ΔAKO находим искомое расстояние:

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2},\ OK = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (см)}.$$

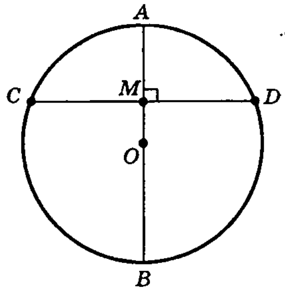
Ответ: 24 см.

Пример 12. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная к диаметру и делящая его на части — 12 см и 24 см. Найти объемы двух полученных частей шара.

Дано: шар $(O; R)$.
$AB \perp CD$,
$AM = 12$ см, $MB = 24$ см.

Найти V_1 и V_2.

Решение.



Рассмотрим сечение шара плоскостью большого круга, которая перпендикулярна к плоскости, делящей диаметр AB на отрезки AM и MB.

$AB = AM + MB = 12 + 24 =$
$= 36$ (см), тогда $R = AO = 18$ см.

Заметим, что получившиеся части шара являются шаровыми сегментами.

$$V_1 = \pi \cdot AM^2(AO - \frac{1}{3}AM) = \pi \cdot 12^2(18 - 4) = 2016\pi \text{ (см}^3\text{)};$$

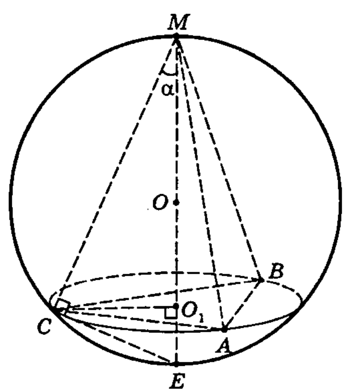
$$V_2 = V_{ш.} - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 18^3 - 2016\pi =$$

$$= 7776\pi - 2016\pi = 5760\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $V_1 = 2016\pi$ см^3, $V_2 = 5760\pi$ см^3.

12.2.5. Вписанные и описанные шары

Пример 13. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиуса R. Найти объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен α.



Дано: $MABC$ — правильная треугольная пирамида, вписанная в сферу.

$OM = R$ — радиус сферы,

$\angle O_1MC = \alpha$.

Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть $MABC$ — правильная пирамида, вписанная в сферу с центром O. Проведем высоту пирамиды MO_1, продолжив ее до пересечения в точке E со сферой.

Центр сферы O лежит на высоте MO_1 пирамиды. Соединим отрезками точки C и E, C и O_1. По условию $MO = R$, $\angle CME = \alpha$.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot MO_1$.

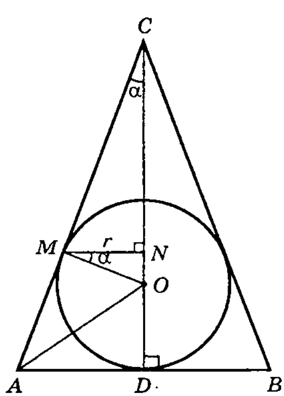
Заметим, что $\angle MCE$ — вписанный, опирающийся на диаметр ME, значит, $\angle MCE = 90°$. Из прямоугольных ΔMCE и ΔMCO_1 находим: $MC = 2R \cos\alpha$; $MO_1 = MC \cos\alpha = 2R\cos^2\alpha$; $CO_1 = MC\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha = R\sin 2\alpha$.

Так как точка O_1 есть центр окружности, описанной около основания пирамиды, и, следовательно, CO_1 есть радиус этой окружности, то сторона основания пирамиды $AC = CO_1\sqrt{3} = R\sqrt{3}\sin 2\alpha$.

Далее, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(R\sqrt{3}\sin 2\alpha)^2 \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \sin^2 2\alpha$.

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \sin^2 2\alpha \cdot 2R\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2\alpha$ (куб. ед.).

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2\alpha$.



Пример 14. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен α.

Решение.

Пусть CAB — осевое сечение конуса. Проведем $MO \perp AC$ и $MN \perp CD$. Согласно условию $MN = r$, $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle MOC = 90° - \alpha$, откуда $\angle OMN = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.

Так как $AM = AD$ — как отрезки касательных к окружности, проведенных из точки A, то AO — биссектриса $\angle CAB$, тогда $\angle OAD = \frac{1}{2}(90° - \alpha) = 45° - \frac{\alpha}{2}$.

Значит, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot CD$. Далее, из ΔOMN имеем $MO = \frac{r}{\cos\alpha}$, и так как $OM = OD$ (как радиусы шара), то из ΔADO получим

$$AD = OD \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Из ΔADC находим $CD = AD \operatorname{ctg}\alpha =$

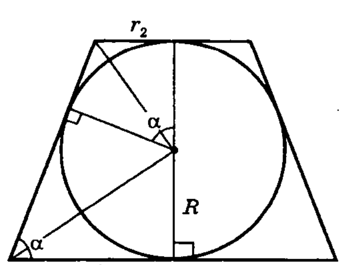
$$= \frac{r}{\sin\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Следовательно, $V = \dfrac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$ (куб. ед.).

Ответ: $V = \dfrac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}$.

Пример 15. В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания.

Решение.



Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса со вписанным в него шаром. Пусть r_1 — радиус нижнего основания, r_2 — радиус верхнего основания, R —

радиус шара, α — искомый угол между образующей и плоскостью основания.

Согласно условию задачи имеем $2r_1 + 2r_2 = 5R$. (1)

Но $r_1 = R\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ и $r_2 = R\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, тогда (1) примет вид

$$2R\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} + 2R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 5R \text{ или } 2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 5\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} + 2 = 0,$$

откуда находим $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = 2$ или $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, откуда

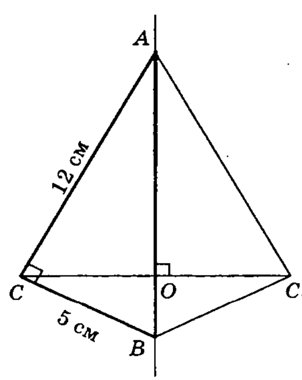
$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,2$ — не подходит, так как $2\,\mathrm{arctg}\,2 > \dfrac{\pi}{2}$, что невозможно. Значит, $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,0{,}5$.

12.2.6. Тела вращения

Пример 16. Прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 5 см вращается вокруг гипотенузы. Найти площадь поверхности полученного тела.

Дано: ΔACB, $\angle C = 90°$,
$AC = 12$ см, $BC = 5$ см,
AB — ось вращения.
Найти $S_{\text{т.в.}}$



Решение.

При вращении ΔACB вокруг гипотенузы AB получим два конуса с общим основанием. Площадь поверхности тела вращения будет равна сумме площадей боковых поверхностей конусов ACC_1 и BCC_1.

$S_{\text{бок.}} = \pi r l$, где $r = OC$ — радиус основания.

Из ΔACB найдем гипотенузу

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{144+25} = 13 \text{ (см)}.$$

Тогда $S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} AB \cdot CO$, откуда

$$CO = r = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13} \text{ (см)}.$$

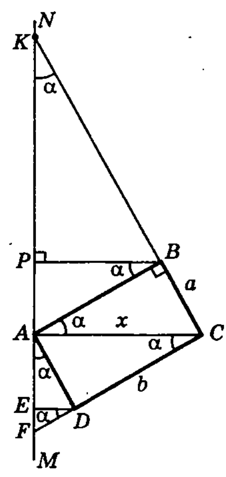
Теперь находим площадь поверхности тела вращения:

$$S_{\text{т.в.}} = S_{ACC_1} + S_{BCC_1} = \pi \cdot CO \cdot AC + \pi \cdot CO \cdot CB =$$

$$= \pi \cdot CO \cdot (AC + CB) = \frac{1020}{13}\pi = 78\frac{6}{13}\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $78\frac{6}{13}\pi$ см^3.

Пример 17. Найти объем фигуры, полученной при вращении прямоугольника со сторонами a и b вокруг оси, которая лежит в плоскости этого прямоугольника, перпендикулярна к его диагонали и проходит через ее конец.



Решение.

Пусть прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг оси MN. По условию $BC = a$ и $DC = b$; $AC \perp MN$.

Пусть $AC = x$, $\angle BAC = \alpha$.

Из ΔABC $x = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$AK = x \operatorname{ctg} \alpha$.

Аналогично $b = x \cos \alpha$; $BP = b \cos \alpha = x \cos^2\alpha$;

$$AF = x \operatorname{tg} \alpha,\ a = x \sin \alpha,\ DE = a \sin \alpha = x \sin^2\alpha.$$

Следовательно, искомый объем

$$V = V_{ABC} + V_{ACD}.$$

Но $V_{ABC} = V_{AKC} - V_{AKB} = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot AK - \frac{1}{3}\pi \cdot BP^2 \cdot AK =$

$= \frac{1}{3}\pi x^3 \operatorname{ctg} \alpha(1 - \cos^4\alpha) =$

$= \frac{1}{3}\pi x^3 \operatorname{ctg} \alpha(1 + \cos^2\alpha) \sin^2\alpha =$

$= \frac{1}{3}\pi x^3 \sin \alpha \cos \alpha(1 + \cos^2\alpha) = \frac{1}{3}\pi xab(1 + \cos^2\alpha).$

Аналогично находим, что $V_{ACD} = V_{AFC} - V_{AFD} =$

$$= \frac{1}{3}\pi xab(1 + \sin^2\alpha).$$

Таким образом, $V = V_{ABC} + V_{ACD} = \frac{1}{3}\pi abx(2 + \cos^2\alpha +$ $+ \sin^2\alpha) = \frac{1}{3}\pi abx \cdot 3 = \pi abx.$

Учитывая, что $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$V = \pi ab\sqrt{a^2 + b^2} \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $\pi ab\sqrt{a^2 + b^2}$.

§ 13. Задачи для самостоятельного решения

Часть 1

1. Площадь поверхности куба 96. Найти ребро куба.
2. Диагональ куба равна 3. Найти его полную поверхность.
3. Площадь полной поверхности куба равна 3. Найти длину диагонали куба.
4. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагонали верхнего и нижнего оснований, равна $6\sqrt{2}$. Найти длину ребра куба.

5. Найти площадь поверхности куба, диагональ которого равна $\sqrt{5}$.
6. Диагональ куба равна 6. Найти площадь одной его грани.
7. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если стороны оснований 2 и 3, а диагональ параллелепипеда $\sqrt{38}$.
8. Определить поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: $a = 10$, $b = 22$, $c = 16$.
9. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда равна 8 дм. Определить площади диагонального сечения.
10. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.
11. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{33}$, в основании лежит квадрат со стороной 2. Вычислить объем параллелепипеда.
12. В основании прямого параллелепипеда лежит прямоугольник, стороны которого равны 2 и 3. Вычислить полную поверхность параллелепипеда, если длина диагонали равна $\sqrt{29}$.
13. В прямом параллелепипеде стороны основания $a = 3$, $b = 6$ образуют угол 30°. Боковая поверхность равна 24. Найти объем.
14. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна 5. Определить его объем.
15. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см; угол между ними содержит 60°. Боковая поверхность параллелепипеда равна 220 см^2. Определить полную поверхность и площадь меньшего диагонального сечения.

16. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см и образуют угол 45°; меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Определить его объем.
17. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с диагоналями в 6 см и 8 см; диагональ боковой грани равна 13 см. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.
18. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна 1 м^2. Площади диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2. Найти объем параллелепипеда.
19. По стороне основания $a = 2$ и боковому ребру $b = 3$ найти полную поверхность правильной четырехугольной призмы.
20. Найти полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна $\sqrt{34}$, а диагональ боковой грани — 5.
21. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2, а высота равна 14 см. Определить диагональ этой призмы.
22. Определить диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8 см, а диагональ боковой грани равна 7 см.
23. Определить полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна 14 см, а диагональ боковой грани 10 см.
24. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 м, а диагональ боковой грани 2,5 м. Определить объем.
25. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а боковая поверхность 32 см^2. Определить объем.
26. В прямой треугольной призме стороны основания 3, 4, и 5, а высота равна 6. Найти ее полную поверхность.

27. Найти боковую поверхность правильной шестиугольной призмы, наибольшая диагональ которой равна 13, а боковое ребро 5.

28. В основании прямой треугольной призмы лежит равносторонний треугольник, длина высоты призмы равна $\sqrt{3}$, а длина диагонали боковой грани равна $\sqrt{15}$. Вычислить объем призмы.

29. Определить полную поверхность прямой треугольной призмы, если ее высота равна 50 см, а стороны основания 40 см, 13 см и 37 см.

30. В прямой треугольной призме стороны основания равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объем призмы.

31. Основанием призмы служит треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие по 3 см; боковое ребро равна 4 см и составляет с плоскостью основания угол 45°. Определить ребро равновеликого куба.

32. В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5 м, 6 м и 9 м; боковое ребро равно 10 м и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определить объем призмы.

33. Высота правильной треугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Сторона треугольника в основании пирамиды равна 4. Найти объем пирамиды.

34. Объем правильной четырехугольной пирамиды 48, высота 4. Найти боковую поверхность этой пирамиды.

35. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 18. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

36. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен 30°. Боковое ребро $l=2$. Найти боковую поверхность пирамиды.

37. Высота правильной четырехугольной пирамиды 7, а сторона основания 8. Найти боковое ребро.

38. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол $45°$. Найти объем пирамиды.

39. Высота правильной четырехугольной пирамиды 12, а высота ее боковой грани 15. Найти объем пирамиды.

40. Длины всех ребер правильной треугольной пирамиды равны. Объем пирамиды равен $\sqrt{3}$. Найти высоту пирамиды.

41. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 16, угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $60°$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

42. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 12, а высота равна $4\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

43. По стороне основания, равной 1, определить боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

44. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см; высота пирамиды, проходящая через точку пересечения диагоналей основания, равна 4 см. Определить боковые ребра пирамиды.

45. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислить высоту пирамиды.

46. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 14 см, а длина бокового ребра 10 см. Определить площадь диагонального сечения.

47. Высота пирамиды равна 16 м; площадь основания 512 м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное основанию, содержащее 50 м^2?

48. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды одинаковы и равны 90°, а площади боковых поверхностей равны 6, 4 и 3 соответственно. Вычислить объем пирамиды.

49. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований 10 см и 2 см. Определить боковое ребро пирамиды.

50. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 4 см и 1 см. Боковое ребро 2 см. Найти высоту.

51. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны основания 3 см и 5 см. Определить диагональ усеченной пирамиды.

52. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4. Стороны основания равны 2 и 8. Найти площади диагональных сечений.

53. Площади оснований усеченной пирамиды 9 см^2 и 25 см^2. Найти площадь среднего сечения.

54. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найти полную поверхность.

55. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 дм и 12 дм; высота равна 1 дм. Найти боковую поверхность.

56. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде апофема равна 12 см, боковое ребро равно 13 см и боковая поверхность 720 см^2. Определить стороны оснований.

57. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 3 м, стороны оснований 5 м и 1 м. Найти объем.

58. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 9 см, а стороны оснований 7 см и 5 см.

59. Площади оснований усеченной пирамиды равны 245 м^2 и 80 м^2, а высота полной пирамиды равна 35 м. Определить объем усеченной пирамиды.

60. В усеченной пирамиде объем равен 76 м^3, высота 6 м и площадь одного из оснований 18 м^2. Определить площадь другого основания.

61. Угол между диагоналями осевого сечения прямого кругового цилиндра равен 90°, длина радиуса основания цилиндра $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. Вычислить объем цилиндра.

62. Высота цилиндра на 10 см больше радиуса основания, а полная поверхность равна 144π см^2. Определить радиус основания и высоту.

63. Диаметр основания цилиндра равен 1; высота равна длине окружности основания. Найти $S_{бок}$.

64. Осевое сечение цилиндра — квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

65. В прямом цилиндре с радиусом основания 26 и образующей 48 проведено сечение, параллельное оси цилиндра. На каком расстоянии от оси цилиндра расположено это сечение, если оно является квадратом?

66. Найти радиус основания прямого кругового конуса, если его образующая 5, а высота 4.

67. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найти полную поверхность конуса при $l = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$.

68. Найти объем прямого кругового конуса, высота которого равна 9, а длина окружности основания $8\sqrt{\pi}$.

69. Площадь боковой поверхности конуса равна 15π. Радиус основания 3. Найти высоту.

70. Объем конуса равен $\frac{4}{9\pi+4}$, а длина его высоты равна 3. Вычислить полную поверхность конуса.

71. Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине. Найти объем конуса, если его высота равна $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

72. Образующая конуса составляет с основанием угол α, такой, что $\mathrm{ctg}\,\alpha=\sqrt{3}$. Объем конуса равен 64π. Вычислить высоту конуса.

73. Найти площадь боковой поверхности конуса, если образующая его равна 6, а площадь основания 9π.

74. Объем конуса равен $1,5\pi$. Высота его равна 2. Найти тангенс угла между высотой и образующей конуса.

75. Образующая конуса $l=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найти объем конуса.

76. Площадь основания конуса 9π см^2; полная поверхность его 24π см^2. Найти объем конуса.

77. Высота конуса равна 6 см, а боковая поверхность 24π см^2. Определить объем конуса.

78. Наибольший угол между образующими конуса равен 60°. Найти отношение боковой поверхности к площади основания конуса.

79. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м; высота 4 м. Найти образующую.

80. Радиусы оснований усеченного конуса 11 см и 16 см, образующая 13 см. Найти расстояние от центра меньшего основания до окружности большего.

81. Высота усеченного конуса равна H. Определить образующую, если она наклонена к основанию под углом 30°.

82. Высота усеченного конуса 4 дм; радиусы его оснований 2 дм и 5 дм. Найти $S_{бок}$.

83. В усеченном конусе площади оснований 1 м^2 и 49 м^2. Площадь параллельного сечения равна их полусумме. На какие части это сечение делит высоту?

84. Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Определить площадь сечения.

85. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в $60°$ к нему. Найти площадь сечения.

86. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

87. Диаметр шара 25 см. На его поверхности дана точка A и окружность, все точки которой удалены (по прямой линии) от A на 15 см. Найти радиус этой окружности.

88. Радиусы трех шаров: 3 см, 4 см и 5 см. Найти радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

89. Внешний диаметр полого шара 18 см; толщина стенок 3 см. Найти объем стенок.

90. Найти отношение объема шара к площади его поверхности, если радиус шара равен 9.

91. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара относится к площади основания конуса как 4 : 3. Найти угол при вершине конуса.

92. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар, объем которого равен 36π. Найти высоту конуса.

93. Найти объем куба, вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

94. Около шара описан прямой параллелепипед, диагонали основания которого равны 2 и 4. Найти полную поверхность параллелепипеда.

95. В конус объемом 72 вписан шар объемом 36. Найти высоту конуса.

96. В пирамиде все боковые ребра равны 9 см, а ее высота 5 см. Определить радиус вписанного шара.

97. Равносторонний треугольник вращается вокруг перпендикуляра к стороне, проведенного через ее конец. Как относятся между собой поверхности, описываемые сторонами треугольника?

98. Треугольник со сторонами 9 см, 10 см и 17 см вращается вокруг высоты, проведенной из вершины его меньшего угла. Определить объем и поверхность полученного тела.

99. Ромб со стороной 2 и острым углом 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Определить объем тела вращения.

100. Прямоугольный треугольник с катетами 15 см и 20 см вращается вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла. Определить объем тела вращения.

Часть 2

13.1. Параллелепипед

1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 16, боковое ребро равно 4. Найти острый угол между диагоналями основания параллелепипеда, если его диагональное сечение имеет форму квадрата.

2. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 2 : 1, а диагональное сечение есть квадрат с площадью 25. Найти объем параллелепипеда.

3. В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро равно 5 см, площадь диагонального сечения 205 см^2 и площадь основания 360 см^2. Определить стороны основания.

4. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как 3 : 7 : 8, а поверхность содержит 808 см^2. Определить длины боковых ребер.

5. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 7 : 24, а площадь диагонального сечения равна 50 дм^2. Определить боковую поверхность.

6. Измерения прямоугольного параллелепипеда 2 см, 3 см и 6 см. Найти ребро такого куба, чтобы объемы этих тел относились как их поверхности.

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 35 см, а ребра относятся как 2 : 3 : 6. Определить объем параллелепипеда.

8. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда 2 м^2, 3 м^2 и 6 м^2. Найти его объем.

9. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол в 30°, а с другой в 45°. Определить объем.

10. Найти площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt[4]{2}$.

11. Площадь сечения куба поверхностью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найти длину ребра куба.

12. Ребро куба равно $5\sqrt{2}$. Найти расстояние от плоскости диагонального сечения до непересекающего его ребра.

13. В прямом параллелепипеде стороны основания равны $a = 5$, $b = 2\sqrt{2}$, угол между ними $\alpha = 45°$, меньшая диагональ параллелепипеда $d = 7$. Найти объем параллелепипеда.

14. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной 4 см и острым углом 30°. Найти объем параллелепипеда, если диагональ его боковой грани равна 5 см.

15. В прямом параллелепипеде стороны основания 10 и 17, одна из диагоналей основания равна 21. Большая диагональ параллелепипеда равна 29. Найти объем параллелепипеда.

16. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами $3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и острым углом 45°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда в 4 раза больше площади его основания. Найти высоту параллелепипеда.

17. В прямом параллелепипеде стороны основания 17 см и 28 см; одна из диагоналей основания равна 25 см, сумма площадей диагональных сечений относится к площади основания как 16 : 15. Определить площади диагональных сечений.

18. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 см и 17 см; одна из диагоналей основания равна 21 см; большая диагональ параллелепипеда равна 29 см. Определить полную поверхность параллелепипеда.

19. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 13 дм и 37 дм, а большая диагональ равна 40 дм. Боковое ребро относится к большей диагонали как 15 : 17. Определить объем параллелепипеда.

20. Найти объем прямого параллелепипеда, зная, что высота его равна $\sqrt{3}$, диагонали его составляют с основанием углы 45° и 60° и основанием служит ромб.

21. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом в 60°. Определить объем параллелепипеда.

22. Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат, сторона которого равна 1 м. Одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно 2 м. Найти объем параллелепипеда.

23. Основанием наклонного параллелепипеда служит параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм и $BD = 6$ дм. Диагональное сечение AA_1CC_1 перпендикулярно к плоскости основания и равно 1 м². Определить объем параллелепипеда.

24. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, равны соответственно 2; 4; 6 м. Углы между этими ребрами, взятыми попарно, равны $\frac{\pi}{3}$. Найти объем параллелепипеда.

13.2. Призма

25. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5, а диагональ боковой грани 2,5. Найти площадь основания призмы.

26. Определить длину бокового ребра правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна $7\sqrt{2}$ и составляет с боковой гранью угол 30°.

27. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 4 и составляет с боковым ребром угол 30°. Найти объем призмы.

28. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна $\sqrt{2}$, а ее диагональ составляет с плоскостью боковой грани угол 30°. Найти объем призмы.

29. Каждое ребро правильной треугольной призмы $a = 3$ м. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь сечения.

30. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15; высота равна 20. Найти кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающей ее диагонали призмы.

31. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9 см, а полная поверхность ее равна 144 см^2. Определить сторону основания и боковое ребро.

32. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а боковая поверхность 32 см^2. Определить объем.

33. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м^2, а расстояние между двумя противолежащими боковыми гранями 2 м. Найти объем призмы.

34. В правильной треугольной призме через сторону основания проведено сечение под углом 30° к плоскости основания. Получился треугольник с площадью, равной 8. Найти сторону основания призмы.

35. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как 24 : 7; гипотенуза основания относится к высоте как 5 : 2; боковая поверхность содержит 140 м^2. Найти объем призмы.

36. Высота прямой треугольной призмы равна 5 м, ее объем равен 24 м^3, а площади боковых граней относятся как 17 : 17 : 16. Определить стороны основания.

37. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Определить объем.

38. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $12\sqrt{2}$. Диагональ боковой грани, проходящей через катет, равна 13. Найти объем призмы.

39. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 58, 50 и 12, а боковое ребро равно большей стороне основания. Найти площадь полной поверхности.

40. В основании прямой призмы, объем которой равен 1, лежит ромб со стороной, равной 4. Площадь боковой поверхности призмы $\sqrt{2}$. Найти острый угол между сторонами ромба.

41. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами 37 см, 13 см и 40 см.

Найти расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.

42. Основанием наклонной призмы служит равнобедренный ABC, в котором $AB = AC = 10$ см и $BC = 12$ см; вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C, и ребро $AA_1 = 13$ см. Определить полную поверхность этой призмы.

43. В наклонной треугольной призме боковые ребра равны по 8 см; стороны перпендикулярного сечения относятся как 9 : 10 : 17, а его площадь равна 144 см^2. Определить боковую поверхность этой призмы.

44. В наклонной четырехугольной призме боковое ребро равно 8 см, а расстояние между последовательными боковыми ребрами 3 см, 6 см, 2 см и 7 см. Определить ее боковую поверхность.

45. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 15 см и 26 см, а боковая поверхность равновелика перпендикулярному сечению. Определить боковое ребро.

46. Основанием призмы служит треугольник со сторонами 3 см, 5 см и 7 см. Боковое ребро длиной 8 см составляет с плоскостью основания угол 60°. Определить объем призмы.

47. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м, а расстояние между ними 26 м, 25 м и 17 м. Определить ее объем.

48. В данной треугольной призме расстояние между боковыми ребрами относятся как 9 : 10 : 17; боковое ребро равно 1 м; боковая поверхность равна 6 м^2. Определить объем этой призмы.

49. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней m^2, а расстояние ее от противолежащего ребра $2a$. Найти объем призмы.

50. Основание наклонной призмы — четырехугольник $ABCD$, в котором диагонали взаимно перпендикулярны; диагональное сечение AA_1C_1C

перпендикулярно к плоскости основания. Диагональ $BD = 16$ дм, а площадь $AA_1C_1C = 250$ дм^2. Определить объем.

13.3. Пирамида

51. В правильной треугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания $60°$, а радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен $\sqrt[3]{4}$. Найти объем пирамиды.

52. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость сечения, параллельного основанию, разделила высоту пополам. Найти сторону основания пирамиды, если площадь сечения равна 36.

53. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. Найти площадь этого сечения, если боковое ребро равно 18, а диагональ основания $16\sqrt{2}$.

54. Определить высоту правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен $60°$, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно $2\sqrt{6}$.

55. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани образуют с основанием угол $45°$. Найти угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

56. Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна 10. Двугранные углы при основании пирамиды равны $60°$. Найти полную поверхность пирамиды.

57. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен $30°$. Найти объем пирамиды.

58. Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, все ребра которой равны 9. Через точку E, делящую отрезок AD в отношении $2 : 1$, считая от точки A, проведена плоскость, параллельная плоскости MCD. Вычислить площадь полученного сечения.

59. В правильном тетраэдре $MABCD$ с ребром 12 через вершину A проведена плоскость, перпендикулярная грани MBC и параллельная прямой BC. Вычислить площадь полученного сечения.

60. Середины сторон основания правильной четырехугольной пирамиды объемом 36 служат вершинами основания правильной треугольной призмы объемом 54. Найти объем общей части призмы и пирамиды.

61. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине прямые.

62. Определить сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро и боковая поверхность соответственно равны 10 см и 144 см^2.

63. В правильной четырехугольной пирамиде определить сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность 16 см^2.

64. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, основание которого равно 6, а высота — 9. Каждое боковое ребро равно 13. Вычислить объем пирамиды.

65. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине равны 90°. Длины боковых ребер равны 2; 6 и 12. Вычислить объем пирамиды.

66. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю 2 и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с основанием угол 60°. Вычислить объем пирамиды.

67. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину $2\sqrt[3]{3}$. Из трех плоских углов, образованных этим ребрами при вершине, два содержат 45°, один 60°. Найти объем пирамиды.

68. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 5 м и 4 м, а одна из диагоналей 3 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Определить $S_{\text{полн.}}$ пирамиды.

69. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к плоскости основания и равно 16 см. Определить $S_{\text{полн.}}$ пирамиды.

70. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC, где гипотенуза $AB = 26$ см, катет $AC = 24$ см; ребро MA перпендикулярно к плоскости основания ABC и равно 18 см. Определить $S_{\text{бок.}}$ пирамиды.

13.4. Усеченная пирамида

71. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 63, апофема — 65, а стороны оснований относятся как 7 : 3. Определить эти стороны.

72. Определить стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее высота равна 7 см, боковое ребро — 9 см и диагональ — 11 см.

73. Стороны основания правильной усеченной треугольной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол в 60°. Найти высоту.

74. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде объем равен 430 м^3, высота — 10 м и сторона одного основания — 8 м. Определить сторону другого основания.

75. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде апофема и стороны оснований относятся как 5 : 8 : 2, а объем равен $\frac{7}{4}$ м^3. Определить ее полную поверхность.

76. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны основания 30 м и 20 м, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.

77. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 4 и 2. Высота усеченной пирамиды $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найти ее объем.

78. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 5 и 3. Ребро усеченной пирамиды равно $\sqrt{17}$. Найти $S_{\text{полн.}}$ усеченной пирамиды.

79. Боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды равно 2, сторона большего основания — 3, высота усеченной пирамиды равна $\sqrt{2}$. Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

80. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, диагональ — 5 см. Найти площадь диагонального сечения.

81. Соответственные стороны оснований усеченной пирамиды относятся как 1 : 17, а периметр среднего сечения равен 45 м. Определить периметры оснований.

82. Площади оснований усеченной пирамиды 2 м^2 и 98 м^2. Найти площадь параллельного сечения, проведенного через середину высоты.

83. Основания усеченной пирамиды содержат 18 м^2 и 128 м^2. Определить площадь параллельного сечения, делящего высоту в отношении 2 : 3 (начиная от меньшего основания).

84. Объем усеченной пирамиды равен 1720 $м^3$, ее высота равна 20 м; сходственные стороны двух оснований относятся как 5 : 8. Определить площади оснований.

85. В треугольной усеченной пирамиде высота 10 м; стороны одного основания 27 м, 29 м и 52 м; периметр другого основания равен 72 м. Определить объем усеченной пирамиды.

13.5. Цилиндр

86. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как $\pi : 4$. Найти угол между диагоналями осевого сечения.

87. В цилиндре параллельно оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Длина оси $h = 10$ см; ее расстояние от секущей плоскости $a = 2$ см. Определить площадь сечения.

88. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в последнюю вписан цилиндр. Найти отношение объемов обоих цилиндров.

89. Высота цилиндра равна длине окружности основания. Найти диаметр основания, если объем цилиндра равен $432\pi^2$.

90. Найти высоту цилиндра, если площадь его основания равна 1, а площадь боковой поверхности равна $\sqrt{\pi}$.

91. Высота цилиндра равна 8, диагональ осевого сечения составляет угол в 45° с плоскостью основания. Найти $S_{бок.}$ цилиндра.

92. Периметр осевого сечения цилиндра равен 6. Вычислить наибольшее возможное значение объема цилиндра.

93. Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $3\sqrt[6]{2/\pi^2}$. Найти объем цилиндра.

94. Боковая поверхность цилиндра равна 25, а длина окружности основания $\frac{\pi}{4}$. Найти объем цилиндра.

95. В цилиндре площадь основания равна S и площадь осевого сечения Q. Определить полную поверхность этого цилиндра.

13.6. Конус

96. Площадь боковой поверхности конуса равна 36, расстояние от центра основания до образующей конуса равно 7. Найти объем конуса.

97. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Площадь полной поверхности равна 18. Найти площадь основания конуса.

98. Объем конуса равен 9, а радиус его основания равен $\frac{3}{\pi}$. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

99. В конусе площадь основания равна $\frac{64}{\pi}$ и площадь осевого сечения 30. Найти объем конуса.

100. Высота конуса 20, радиус его основания — 25. Найти площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от центра основания конуса равно 12.

101. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник; площадь его 9 м^2. Найти объем конуса.

102. Высота и образующая конуса относятся как 4 : 5, а объем конуса равен 96π см^3. Найти его полную поверхность.

103. Высота конуса равна 15 м, а объем равен 320π м^3. Определить полную поверхность.

104. Найти объем конуса, если его высота $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$, а расстояние от центра основания до образующей $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$.

105. Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10 см. Определить площадь сечения.

106. В конусе даны радиус основания, равный 2, и высота длиной $4\sqrt{2}$. Определить ребро вписанного в него куба.

107. Радиус основания и высота конуса равны соответственно 2 и $4\sqrt{3}$. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Определить ребро этой призмы.

108. Как относится боковая поверхность равностороннего конуса к боковой поверхности равностороннего цилиндра, имеющего такую же высоту?

109. Радиус основания конуса равен $\sqrt[6]{\frac{15}{\pi^2}}$, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен 90°. Найти объем конуса.

110. Через середину высоты конуса проведена прямая, параллельная образующей $l = 12$. Найти длину отрезка прямой, заключенного внутри конуса.

13.7. Усеченный конус

111. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 7 дм; образующая 5 дм. Найти площадь осевого сечения.

112. Площади оснований усеченного конуса 4 м^2 и 16 м^2. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найти площадь сечения.

113. Площади оснований усеченного конуса 4 и 25. Высота разделена на 3 равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найти площади сечений.

114. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая относятся как 1 : 4 : 5; высота равна 8 см. Найти $S_{бок}$.

115. Основания усеченного конуса равны 48π и 16π. Площадь его боковой поверхности равна сумме площадей оснований. Найти угол наклона образующей к плоскости основания.

116. Определить высоту усеченного конуса, если его полная поверхность равна 572π м^2, а радиусы оснований 6 м и 14 м.

117. Объем усеченного конуса равен 584π см^3, а радиусы оснований 10 см и 7 см. Определить высоту.

118. В усеченном конусе радиусы оснований и образующая относятся как 4 : 11 : 25, объем равен 181π м^3. Определить радиусы оснований и образующую.

119. Высота усеченного конуса равна 12 см, площадь среднего параллельного сечения равна 225π см^2 и объем 2800π см^3. Определить радиусы оснований.

120. Образующая усеченного конуса равна 17 см, площадь осевого сечения 420 см^2 и площадь среднего сечения равна 196π см^2. Определить объем и боковую поверхность.

13.8. Шар. Вписанный и описанные шары

121. Радиус шара равен 63 м. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

122. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара 13 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

123. Радиус шара 15 м. Вне шара дана точка M на расстоянии 10 м от его поверхности. Найти длину такой окружности на поверхности шара, все точки которой отстоят от M на 20 м.

124. Радиусы двух шаров 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Определить длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

125. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника. Радиус шара 5 см.

126. Площадь поверхности шара равна 20. На расстоянии $\dfrac{3}{2\sqrt{\pi}}$ от центра шара проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

127. Найти объем шара, если площадь его поверхности равна $16/\sqrt[3]{81\pi}$.

128. В шаре на расстоянии $d = 4$ от центра проведено сечение, площадь которого $S = 9\pi$. Найти радиус шара.

129. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех сторон его. Радиус шара 10 см. Найти расстояние его центра от плоскости ромба.

130. Две касательные к шару плоскости образуют угол в 120°, обращенный к поверхности шара. Кратчайшее расстояние по поверхности шара между точками касания 70 см. Найти радиус шара.

131. Площадь поверхности шара 5π. Шар рассечен плоскостью. Длина окружности сечения шара равна π. Найти расстояние от центра шара до секущей плоскости.

132. В шар вписан конус. Найти высоту конуса, если радиус шара 5, а радиус основания конуса — 4.

133. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.

134. Конус вписан в шар, радиус которого равен 17. Найти радиус основания конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен 30°.

135. Найти площадь поверхности шара, описанного около конуса, у которого радиус основания $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, а высота $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

136. Высота конуса 8, образующая — 10. Найти радиус вписанного шара.

137. Радиус шара 9 дм. В него вписана правильная четырехугольная призма, высота которой 14 дм. Найти сторону основания призмы.

138. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 4 м, высота — 4 м. Найти радиус описанного шара.

139. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3 дм. Одно из боковых ребер равно 2 дм и перпендикулярно к основанию. Найти радиус описанного шара.

140. Стороны оснований правильной четырехугольной пирамиды 7 дм и 1 дм. Боковое ребро наклонено к основанию под углом в 45°. Найти радиус описанного шара.

141. В правильной треугольной усеченной пирамиде высота 17 см, радиусы окружностей, описанных около оснований, 5 см и 12 см. Найти радиус описанного шара.

142. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 4 м; высота 7 м. Найти радиус описанного шара.

143. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса, описанного около шара, если его образующая равна 13 см, а радиус шара — 6 см.

144. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, высота которой делится центром шара на две части: в 4 см и 5 см. Найти объем пирамиды.

145. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см. Высота призмы 24 см. Найти радиус описанного шара.

13.9. Тела вращения

146. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 3 см. Определить объем и поверхность тела вращения.

147. Стороны треугольника 9 см, 10 см и 17 см. Треугольник вращается около большей своей высоты. Определить объем и поверхность тела вращения.

148. Треугольник, стороны которого относятся между собой как 13 : 14 : 15, вращается вокруг середины стороны. В полученное тело вращения вписан шар. Как относится объем шара к объему тела вращения?

149. Равнобедренная трапеция с параллельными сторонами в 7 см и 17 см и площадью 144 см^2 вращается около средней высоты. Определить объем полученного тела.

150. Треугольник с углом в 60°, заключенным между сторонами 8 см и 15 см, вращается вокруг большей из этих сторон. Определить объем и поверхность тела вращения.

151. Квадрат со сторонами $\sqrt[6]{\dfrac{9}{8\pi^2}}$ вращается вокруг диагонали. Найти объем полученной фигуры вращения.

152. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны $a = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$. Найти объем тела вращения.

153. Ромб с диагоналями $\sqrt{15}$ и $\dfrac{60}{\pi}$ вращается вокруг большей диагонали. Найти объем полученной фигуры вращения.

154. Равнобедренный треугольник с углом при вершине в 120° и боковой стороной a вращается вокруг боковой стороны. Определить объем и поверхность тела вращения.

155. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, $\angle BAD = 60°$, $AB = 8$ см, $AD = 5$ см и $BC = CD$. Определить объем тела, образуемого вращением этой трапеции вокруг стороны AD.

§ 14. Элементы аналитической геометрии и векторной алгебры

14.1. Задачи с решениями

Пример 1. При каком значении z векторы $\vec{a}\,\{4;\,0;\,2\}$ и $\vec{b}\,\{-6;\,8;\,z\}$ перпендикулярны?

Решение.

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot(-6)+0\cdot8+2\cdot z=0,$

$$-24+2z=0,\ 2z=24,\ z=12.$$

Ответ: $z = 12$.

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=-4\vec{i}+6\vec{j}-5\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$.

Решение.

Запишем исходные векторы в координатной форме:

$$\vec{a}\{-4;\ 6;\ -5\},\ \vec{b}\{2;\ -1;\ 3\}.$$

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\cdot2+6\cdot(-1)+(-5)\cdot3=-8-6-15=-29.$

Ответ: -29.

Пример 3. При каком значении m векторы $\vec{a}\{-4;\ 2;-1\}$ и $\vec{b}\{m;\ -8;\ 4\}$ параллельны?

Решение.

Известно, что если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (параллельны), то необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, такое что $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Следовательно, имеем систему:

$$\begin{cases}-4=\lambda m,\\ 2=-8\lambda,\\ -1=4\lambda;\end{cases}\quad \lambda=-\frac{1}{4};\ m=-\frac{4}{\lambda}=-\frac{4}{-1/4}=16.$$

Итак $m = 16$.

Ответ: $m = 16$.

Пример 4. Найти угол между векторами $\vec{a}\{2;\ -2;\ 0\}$ и $\vec{b}\{3;\ 0;\ -3\}$.

Решение.

Используем формулу:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot 3+(-2)\cdot 0+0\cdot 3}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{9+0+9}}=\frac{6}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2},\text{ тогда } \varphi = 60°.$$

Ответ: 60°.

Пример 5. Векторы $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+5\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

Решение.

Так как AM — медиана треугольника ABC, то M — середина стороны BC, тогда $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, или

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\{-4+3;0-4;5+2\}=\{-\frac{1}{2};-2;\frac{7}{2}\},\text{ тогда}$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-2)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{50}{4}+4}=\frac{\sqrt{66}}{2}.$$

Ответ: $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{66}.$

Пример 6. Даны векторы $\vec{a}\,\{-2;\ 4;\ 0\}$, $\vec{b}\,\{0;\ -10;\ -4\}$ и $\vec{c}\,\{4;\ 2;\ -6\}$. Найти координаты вектора

$$\vec{p}=6\vec{c}-4\vec{b}+2\vec{a}.$$

Решение.

$$6\vec{c}\,\{6\cdot 4;\ 6\cdot 2;\ 6\cdot(-6)\}=\{124;\ 12;\ -36\},$$

$$-4\vec{b}\,\{-4\cdot 0;\ -4\cdot(-10);\ -4\cdot(-4)\}=\{0;\ 40;\ 16\},$$

$$2\vec{a}\,\{2\cdot(-2);\ 2\cdot 4;\ 2\cdot 0\}=\{-4;\ 8;\ 0\}.$$

Пусть координаты вектора $\vec{p}\,\{x;\ y;\ z\}$, тогда

$$x=24+0-4=20,\ y=12+40+8=60,$$

$$z=-36+16+0=-20.$$

Итак $\vec{p}\,\{20;\ 60;\ -20\}$.

Ответ: $\vec{p}\,\{20;\ 60;\ -20\}$.

Пример 7. Компланарны ли векторы

$$\vec{a}\,\{2;\,0;\,4\},\ \vec{b}\,\{2;\,2;\,-2\}\ \text{и}\ \vec{c}\,\{-2;\,0;\,4\}?$$

Решение.

Заметим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не компланарны, так как координаты одного из них не пропорциональны координатам другого.

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. В противном случае не компланарны.

Следовательно, нам надо установить, существуют ли числа x и y такие, при которых выполняется равенство $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, или в координатах:

$$-2 = 2x + 2y,\ 4 = 0 + 2y,\ 8 = 4x - 2y.$$

Имеем систему: $\begin{cases} x + y = -1, \\ y = 2, \\ 4x - 2y = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3, \\ y = 2, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$

Так как значения x и y не удовлетворяют уравнению $2x - y = 4$, то это означает, что вектор $\vec{c}$ нельзя разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны.

Ответ: Не компланарны.

Пример 8. Середина отрезка MN лежит на оси Ox. Найти m и n, если $M(-2;\,m;\,3)$, $N(4;\,-3;\,n)$.

Решение.

Пусть точка C — середина отрезка MN. По условию точка C лежит на оси Ox, тогда $C(x;\,0;\,0)$. Используя формулы для нахождения ординаты и аппликаты середины отрезка, находим:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{m-3}{2}, \\ 0 = \dfrac{3+n}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} m - 3 = 0, \\ 3 + n = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m = 3, \\ n = -3. \end{cases}$$

Ответ: $m = 3$, $n = -3$.

Пример 9. Даны точки $A(0; -1; 2)$, $D(-2; 1; 3)$ и $C(6; -2; 1)$. Найти точку, равноудаленную от этих точек и расположенную на координатной плоскости Oxy.

Решение.

Так как искомая точка M находится в плоскости Oxy, то $z = 0$, т. е. имеем $M(x; y; 0)$. Тогда:

$$MA = \sqrt{x^2 + (-1-y)^2 + 2^2},$$

$$MB = \sqrt{(-2-x)^2 + (1-y)^2 + 3^2},$$

$$MC = \sqrt{(6-x)^2 + (-2-y)^2 + (1-0)^2}.$$

Согласно условию $MA = MB = MC$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + (-1-y)^2 + 4 = (-2-x)^2 + (1-y)^2 + 9, \\ x^2 + (-1-y)^2 + 4 = (6-x)^2 + (-2-y)^2 + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 4y = -9 \\ 12x - 2y = 36 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot(-2); \end{matrix} \right. \quad \begin{cases} 4x - 4y = -9, \\ -24x + 4y = -72. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, находим:

$$4x - 24x = -81,\ -20x = -81,\ x = \frac{81}{20} = 4\frac{1}{20}.$$

Из уравнения $12x - 2y = 36$, $y = 6x - 18$, или

$$y = 6 \cdot \frac{81}{20} - 18 = \frac{243}{10} - 18 = \frac{63}{10} = 6\frac{3}{10}.$$

Итак, искомая точка $M\left(4\frac{1}{23}; 6\frac{3}{10}; 0\right)$.

Ответ: $\left(4\frac{1}{23}; 6\frac{3}{10}; 0\right)$.

Пример 10. Найти сумму значений x и y, при которых векторы $\vec{a}\,\{4; 3; -x\}$ и $\vec{b}\,\{y; 15; 30\}$ коллинеарны.

Решение.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{4}{y}=\frac{3}{15}=\frac{-x}{30}, \text{ или } \frac{4}{y}=\frac{3}{15}, \text{ откуда } y=\frac{4\cdot 15}{3}=20$$

$$\text{и } \frac{3}{15}=\frac{-x}{30}, \text{ откуда } x=-6.$$

Тогда $x + y = -6 + 20 = 14$.

Ответ: 14.

14.2. Задачи для самостоятельного решения

Часть 1

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ $\{2; 4; 1\}$ и $\vec{b}$ $\{3; 5; 7\}$.
2. Найти длину вектора $\vec{a}$ $\{5; 12\}$.
3. При каком значении m векторы $\vec{b}$ $\{5; 6; 3\}$ и $\vec{b}$ $\{m; 3; 4\}$ перпендикулярны?
4. При каком значении x векторы $\vec{a}$ $\{-1; 1; 2\}$ и $\vec{b}$ $\{x^2; x-2; x^2-12\}$ коллинеарны?
5. Найти значение m, при котором точка $M(0; m)$ равноудалена от точек $A(-3; 5)$ и $B(6; 4)$.
6. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен 120°. Определить длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 3\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$ и $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.
7. Даны векторы $\vec{a}$ $\{6; 2; 1\}$ и $\vec{b}$ $\{0; -1; 2\}$. Найти длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.
8. Найти наибольший угол треугольника, вершины которого расположены в точках $M(1; 2)$, $N(1; 4)$, $K(3; 2)$.
9. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Найти координаты вершины D.

10. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если угол между ними равен 45° и их скалярное произведение равно 42.
11. Даны векторы $\vec{a}\,\{m;\ 2;\ n\}$, $\vec{b}\,\{2;\ 3;\ -2\}$ и $\vec{c}\,\{1;\ -4;\ 0\}$. Вектор $\vec{a}$ перпендикулярен двум другим векторам. Найти произведение $m \cdot n$.
12. Найти сумму координат середины отрезка MN, если $M(3;\ -1;\ 5)$, $N(5;\ 1;\ 1)$.
13. Найти сумму квадратов сторон треугольника, если даны координаты его вершин: $A(4;\ 1;\ 2)$, $B(1;\ 3;\ 4)$, $C(5;\ 2;\ 1)$.
14. Даны векторы $\vec{a}\{4; 2; 1\}$, $\vec{b}\{1; 3; 2\}$. Найти скалярное произведение вектора $\vec{b}$ на вектор $3\vec{a} - \vec{b}$.
15. Найти угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$, если $A(3;\ 3)$, $B(2;\ 6)$, $C(1;\ 5)$, $D(6;\ 2)$.

Часть 2

1. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$, если $\vec{a}\,\{-4;\ 2;\ 4\}$, $\vec{b}\,\{2;\ -2;\ 0\}$.
2. Даны векторы $\vec{a}\,\{m;\ 2;\ n\}$, $\vec{b}\,\{2;\ 3;\ -2\}$ и $\vec{c}\,\{1;\ -4;\ 0\}$. Вектор $\vec{a}$ перпендикулярен двум другим векторам. Найти произведение $m \cdot n$.
3. Даны три вершины $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 4)$, $C(2;\ 5)$ параллелограмма $ABCD$. Найти сумму координат вершины D.
4. Найти длину вектора $\vec{a}\,\{x;\ 3;\ y\}$, перпендикулярного векторам $\vec{b}\,\{-1;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{c}\,\{2;\ -2;\ -1\}$.
5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $M(-2;\ 7)$. Найти длину диагонали AC, если $A(1;\ 3)$.

6. Найти координату x точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1;\ 2;\ 3)$ и $B(-3;\ 3;\ 2)$.

7. Дан ΔABC, где $A(3;\ -2;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 2)$, $C(1;\ 2;\ 5)$. Найти угол, образованный медианой BD и основанием AC.

8. Найти площадь четырехугольника, вершины которого расположены в точках $A(0;\ 0)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ 4)$, $D(3;\ 1)$.

9. Даны четыре точки $A(-1;\ 0;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 3)$, $C(0;\ 2;\ -1)$ и $D(4;\ x;\ y)$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Найти длину вектора $\overrightarrow{CD}$.

10. Даны три точки M, A, и B, не лежащие на одной прямой. Четвертая точка C взята так, что $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$. Выразить вектор $\overrightarrow{MC}$ через векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$.

11. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ и $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

12. Дан ΔABC; O — точка пересечения его медиан, $\overrightarrow{AC} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Выразить вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

13. Даны три вектора $\vec{a}\,\{3;\ 4;\ 2\}$, $\vec{b}\,\{1;\ 5;\ 2\}$ и $\vec{c}\,\{2;\ 3;\ 4\}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $\vec{x} \cdot \vec{a} = 8$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 3$.

14. Найти скалярное произведение $\left(\vec{a}+3\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=3$, $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\angle\left(\vec{b},\vec{c}\right)=60°$, $\vec{a}\perp\vec{c}$.

15. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}\{-1;0;-1\}$, $\vec{b}\{0;-1;1\}$.

16. Найти вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b}\,\{1;\ -2;\ 0\}$ и имеющий длину $|\vec{a}|=\sqrt{5}$.

17. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}\{2; 2; 1\}$ и $\vec{b}\{2; -1; 2\}$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $|\vec{c}| = 1$.

18. Дан треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 2)$. Найти квадрат длины высоты BD треугольника ABC.

19. Даны векторы $\vec{a}\{3; 1; 4\}$, $\vec{b}\{k; 7; 2\}$. Найти такое значение k, чтобы векторы были перпендикулярны.

20. Даны координаты вершин треугольника: $A(2; 1)$, $B(3; k)$, $C(4; 2)$. Найти наименьшее значение k, при котором длины двух сторон с общей вершиной A равны.

Глава 7

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

§ 15. Базовый уровень (часть В)

B4

1. В равнобедренном ΔABC с основанием AC боковая сторона $AB = 42$, а $\cos \angle A = \dfrac{\sqrt{195}}{14}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

2. В равнобедренном ΔABC с основанием AC боковая сторона $AB = 30$, а $\cos \angle A = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

3. В равнобедренном ΔABC с основанием AC боковая сторона $AB = 15$, а высота, проведенная к основанию, равна 9. Найдите $\cos \angle A$.

4. В равнобедренном ΔABC с основанием AC боковая сторона $AB = 25$, а высота, проведенная к основанию, равна 7. Найдите $\cos \angle A$.

5. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\cos \angle A = \dfrac{3}{5}$. Найдите высоту CD.

6. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 22$, $\cos \angle A = \dfrac{11}{61}$. Найдите высоту CD.

7. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos \angle A = \dfrac{12}{37}$. Найдите высоту CD.

8. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 32$, $\cos\angle A = \dfrac{16}{65}$. Найдите высоту CD.

9. В ΔABC $AC = BC = 10$, $AB = 12$. Найдите $\cos\angle A$.

10. В ΔABC $AC = BC = 20$, $AB = 16$. Найдите $\cos\angle A$.

11. В ΔABC $AC = BC = 40$, $AB = 60$. Найдите $\cos\angle A$.

12. В ΔABC $AC = BC = 20$, $AB = 36$. Найдите $\cos\angle A$.

13. В ΔABC $AC = BC = \sqrt{41}$, $AB = 10$. Найдите $\operatorname{tg}\angle A$.

14. В ΔABC $AC = BC = \sqrt{74}$, $AB = 10$. Найдите $\operatorname{tg}\angle A$.

15. В ΔABC $AC = BC = \sqrt{97}$, $AB = 8$. Найдите $\operatorname{tg}\angle A$.

16. В ΔABC $AC = BC = 5\sqrt{41}$, $AB = 40$. Найдите $\operatorname{tg}\angle A$.

17. В ΔABC $AC = BC = 8$, $AB = 8\sqrt{3}$. Найдите $\sin\angle A$.

18. В ΔABC $AC = BC = 12$, $AB = 12\sqrt{3}$. Найдите $\sin\angle A$.

19. В ΔABC $AC = BC = 10$, $AB = 2\sqrt{51}$. Найдите $\sin\angle A$.

20. В ΔABC $AC = BC = 24$, $AB = 12\sqrt{7}$. Найдите $\sin\angle A$.

21. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 24$, высота $AD = 6$. Найдите $\sin\angle A$.

22. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота $AD = 6$. Найдите $\sin\angle A$.

23. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 30$, высота $AD = 6$. Найдите $\sin\angle A$.

24. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 25$, высота $AD = 15$. Найдите $\sin\angle A$.

25. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 25$, высота $AD = 24$. Найдите $\cos\angle A$.

26. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 5$, высота $AD = 2\sqrt{6}$. Найдите $\cos\angle A$.

27. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 10$, высота $AD = \sqrt{91}$. Найдите $\cos \angle A$.

28. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 20$, высота $AD = 8\sqrt{6}$. Найдите $\cos \angle A$.

29. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 18$, AD — высота, $BD = 9$. Найдите $\cos \angle A$.

30. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 25$, AD — высота, $BD = 15$. Найдите $\cos \angle A$.

31. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 30$, AD — высота, $BD = 24$. Найдите $\cos \angle A$.

32. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 16$, AD — высота, $BD = 8$. Найдите $\cos \angle A$.

33. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 30$, высота $CD = 18$. Найдите $\sin \angle ACB$.

34. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 20$, высота $CD = 16$. Найдите $\sin \angle ACB$.

35. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 25$, высота $CD = 10$. Найдите $\sin \angle ACB$.

36. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 15$, высота $CD = 3$. Найдите $\sin \angle ACB$.

37. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AC = 50$, CD — высота, $AD = 48$. Найдите $\sin \angle ACB$.

38. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AC = 10$, CD — высота, $AD = 2\sqrt{21}$. Найдите $\sin \angle ACB$.

39. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AC = 6$, CD — высота, $AD = 3\sqrt{3}$. Найдите $\sin \angle ACB$.

40. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AC = 45$, CD — высота, $AD = 9\sqrt{21}$. Найдите $\sin \angle ACB$.

41. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 10$, CD — высота, $AD = 6$. Найдите $\sin \angle ACB$.

42. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 16$, CD — высота, $AD = 8\sqrt{3}$. Найдите $\sin \angle ACB$.

43. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 30$, CD — высота, $AD = 9\sqrt{11}$. Найдите $\sin \angle ACB$.

44. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 20$, CD — высота, $AD = 16$. Найдите $\sin \angle ACB$.

45. В ΔABC $AC = BC = 20$, $AB = 4\sqrt{51}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

46. В ΔABC $AC = BC = 15$, $AB = 12\sqrt{6}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

47. В ΔABC $AC = BC = 30$, $AB = 6\sqrt{91}$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

48. В ΔABC $AC = BC = 20$, $AB = 24$. Найдите синус внешнего угла при вершине B.

49. В ΔABC $AC = BC = 15$, $AB = 18$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

50. В ΔABC $AC = BC = 16$, $AB = 16\sqrt{3}$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

51. В ΔABC $AC = BC = 20$, $AB = 10\sqrt{15}$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

52. В ΔABC $AC = BC = 20$, $AB = 12\sqrt{11}$. Найдите синус внешнего угла при вершине A.

53. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AB = 45$, высота $CD = 27$. Найдите $\cos \angle ABC$.

54. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AB = 18$, высота $CD = 9\sqrt{3}$. Найдите $\cos \angle ABC$.

55. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AB = 20$, высота $CD = 2\sqrt{19}$. Найдите $\cos \angle ABC$.

56. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, $AB = 35$, высота $CD = 28$. Найдите $\cos \angle ABC$.

57. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, CD — высота, $AB = 50$, $BD = 30$. Найдите $\sin \angle ABC$.

58. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, CD — высота, $AB = 40$, $BD = 24$. Найдите $\sin \angle ABC$.

59. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, CD — высота, $AB = 25$, $BD = 10\sqrt{6}$. Найдите $\sin \angle ABC$.

60. В тупоугольном ΔABC $AB = BC$, CD — высота, $AB = 20$, $BD = 2\sqrt{51}$. Найдите $\sin \angle ABC$.

61. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\cos \angle A = 0{,}6$. Найдите высоту CD.

62. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos \angle A = \dfrac{12}{13}$. Найдите высоту CD.

63. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 10$, $\cos \angle A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Найдите высоту CD.

64. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 16$, $\cos \angle A = \dfrac{8}{\sqrt{89}}$. Найдите высоту CD.

65. В ΔABC $AC = BC = 12$, $\sin \angle B = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$. Найдите AB.

66. В ΔABC $AC = BC = 18$, $\sin \angle B = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. Найдите AB.

67. В ΔABC $AC = BC = 20$, $\sin \angle B = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите AB.

68. В ΔABC $AC = BC = 32$, $\sin \angle B = \dfrac{\sqrt{55}}{8}$. Найдите AB.

69. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\sin \angle A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите AC.

70. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\sin \angle A = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$. Найдите AC.

71. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 42$, $\sin \angle A = \dfrac{\sqrt{95}}{12}$. Найдите AC.

72. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 20$, $\sin \angle A = \dfrac{\sqrt{299}}{18}$. Найдите AC.

73. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 30$, $AC = 6\sqrt{21}$. Найдите $\sin \angle A$.

74. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 10$, $AC = 8$. Найдите $\sin \angle A$.

75. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 20$, $AC = 2\sqrt{19}$. Найдите $\sin \angle A$.

76. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 30$, $AC = 3\sqrt{51}$. Найдите $\sin \angle A$.

77. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{11}{13}$, $AC = 8\sqrt{3}$. Найдите AB.

78. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{7}{11}$, $AC = 12\sqrt{2}$. Найдите AB.

79. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{5}{7}$, $AC = 6\sqrt{6}$. Найдите AB.

80. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{7}{9}$, $AC = 6\sqrt{6}$. Найдите AB.

81. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{20}{29}$, $AB = 58$. Найдите AC.

82. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{5}{7}$, $AB = 14\sqrt{6}$. Найдите AC.

83. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{7}{8}$, $AB = 4\sqrt{15}$. Найдите AC.

84. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{8}{9}$, $AB = 18\sqrt{17}$. Найдите AC.

85. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 25$, $AC = 20$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

86. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 39$, $AC = 15$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

87. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 13$, $AC = 5$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

88. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 104$, $AC = 40$. Найдите $\operatorname{tg} \angle A$.

89. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{23}{25}$, $AC = 8\sqrt{6}$. Найдите AB.

90. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{11}{25}$, $AC = 6\sqrt{14}$. Найдите AB.

91. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{5}{9}$, $AC = 6\sqrt{14}$. Найдите AB.

92. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \frac{13}{14}$, $AC = 6\sqrt{3}$. Найдите AB.

93. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = 24$, $\sin \angle A = \frac{5}{13}$. Найдите BC.

94. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = 30$, $\sin \angle A = \frac{8}{17}$. Найдите BC.

95. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = 2\sqrt{29}$, $\sin \angle A = \frac{14}{15}$. Найдите BC.

96. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = 2\sqrt{15}$, $\sin \angle A = \frac{7}{8}$. Найдите BC.

97. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 15$, $\cos \angle B = \frac{3}{5}$. Найдите AC.

98. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 34$, $\cos \angle B = \frac{8}{17}$. Найдите AC.

99. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 39$, $\cos \angle B = \frac{5}{13}$. Найдите AC.

100. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 25$, $\cos \angle B = \frac{4}{5}$. Найдите AC.

101. В ΔABC $\angle C = 90°$, $BC = 18$, $AB = 30$. Найдите $\sin \angle B$.

102. В ΔABC $\angle C = 90°$, $BC = 4\sqrt{91}$, $AB = 40$. Найдите $\sin \angle B$.

103. В ΔABC $\angle C = 90°$, $BC = 12$, $AB = 15$. Найдите $\sin \angle B$.

104. В ΔABC $\angle C = 90°$, $BC = 3\sqrt{19}$, $AB = 30$. Найдите $\sin \angle B$.

105. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 13$, $AC = 5$. Найдите $\mathrm{tg} \angle A$.

106. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 35$, $AC = 28$. Найдите $\mathrm{tg} \angle A$.

107. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 78$, $AC = 30$. Найдите $\mathrm{tg} \angle A$.

108. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 167$, $AC = 45$. Найдите $\mathrm{tg} \angle A$.

109. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 80$, $BC = 48$. Найдите $\cos \angle A$.

110. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 50$, $BC = 30$. Найдите $\cos \angle A$.

111. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 25$, $BC = 15$. Найдите $\cos \angle A$.

112. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 45$, $BC = 27$. Найдите $\cos \angle A$.

113. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 4\sqrt{5}$, $AC = 4$. Найдите tg $\angle A$.

114. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 4\sqrt{61}$, $AC = 20$. Найдите tg $\angle A$.

115. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 6\sqrt{13}$, $AC = 12$. Найдите tg $\angle A$.

116. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 4\sqrt{41}$, $AC = 20$. Найдите tg $\angle A$.

117. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Найдите tg $\angle A$.

118. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$. Найдите tg $\angle A$.

119. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите tg $\angle A$.

120. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$. Найдите tg $\angle A$.

121. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$. Найдите sin $\angle A$.

122. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{4}{3}$. Найдите sin $\angle A$.

123. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{9}{\sqrt{19}}$. Найдите sin $\angle A$.

124. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$. Найдите sin $\angle A$.

125. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 50$, $AD = 48$. Найдите cos $\angle B$.

126. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 20$, $AD = 16$. Найдите cos $\angle B$.

127. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 12$, $AD = 3\sqrt{7}$. Найдите cos $\angle B$.

128. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 45$, $AD = 9\sqrt{21}$. Найдите $\cos \angle B$.

129. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $BC = 40$, $CD = 32$. Найдите $\sin \angle A$.

130. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $BC = 30$, $CD = 24$. Найдите $\sin \angle A$.

131. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $BC = 24$, $CD = 12\sqrt{3}$. Найдите $\sin \angle A$.

132. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $BC = 12$, $CD = 3\sqrt{15}$. Найдите $\sin \angle A$.

133. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 4\sqrt{34}$, $BC = 12$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

134. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 6\sqrt{13}$, $BC = 18$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

135. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 8\sqrt{5}$, $BC = 8$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

136. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 6\sqrt{65}$, $BC = 42$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

137. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{3}{5}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

138. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{7}{25}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

139. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

140. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = \frac{4}{5}$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

141. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = 0{,}28$, $BC = 48$. Найдите AB.

142. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = 0{,}4$, $BC = 6\sqrt{21}$. Найдите AB.

143. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = 0{,}75$, $BC = 3\sqrt{7}$. Найдите AB.

144. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle A = 0{,}6$, $BC = 40$. Найдите AB.

145. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = 0{,}8$, $AC = 9$. Найдите AB.

146. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = 0{,}6$, $AC = 32$. Найдите AB.

147. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = 0{,}5$, $AC = 12\sqrt{3}$. Найдите AB.

148. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = 0{,}25$, $AC = 2\sqrt{15}$. Найдите AB.

149. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{8}{15}$, $BC = 2$. Найдите AB.

150. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{4}$, $BC = 6$. Найдите AB.

151. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $BC = 15$. Найдите AB.

152. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{20}}{5}$, $BC = 6$. Найдите AB.

153. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 49$, $\cos \angle A = \frac{5}{7}$. Найдите AD.

154. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 36$, $\cos \angle A = \frac{5}{6}$. Найдите AD.

155. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 27$, $\cos \angle A = \frac{2}{3}$. Найдите AD.

156. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 48$, $\cos \angle A = \frac{3}{4}$. Найдите AD.

157. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 98$, $\sin \angle A = \frac{4}{7}$. Найдите BD.

158. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 24$, $\sin \angle A = \frac{3}{4}$. Найдите BD.

159. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 36$, $\sin \angle A = \frac{2}{3}$. Найдите BD.

160. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AB = 32$, $\sin \angle A = \frac{3}{4}$. Найдите BD.

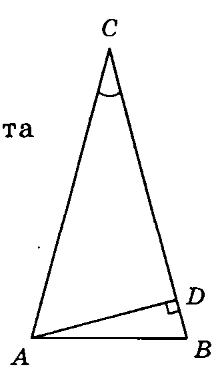
161. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AD = 49$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{7}$. Найдите BD.

162. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AD = 25$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{2}{5}$. Найдите BD.

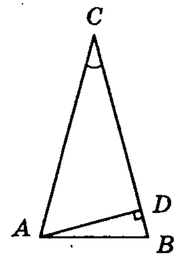
163. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AD = 12$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{2}$. Найдите BD.

164. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AD = 40$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{4}$. Найдите BD.

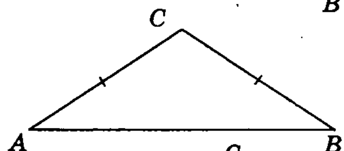
165. В ΔABC $AC = BC$, высота $AD = 12$, $\angle C = 30°$. Найдите AC.



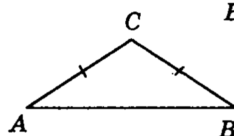
166. В ΔABC $AC = BC$, высота $AD = 9$, $\angle C = 30°$. Найдите AC.



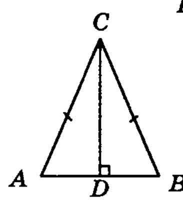
167. В ΔABC $AC = BC$, $\angle C = 120°$, $AC = 8\sqrt{3}$. Найдите AB.



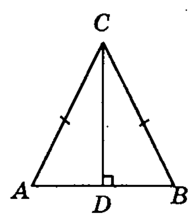
168. В ΔABC $AC = BC$, $\angle C = 120°$, $AC = 4\sqrt{3}$. Найдите AB.



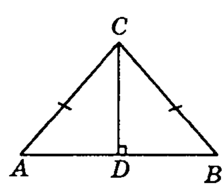
169. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 12$, $\cos \angle A = \frac{3}{5}$. Найдите AC.



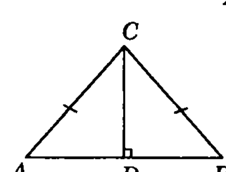
170. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 18$, $\cos \angle A = \frac{5}{6}$. Найдите AC.



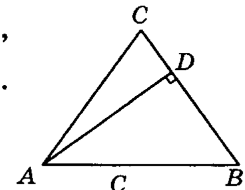
171. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 40$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{4}$. Найдите высоту CD.



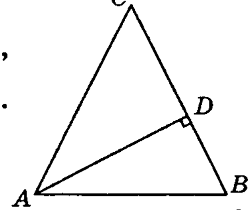
172. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 56$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{5}{7}$. Найдите высоту CD.



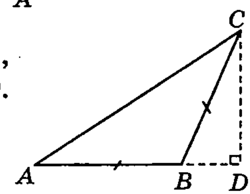
173. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 25$, $\cos \angle A = \dfrac{3}{5}$, AD — высота. Найдите BD.



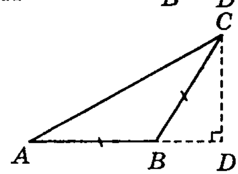
174. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 20$, $\cos \angle A = \dfrac{3}{4}$, AD — высота. Найдите BD.



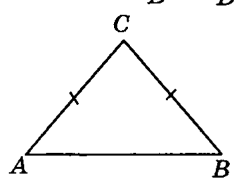
175. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 15$, $\sin \angle C = 0{,}6$, CD — высота. Найдите AD.



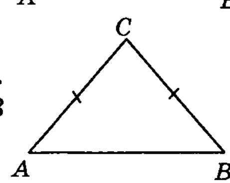
176. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 20$, $\sin \angle C = 0{,}8$, CD — высота. Найдите AD.



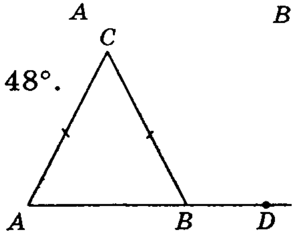
177. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 36$. Синус внешнего угла при вершине B равен 0,8. Найдите AC.



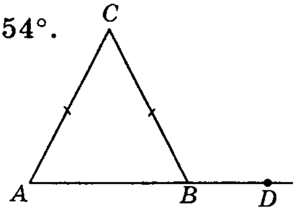
178. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 24$. Синус внешнего угла при вершине B равен 0,6. Найдите AC.



179. В ΔABC $AC = BC$, $\angle C = 48°$. Найдите внешний угол CBD.



180. В ΔABC $AC = BC$, $\angle C = 54°$. Найдите внешний угол CBD.



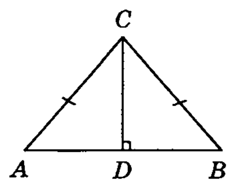
181. Один из углов равнобедренного треугольника равен 96°. Найдите один из других его углов.

182. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите один из других его углов.

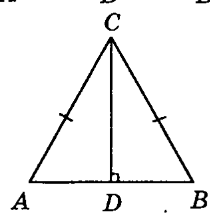
183. Один угол равнобедренного треугольника на 93° больше другого. Найдите меньший угол.

184. Один угол равнобедренного треугольника на 96° больше другого. Найдите меньший угол.

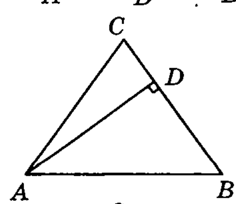
185. В ΔABC $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Найдите $\sin \angle A$.



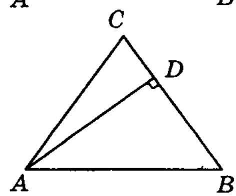
186. В ΔABC $AC = BC = 16$, $AB = 8\sqrt{7}$. Найдите $\sin \angle A$.



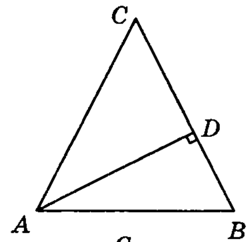
187. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 20$, высота $AD = 16$. Найдите $\sin \angle A$.



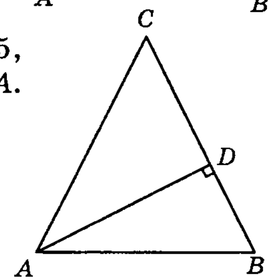
188. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 20$, высота $AD = 12$. Найдите $\sin \angle A$.



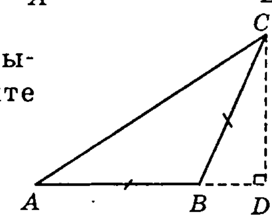
189. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 30$, AD — высота, $BD = 24$. Найдите $\sin \angle A$.



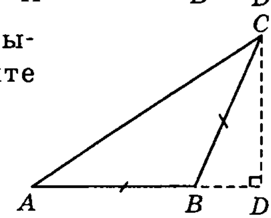
190. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 15$, AD — высота, $BD = 9$. Найдите $\sin \angle A$.



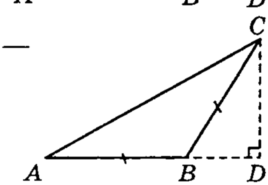
191. В ΔABC $AB = BC$, CD — высота, $AB = 20$, $BD = 12$. Найдите $\sin \angle ABC$.



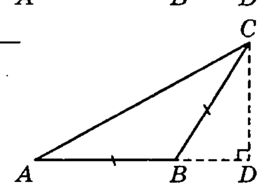
192. В ΔABC $AB = BC$, CD — высота, $AB = 20$, $BD = 16$. Найдите $\sin \angle ABC$.



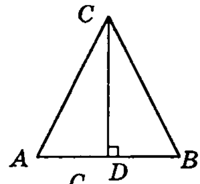
193. В ΔABC $AB = BC$, $CD = 14$ — высота, $AD = 28$. Найдите $\operatorname{tg} \angle ACB$.



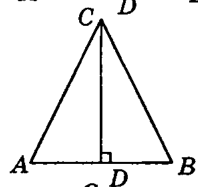
194. В ΔABC $AB = BC$, $CD = 32$ — высота, $AD = 40$. Найдите $\operatorname{tg} \angle ACB$.



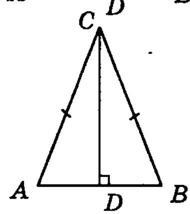
195. В ΔABC $AB = BC = AC = 6\sqrt{3}$. Найдите высоту CD.



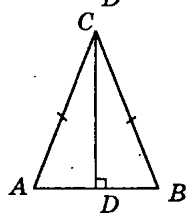
196. В ΔABC $AB = BC = AC = 10\sqrt{3}$. Найдите высоту CD.



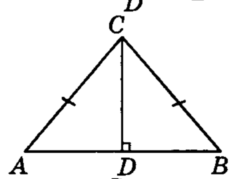
197. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 36$, $\cos \angle A = 0{,}6$. Найдите AC.



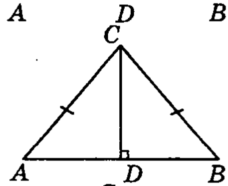
198. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 24$, $\cos \angle A = 0{,}8$. Найдите AC.



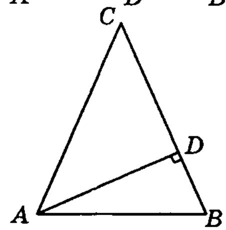
199. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 16$, $\operatorname{tg} \angle A = 0{,}75$. Найдите высоту CD.



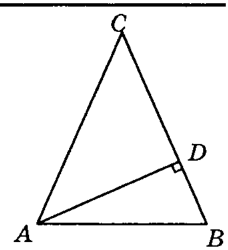
200. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 42$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{7}$. Найдите высоту CD.



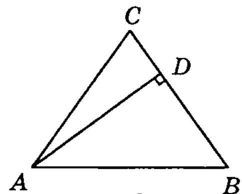
201. В ΔABC $AC = BC = 6\sqrt{2}$, $\angle C = 45°$. Найдите высоту AD.



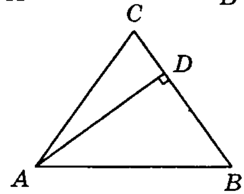
202. В ΔABC $AC = BC = 10\sqrt{3}$, $\angle C = 60°$. Найдите высоту AD.



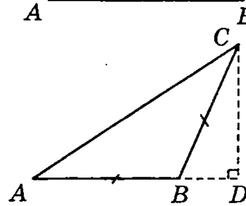
203. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 30$, $\cos \angle A = 0{,}8$. Найдите высоту AD.



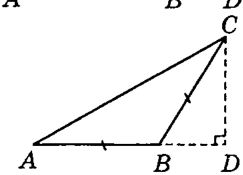
204. В ΔABC $AC = BC$, $AB = 15$, $\cos \angle A = 0{,}6$. Найдите высоту AD.



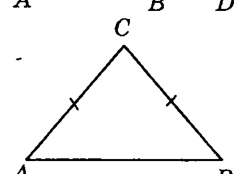
205. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 20$, $\cos \angle C = 0{,}8$, CD — высота. Найдите AD.



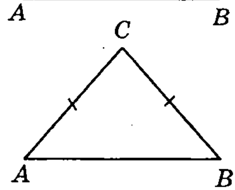
206. В ΔABC $AB = BC$, $AC = 30$, $\cos \angle C = 0{,}6$, CD — высота. Найдите AD.



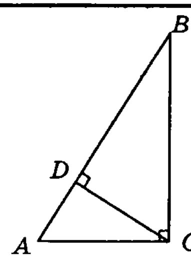
207. В ΔABC $AC = BC$, $\angle C = 120°$, $AB = 10\sqrt{3}$. Найдите AC.



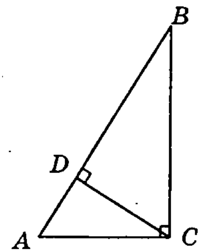
208. В ΔABC $AC = BC$, $\angle C = 120°$, $AB = 6\sqrt{3}$. Найдите AC.



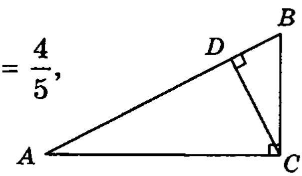
209. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $\angle A = 60°$, $AB = 24$. Найдите AD.



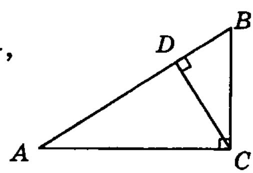
210. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $\angle A = 60°$, $AB = 36$. Найдите AD.



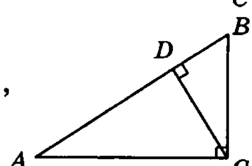
211. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos\angle A = \frac{4}{5}$, $BC = 15$. Найдите высоту CD.



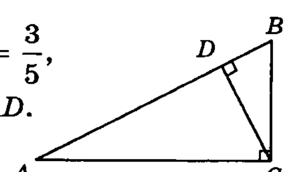
212. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos\angle A = \frac{3}{5}$, $BC = 25$. Найдите высоту CD.



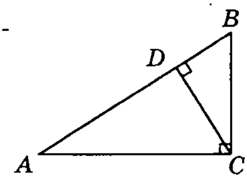
213. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin\angle B = \frac{4}{5}$, $AC = 20$, CD — высота. Найдите AD.



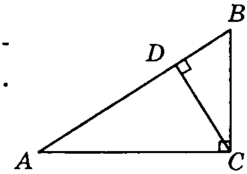
214. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin\angle B = \frac{3}{5}$, $AC = 25$, CD — высота. Найдите AD.



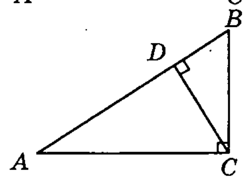
215. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $BD = 3{,}6$, $\sin \angle A = 0{,}6$. Найдите AB.



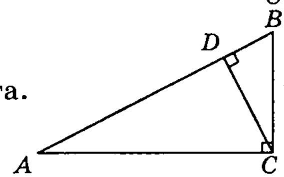
216. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $BD = 12$, $\sin \angle A = 0{,}8$. Найдите AB.



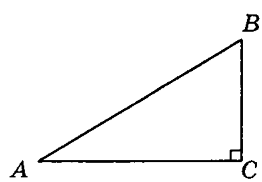
217. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = 0{,}6$, $AC = 4$, CD — высота. Найдите BD.



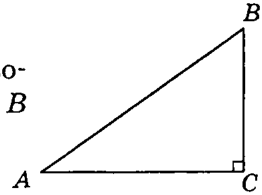
218. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\cos \angle B = 0{,}8$, $AC = 15$, CD — высота. Найдите BD.



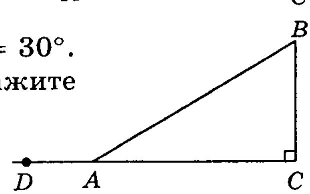
219. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 15$. Косинус внешнего угла при вершине B равен $(-0{,}6)$. Найдите AC.



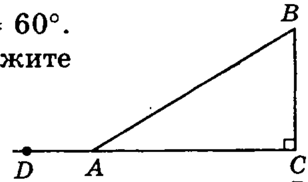
220. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 20$. Косинус внешнего угла при вершине B равен $(-0{,}8)$. Найдите AC.



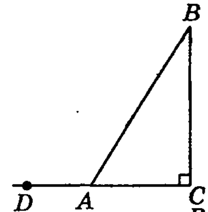
221. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Найдите $\cos \angle BAD$. В ответе укажите $4\sqrt{3} \cos \angle BAD$.



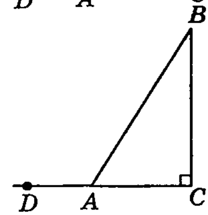
222. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$. Найдите $\cos \angle BAD$. В ответе укажите $10 \cos \angle BAD$.



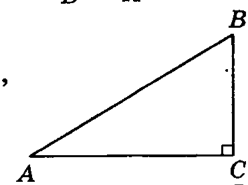
223. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$. Найдите $\operatorname{tg} \angle BAD$. В ответе укажите $7\sqrt{3} \operatorname{tg} \angle BAD$.



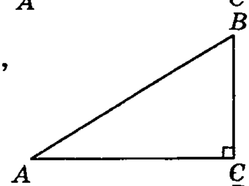
224. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Найдите $\operatorname{tg} \angle BAD$. В ответе укажите $17 \operatorname{tg} \angle BAD$.



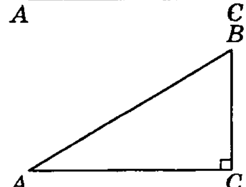
225. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 30$, $AC = 24$. Найдите $\sin \angle A$.



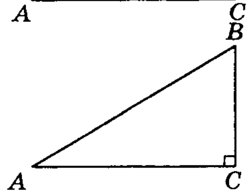
226. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = 25$, $AC = 24$. Найдите $\sin \angle A$.



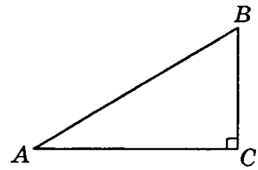
227. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = 0{,}8$. Найдите $\cos \angle A$.



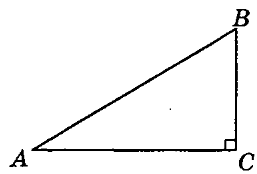
228. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\sin \angle A = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите $\cos \angle A$.



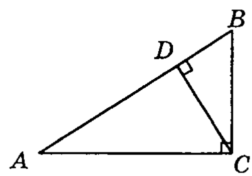
229. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Найдите $\sin \angle A$.



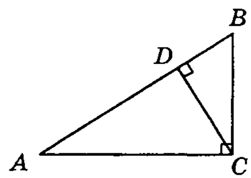
230. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{7}{24}$. Найдите $\sin \angle A$.



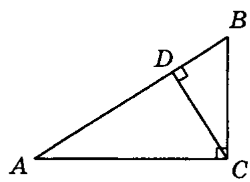
231. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 30$, $AD = 24$. Найдите $\cos \angle B$.



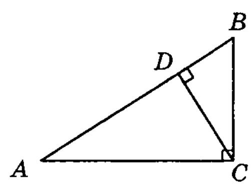
232. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 25$, $AD = 24$. Найдите $\cos \angle B$.



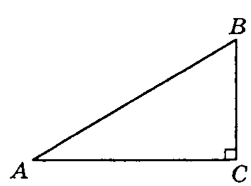
233. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 20$, $AD = 6$. Найдите $\sin \angle B$.



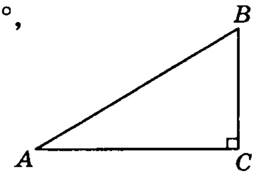
234. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $AC = 35$, $AD = 7$. Найдите $\sin \angle B$.



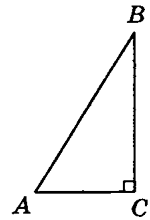
235. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 7\sqrt{3}$. Найдите AC.



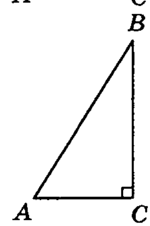
236. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, $BC = 15\sqrt{3}$. Найдите AC.



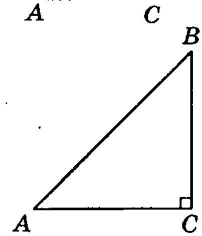
237. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, $AC = 7$. Найдите AB.



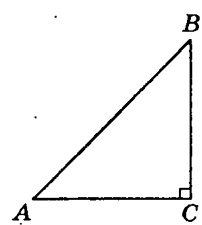
238. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, $AC = 11$. Найдите AB.



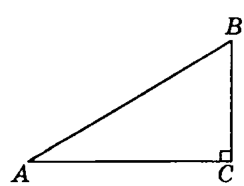
239. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 45°$, $AC = 6\sqrt{2}$. Найдите AB.



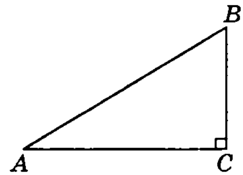
240. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 45°$, $AC = 10\sqrt{2}$. Найдите AB.



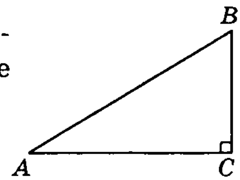
241. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = 0{,}75$, $BC = 18$. Найдите AC.



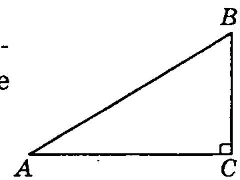
242. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{5}{6}$, $BC = 45$. Найдите AC.



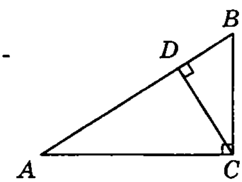
243. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 5. Найдите гипотенузу.



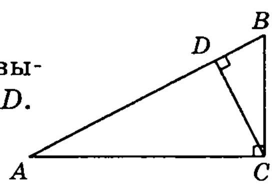
244. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 24. Найдите гипотенузу.



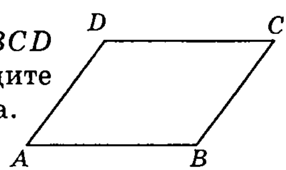
245. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $\angle A = 30°$, $AB = 16$. Найдите BD.



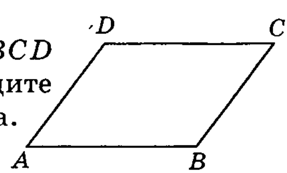
246. В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, $\angle A = 30°$, $AB = 20$. Найдите BD.



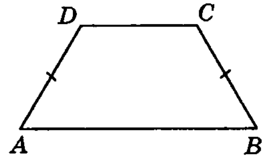
247. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 12$, $AD = 8$, $\sin \angle A = 0{,}6$. Найдите большую высоту параллелограмма.



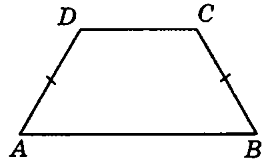
248. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 18$, $AD = 7$, $\sin \angle A = 0{,}8$. Найдите большую высоту параллелограмма.



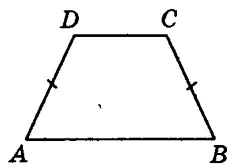
249. Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.



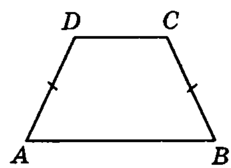
250. Основания равнобедренной трапеции равны 28 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,6. Найдите боковую сторону.



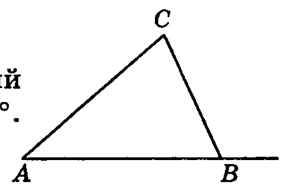
251. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13. Высота трапеции равна 12. Найдите тангенс острого угла.



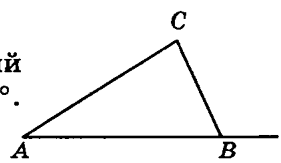
252. Основания равнобедренной трапеции равны 9 и 17. Высота трапеции равна 16. Найдите тангенс острого угла.



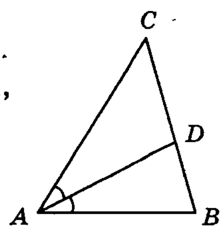
253. В ΔABC $\angle A = 42°$, внешний угол при вершине B равен 120°. Найдите $\angle C$.



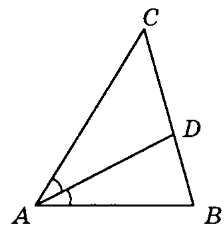
254. В ΔABC $\angle A = 35°$, внешний угол при вершине B равен 133°. Найдите $\angle C$.



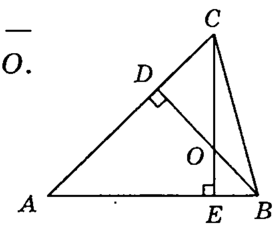
255. В ΔABC AD — биссектриса, $\angle C = 40°$, $\angle CAD = 28°$. Найдите $\angle B$.



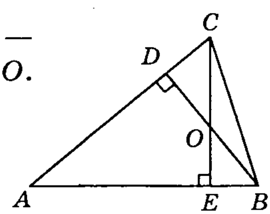
256. В ΔABC AD — биссектриса, $\angle C = 42°$, $\angle CAD = 35°$. Найдите $\angle B$.



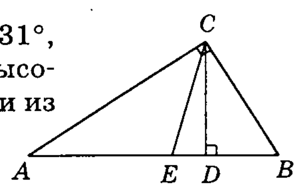
257. В ΔABC $\angle A = 44°$, BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите $\angle DOE$.



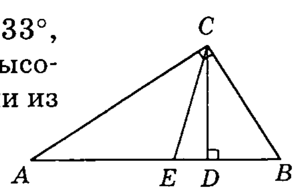
258. В ΔABC $\angle A = 48°$, BD и CE — высоты, пересекающиеся в точке O. Найдите $\angle DOE$.



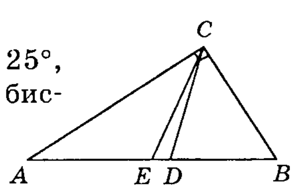
259. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 31°$, $\angle B = 59°$. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла.



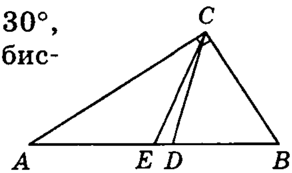
260. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 33°$, $\angle B = 57°$. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла.



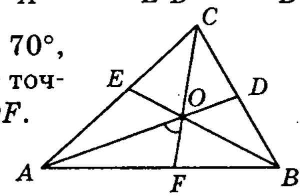
261. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 25°$, $\angle B = 65°$, CE — медиана, CD — биссектриса. Найдите $\angle ECD$.



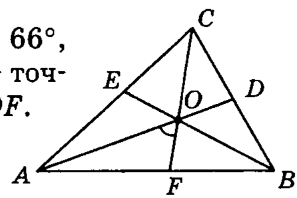
262. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, CE — медиана, CD — биссектриса. Найдите $\angle ECD$.



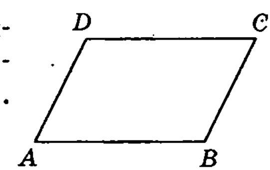
263. В ΔABC $\angle A = 52°$, $\angle B = 70°$, AD, CF и BE — биссектрисы, O — точка их пересечения. Найдите $\angle AOF$.



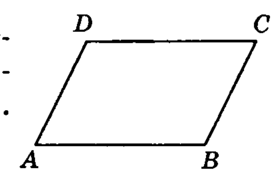
264. В ΔABC $\angle A = 48°$, $\angle B = 66°$, AD, CF и BE — биссектрисы, O — точка их пересечения. Найдите $\angle AOF$.



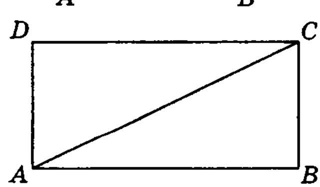
265. Периметр параллелограмма равен 84. Одна сторона параллелограмма на 4 больше другой. Найдите меньшую сторону.



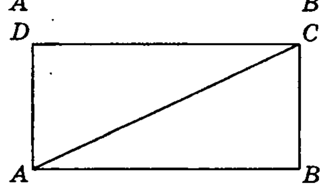
266. Периметр параллелограмма равен 36. Одна сторона параллелограмма на 2 меньше другой. Найдите большую сторону.



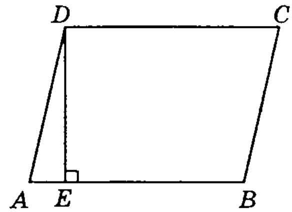
267. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 1 : 2, меньшая его сторона равна 10. Найдите диагональ прямоугольника.



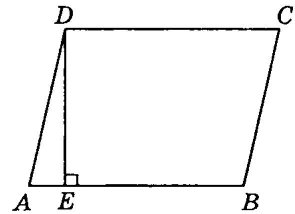
268. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 1 : 2, меньшая его сторона равна 16. Найдите диагональ прямоугольника.



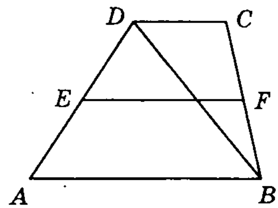
269. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $6\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.



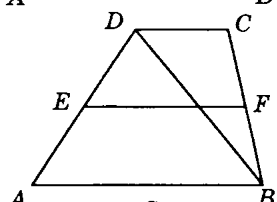
270. Найдите высоту ромба, сторона которого равна $5\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.



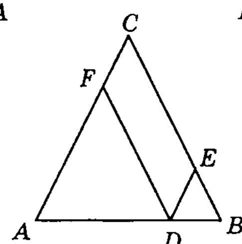
271. Основания трапеции равны 12 и 6. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



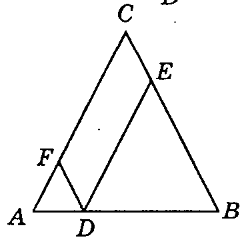
272. Основания трапеции равны 8 и 14. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.



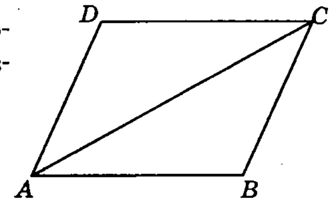
273. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.



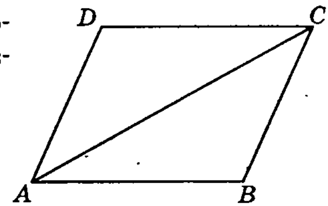
274. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.



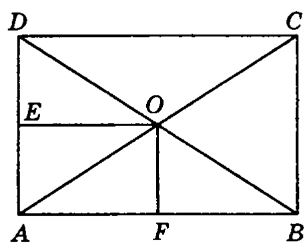
275. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $2\sqrt{3}$, а острый угол равен 60°.



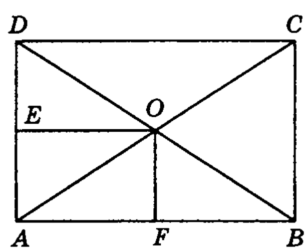
276. Найдите большую диагональ ромба, сторона которого равна $3\sqrt{6}$, а острый угол равен 60°.



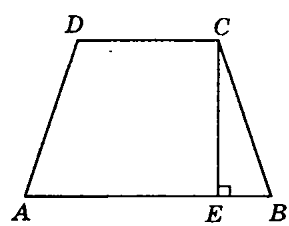
277. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 2 больше, чем расстояние от нее до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 32. Найти меньшую сторону прямоугольника.



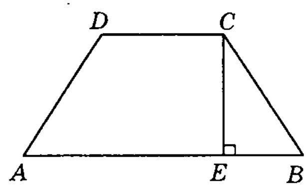
278. В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 5 больше, чем расстояние от нее до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 80. Найти меньшую сторону прямоугольника.



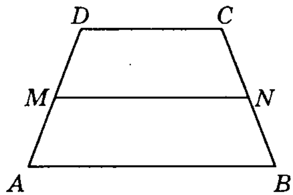
279. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 20 и 8. Найдите среднюю линию этой трапеции.



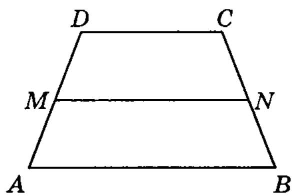
280. Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 16 и 6. Найдите среднюю линию этой трапеции.



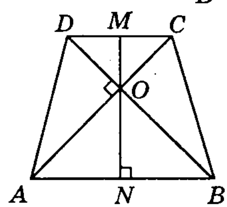
281. Периметр равнобедренной трапеции равен 40, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.



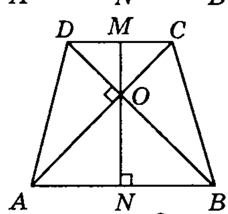
282. Периметр равнобедренной трапеции равен 48, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.



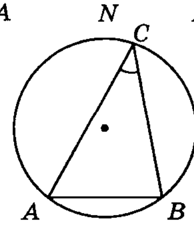
283. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 15. Найдите ее среднюю линию.



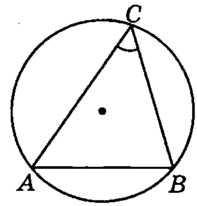
284. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 11. Найдите ее среднюю линию.



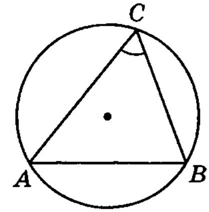
285. Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$.



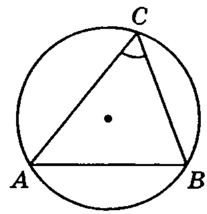
286. Радиус окружности равен 2. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $2\sqrt{3}$.



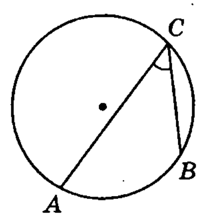
287. Найдите хорду, на которую опирается угол 60°, вписанный в окружность радиуса $3\sqrt{3}$.



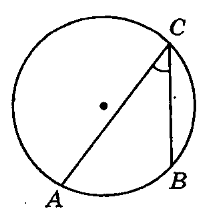
288. Найдите хорду, на которую опирается угол 60°, вписанный в окружность радиуса $5\sqrt{3}$.



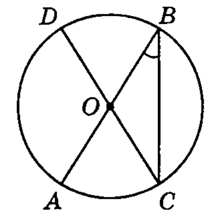
289. Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 220°, а дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB.



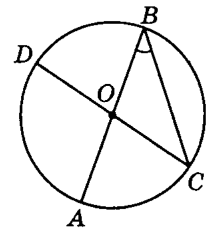
290. Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 210°, а дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 70°. Найдите вписанный угол ACB.



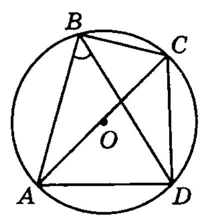
291. AB и CD — диаметры окружности с центром O, $\angle AOD = 116°$. Найдите вписанный $\angle ABC$.



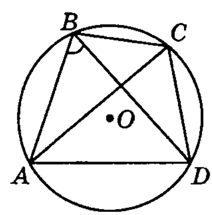
292. AB и CD — диаметры окружности с центром O, $\angle AOD = 100°$. Найдите вписанный $\angle ABC$.



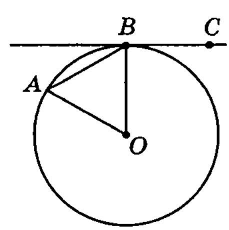
293. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. $\angle ABC = 93°$, $\angle CAD = 43°$. Найдите $\angle ABD$.



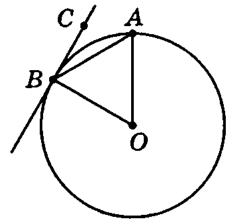
294. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. $\angle ABC = 100°$, $\angle CAD = 40°$. Найдите $\angle ABD$.



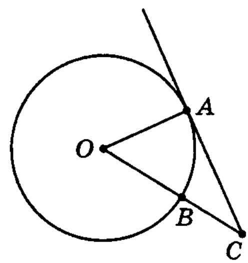
295. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 30°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB.



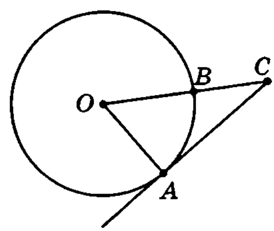
296. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен $25°$. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB.



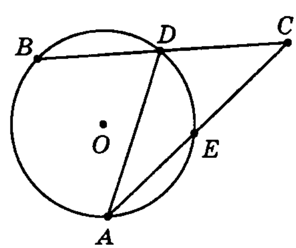
297. $\angle ACO = 40°$, где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Найдите величину меньшей дуги AB окружности, заключенной внутри этого угла.



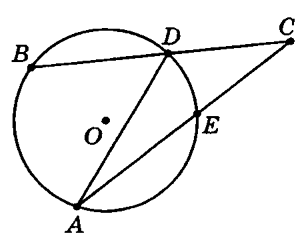
298. $\angle ACO = 35°$, где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Найдите величину меньшей дуги AB окружности, заключенной внутри этого угла.



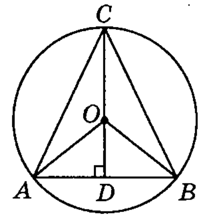
299. $\angle ACB = 40°$. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна $130°$. Найдите $\angle DAE$.



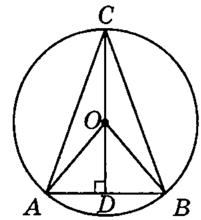
300. $\angle ACB = 35°$. Градусная величина дуги AB окружности, не содержащей точек D и E, равна $120°$. Найдите $\angle DAE$.



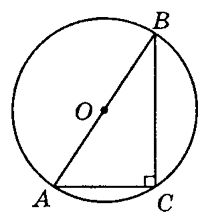
301. Высота правильного треугольника равна 12. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



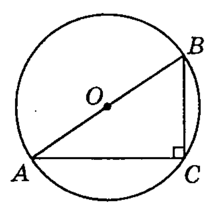
302. Высота правильного треугольника равна 15. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



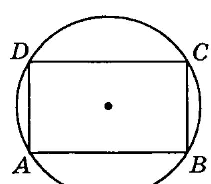
303. В ΔABC $AC = 5$, $BC = 12$, $\angle C = 90°$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.



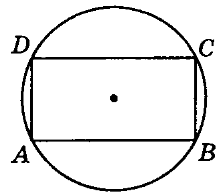
304. В ΔABC $AC = 16$, $BC = 12$, $\angle C = 90°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.



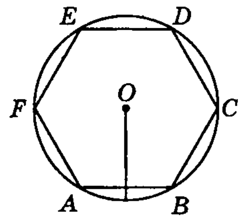
305. Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 7.



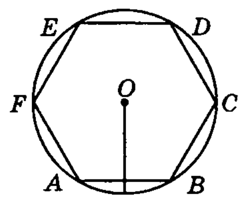
306. Стороны прямоугольника равны 9 и 12. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.



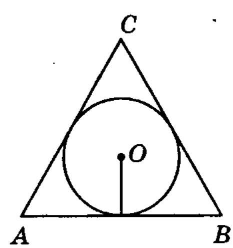
307. Чему равна сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 13?



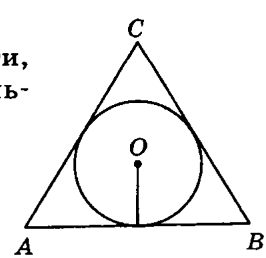
308. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна 9. Чему равен радиус окружности?



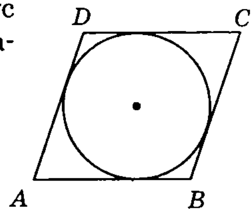
309. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$. Найдите сторону этого треугольника.



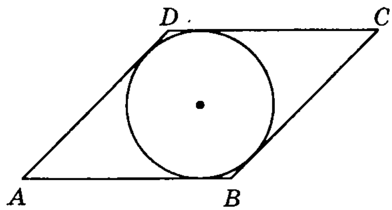
310. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, сторона которого равна $6\sqrt{3}$.



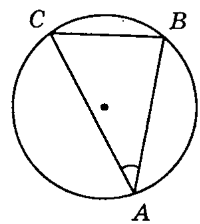
311. Острый угол ромба 60°. Радиус вписанной в этот ромб окружности равен $3\sqrt{3}$. Найдите сторону ромба.



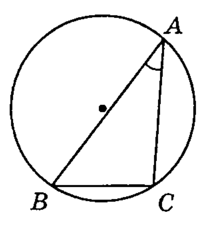
312. Острый угол ромба 30°. Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 6. Найдите сторону ромба.



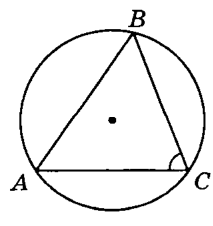
313. В ΔABC $\angle A = 30°$, $BC = 10$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



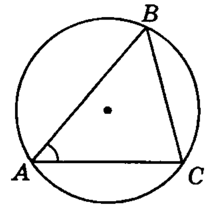
314. В ΔABC $\angle A = 30°$, $BC = 13$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.



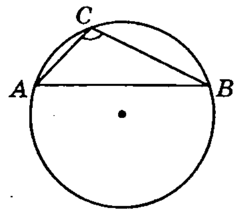
315. В ΔABC $AB = 3\sqrt{3}$, радиус описанной окружности равен 3. Найдите $\angle C$.



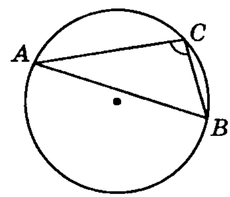
316. В ΔABC $AB = 4\sqrt{2}$, радиус описанной окружности равен 4. Найдите $\angle C$.



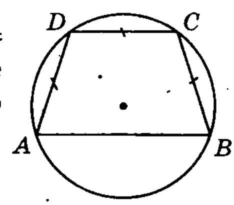
317. В ΔABC $AB = 3\sqrt{2}$, $\angle C = 135°$. Найдите радиус окружности, описанной около ΔABC.



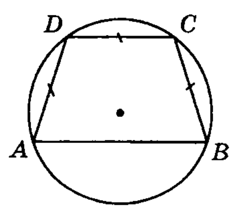
318. В ΔABC $AB = 8\sqrt{3}$, $\angle C = 120°$. Найдите радиус окружности, описанной около ΔABC.



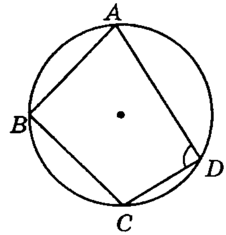
319. В трапеции $ABCD$ $AD = DC = BC$, $\angle A = 60°$, $AB = 18$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.



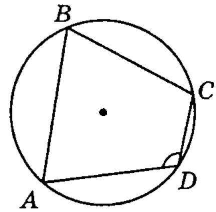
320. В трапеции $ABCD$ $AD = DC = BC$, $\angle A = 60°$, $AB = 20$. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.



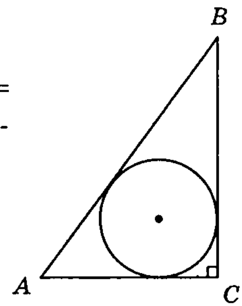
321. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$. Найдите $\angle D$, если около данного четырехугольника можно описать окружность.



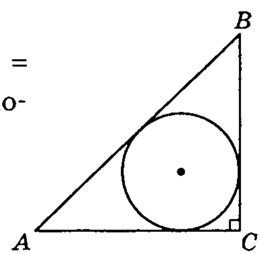
322. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 1 : 4$. Найдите $\angle D$, если около данного четырехугольника можно описать окружность.



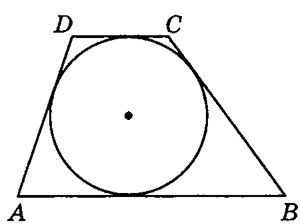
323. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 8+4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в ΔABC.



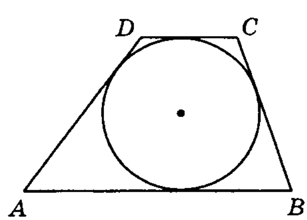
324. В ΔABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14+7\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в ΔABC.



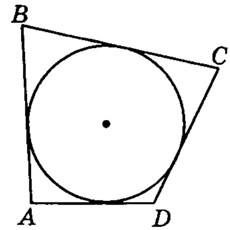
325. Трапеция $ABCD$ описана около окружности. $AD = 4$, $BC = 6$. Найдите среднюю линию трапеции.



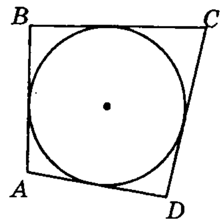
326. Трапеция $ABCD$ описана около окружности. $AB = 12$, $BC = 10$. Найдите среднюю линию трапеции.



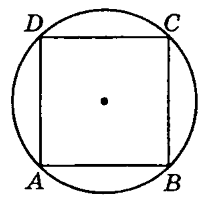
327. Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 36, две его стороны равны 8 и 9. Найдите большую из оставшихся сторон.



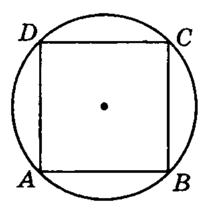
328. Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 48, две его стороны равны 10 и 12. Найдите большую из оставшихся сторон.



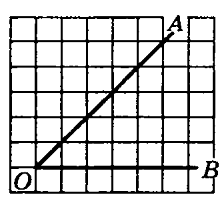
329. Около окружности, радиус которой равен $2\sqrt{2}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



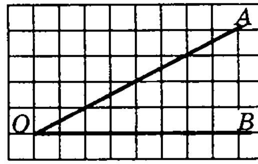
330. Около окружности, радиус которой равен $8\sqrt{2}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



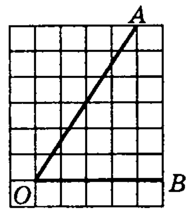
331. Найдите синус $\angle AOB$. В ответе укажите значение синуса, умноженное на $8\sqrt{2}$.



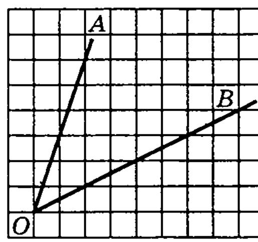
332. Найдите $\cos \angle AOB$. В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $10\sqrt{5}$.



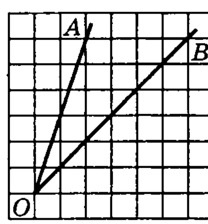
333. Найдите $\operatorname{tg} \angle AOB$.



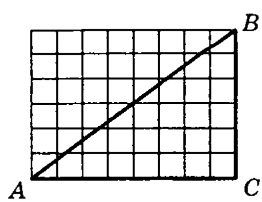
334. Найдите $\sin \angle AOB$. В ответе укажите значение синуса, умноженное на $6\sqrt{2}$.



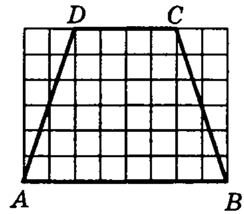
335. Найдите $\cos \angle AOB$. В ответе укажите значение косинуса, умноженное на $7\sqrt{5}/2$.



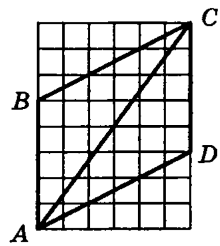
336. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если стороны квадратных клеток равны 1.



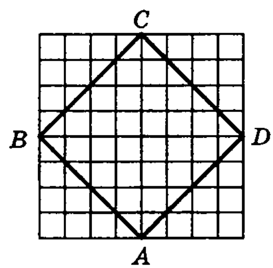
337. Найдите среднюю линию трапеции $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



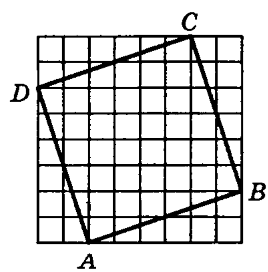
338. Найдите диагональ AC параллелограмма $ABCD$, если стороны клеток равны 1.



339. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$.

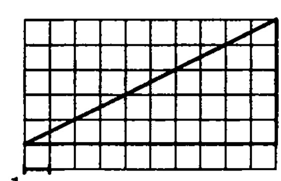


340. Найдите радиус r окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. В ответе укажите $r\sqrt{10}$.

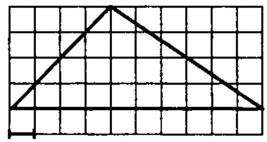


B6

341. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

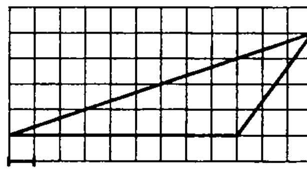


342. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



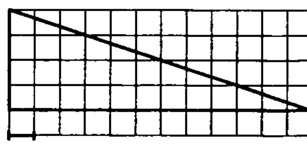
1 см

343. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



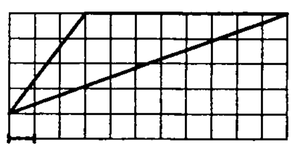
1 см

344. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



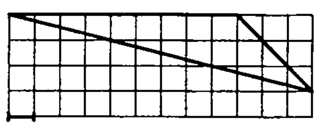
1 см

345. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



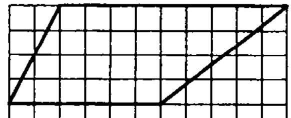
1 см

346. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



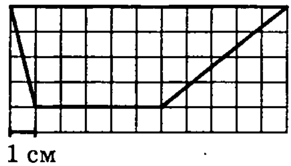
1 см

347. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.

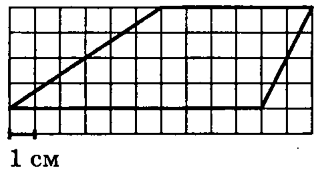


1 см

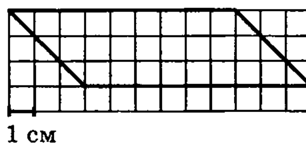
348. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



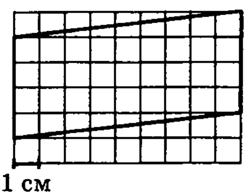
349. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



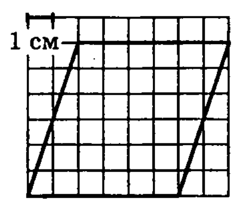
350. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



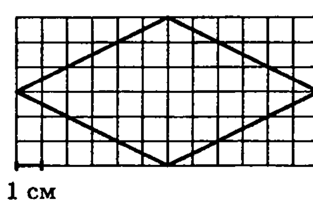
351. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



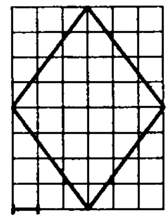
352. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен параллелограмм (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



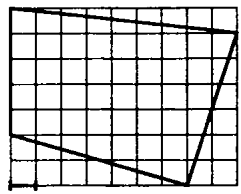
353. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображен ромб (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



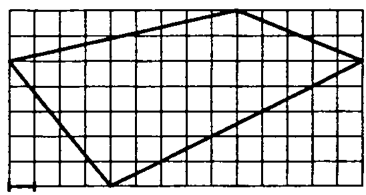
354. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображен ромб (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



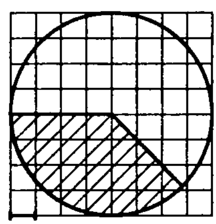
355. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображен четырехугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



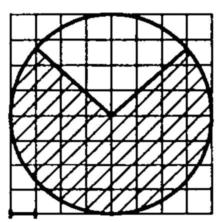
356. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см изображен четырехугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



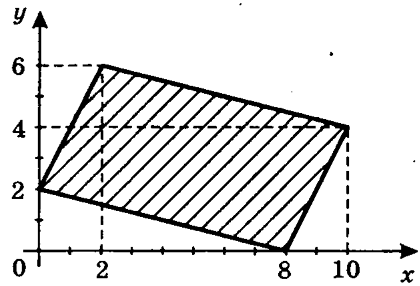
357. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



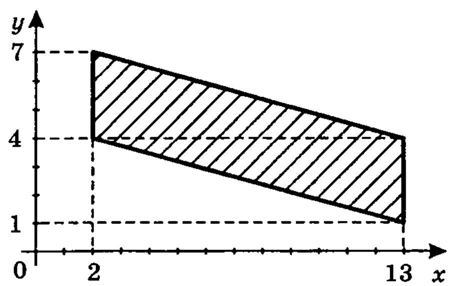
358. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.



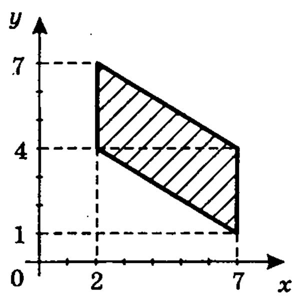
359. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (8; 0), (10; 4), (2; 6), (0; 4).



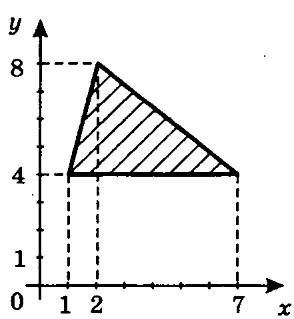
360. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (2; 4), (13; 1), (13; 4), (2; 7).



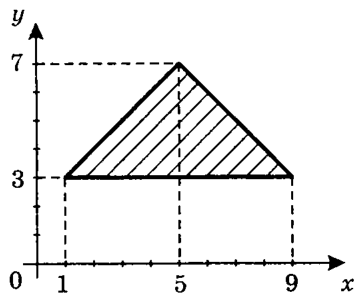
361. Найдите площадь четырехугольника, вершины которого имеют координаты (2; 4), (2; 7), (7; 1), (7; 4).



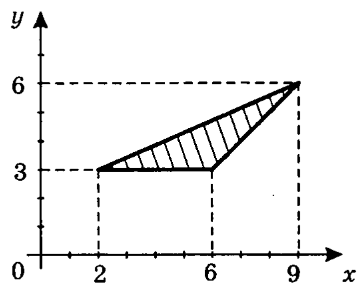
362. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 4), (2; 8), (7; 4).



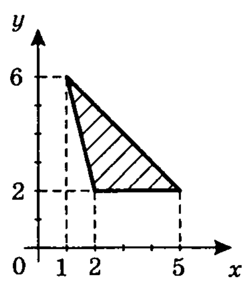
363. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 3), (5; 7), (9; 3).



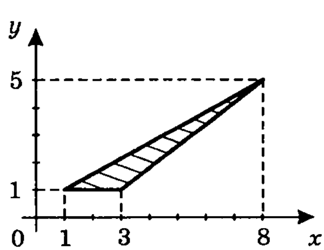
364. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 3), (6; 3), (9; 6).



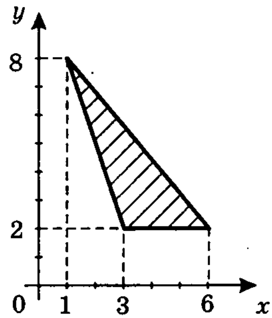
365. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



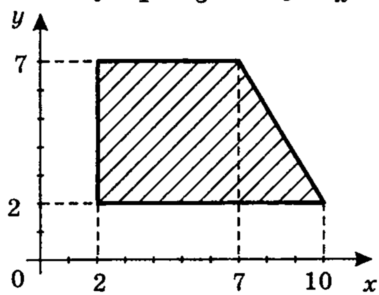
366. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



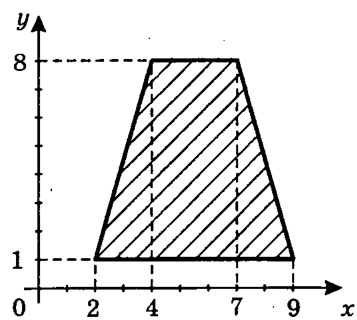
367. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



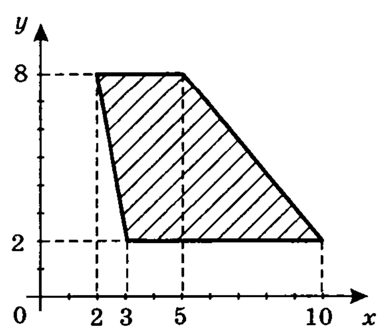
368. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 2), (2; 7), (7; 7), (10; 2).



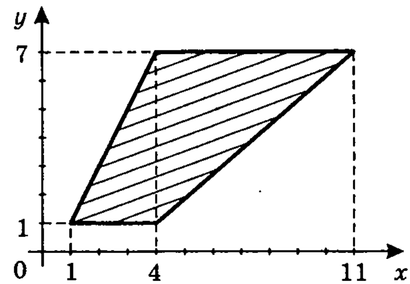
369. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 1), (4; 8), (7; 8), (9; 1).



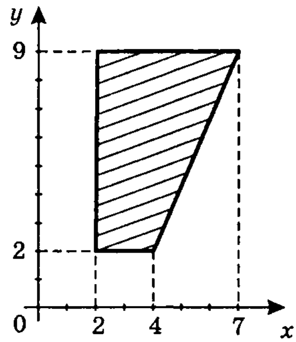
370. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (2; 8), (3; 2), (5; 8), (10; 2).



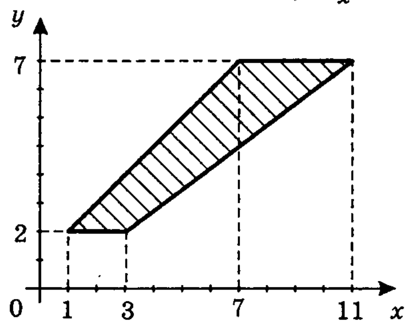
371. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



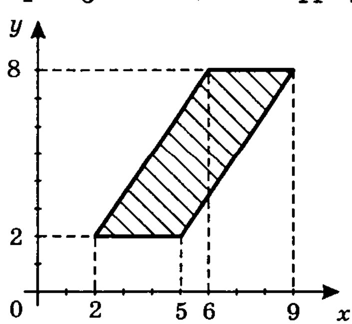
372. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



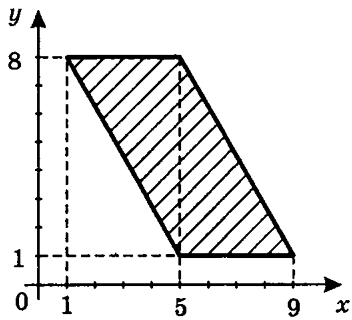
373. Найдите площадь трапеции, изображенной на рисунке.



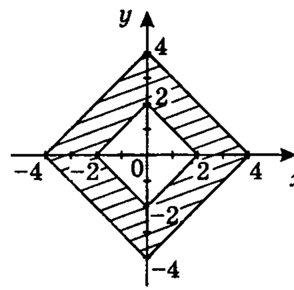
374. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.



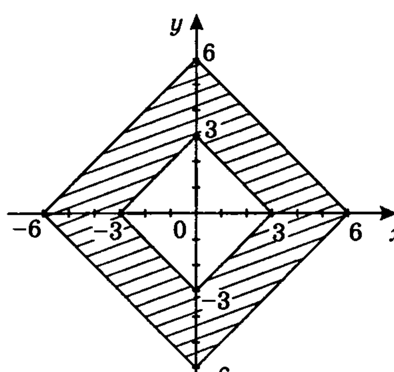
375. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке.



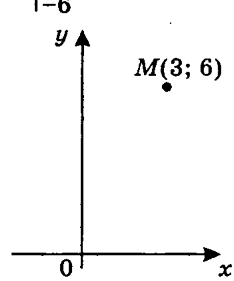
376. Найдите площадь заштрихованной фигуры на координатной плоскости.



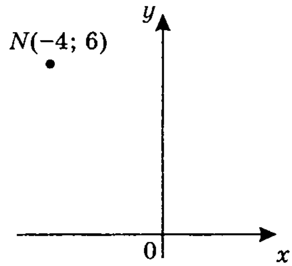
377. Найдите площадь фигуры на координатной плоскости.



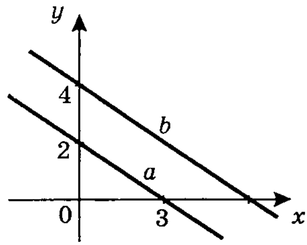
378. Найдите ординату точки, симметричной точке M (3; 6) относительно оси Ox.



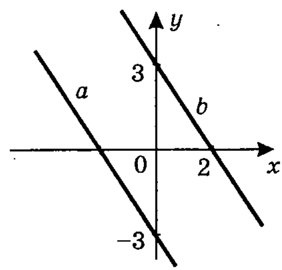
379. Найдите абсциссу точки, симметричной точке N (–4; 6) относительно оси Oy.



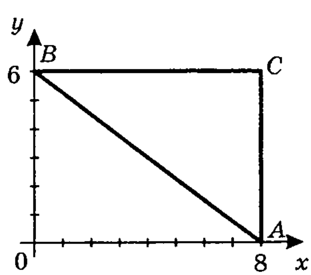
380. Прямая a проходит через точки с координатами (0; 2) и (3; 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0; 4) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.



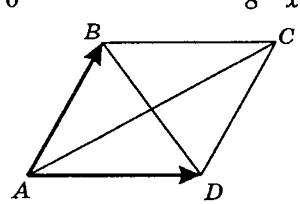
381. Прямая b проходит через точки с координатами (0; 3) и (2; 0). Прямая a проходит через точку с координатами (0; –3) и параллельна прямой b. Найдите абсциссу точки пересечения прямой a с осью Ox.



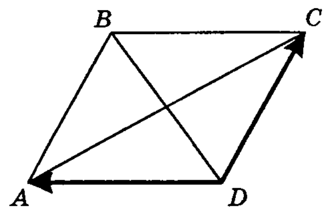
382. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты (8; 0), (0; 6), (8, 6).



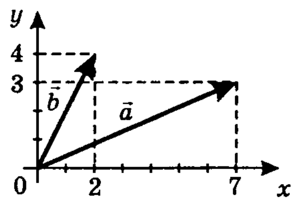
383. Диагонали ромба $ABCD$ равны 8 и 12. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.



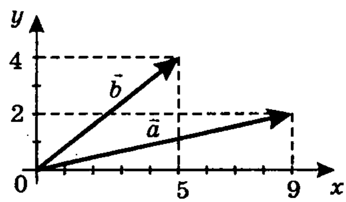
384. Диагонали ромба $ABCD$ равны 7 и 10. Найдите длину вектора $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$.



385. Найдите сумму координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

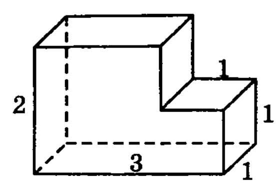


386. Найдите сумму координат вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

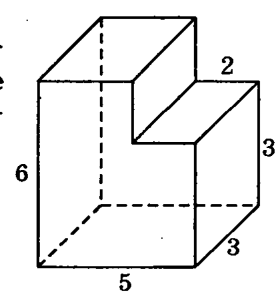


B9

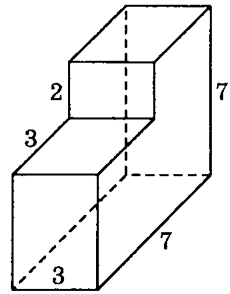
387. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



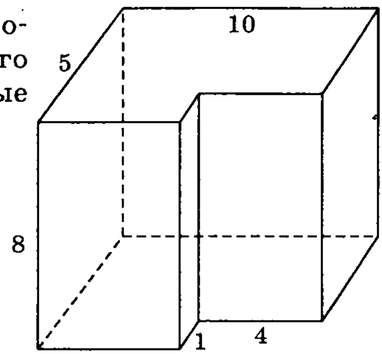
388. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



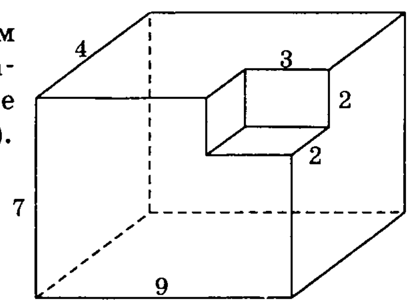
389. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



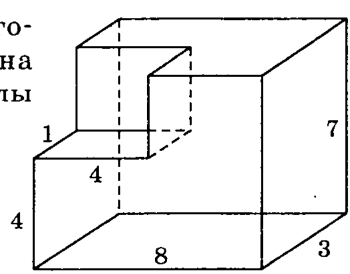
390. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



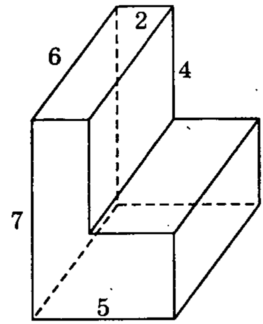
391. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



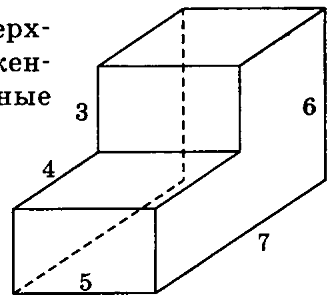
392. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



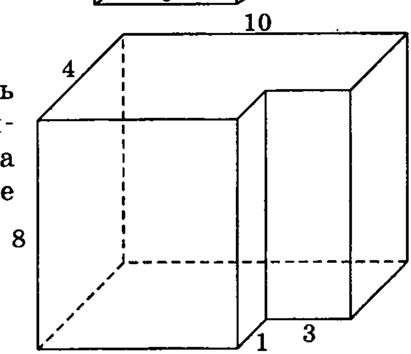
393. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



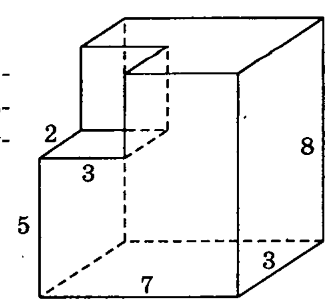
394. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



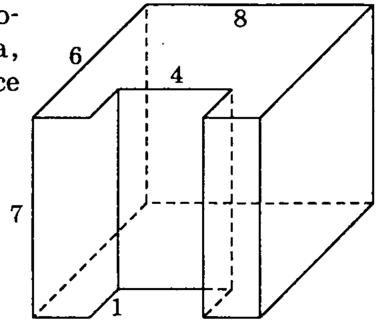
395. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



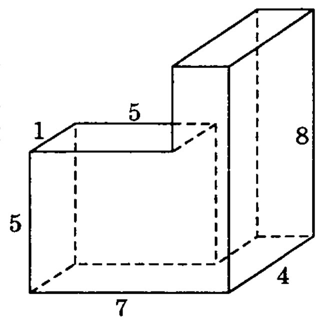
396. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



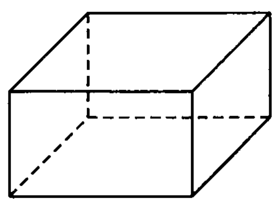
397. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



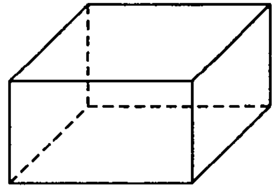
398. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



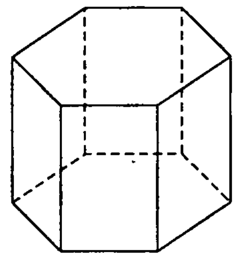
399. Площадь основания прямоугольного параллелепипеда равна 16. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 5. Найдите объем параллелепипеда.



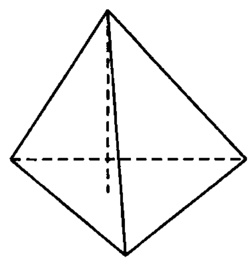
400. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 8 и 16. Найдите ребро равновеликого ему куба.



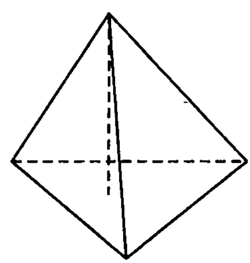
401. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$.



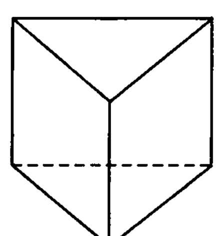
402. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна 3, а высота $4\sqrt{3}$.



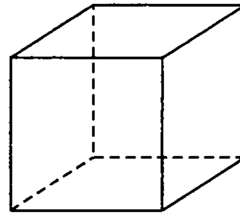
403. Высота правильной треугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Сторона основания пирамиды равна 4. Найдите объем пирамиды.



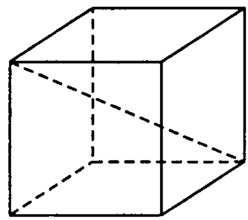
404. Объем прямой призмы, основание которой — правильный треугольник, равен $18\sqrt{3}$, ее высота равна 8. Найдите сторону основания.



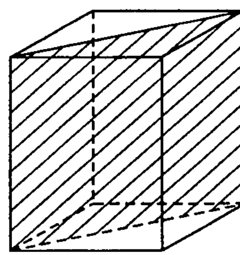
405. Площадь поверхности куба 150. Найдите его объем.



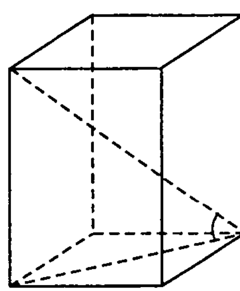
406. Диагональ куба равна 3. Найдите его полную поверхность.



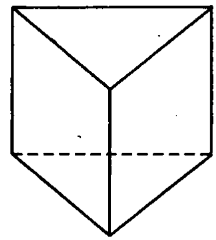
407. Найдите площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда, высота которого равна 12, а стороны основания 8 и 6.



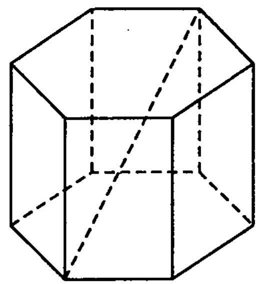
408. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 3 и 4. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите полную поверхность параллелепипеда.



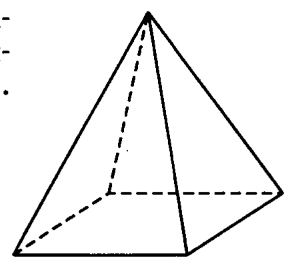
409. В прямой треугольной призме стороны основания равны 3, 4 и 5, а высота равна 6. Найдите ее полную поверхность.



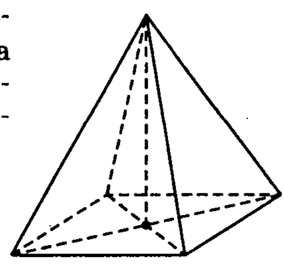
410. Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной призмы, наибольшая диагональ которой равна 13, а боковое ребро 5.



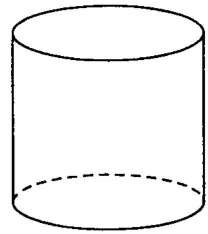
411. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна 60, сторона основания 6. Найдите объем пирамиды.



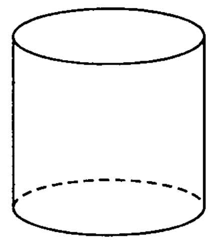
412. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания равна 18. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



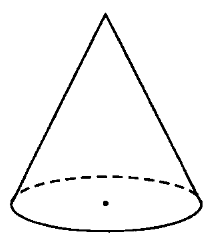
413. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его объем равен 48π. Найдите его высоту.



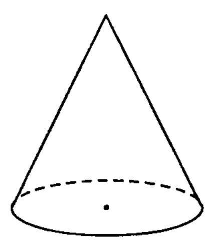
414. Объем цилиндра $8\pi\sqrt{5}$, а высота $2\sqrt{5}$. Найдите диагональ осевого сечения.



415. Образующая конуса $l=\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.



416. Образующая конуса равна $l = 2\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ и составляет с плоскостью основания 30°. Найдите объем конуса.



417. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, если радиус его основания увеличить в 3 раза, а образующую — в 2 раза?

418. Во сколько раз увеличится объем прямого кругового конуса, если радиус его основания увеличить в 4 раза, а высоту — в 2 раза?

419. В цилиндр вписан конус так, что основания и высоты этих двух фигур совпадают. Во сколько раз объем цилиндра больше объема конуса?

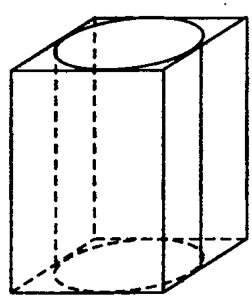
420. Площадь поверхности шара равна 330. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, описанного около шара.

421. Объем цилиндра равен 7,5. Найдите объем вписанного в этот цилиндр шара.

422. Высота конуса 8, образующая 10. Найдите радиус вписанного шара.

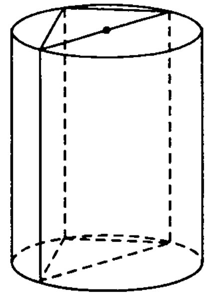
423. Высота конуса 3, образующая 6. Найдите радиус описанного шара.

424. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 3. Объем параллелепипеда равен 144. Найдите высоту цилиндра.



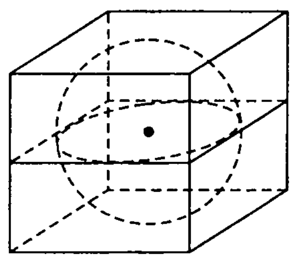
425. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 5. Объем параллелепипеда равен 500. Найдите высоту цилиндра (см. рис. к задаче 424).

426. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра (см. рис. к задаче 424), радиус основания которого равен 6. Высота цилиндра равна 9. Найдите объем параллелепипеда.



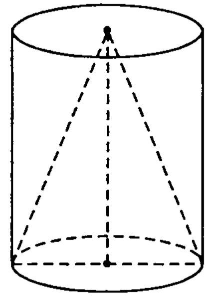
427. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 12 и 5. Боковые ребра равны $\frac{16}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

428. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{4}{\pi}$ (см. рис. к задаче 427). Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



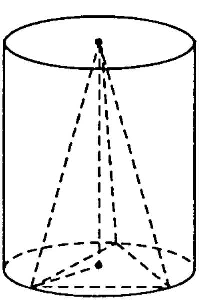
429. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 1,5. Найдите его объем.

430. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите его объем (см. рис. к задаче 429).



431. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 20.

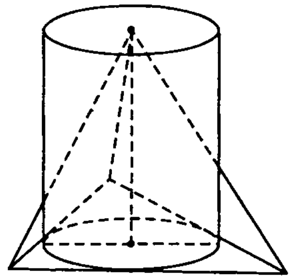
432. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 18 (см. рис. к задаче 431).



433. В окружность основания цилиндра вписан правильный треугольник. Найдите объем пирамиды той же высоты, что и цилиндр, в основании которого лежит этот треугольник, если объем цилиндра равен $12\sqrt{3}$.

434. В окружность основания цилиндра вписан правильный треугольник. Найдите объем пирамиды той же высоты, что и цилиндр, в основании которого лежит этот треугольник, если объем цилиндра равен $16\sqrt{3}$ (см. рис. к задаче 433).

435. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра той же высоты, что и пирамида. Найдите объем цилиндра, если объем пирамиды равен $\frac{8\sqrt{3}}{\pi}$.

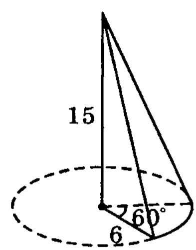


436. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра той же высоты, что и пирамида. Найдите объем цилиндра, если объем пирамиды равен $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ (см. рис. к задаче 435).

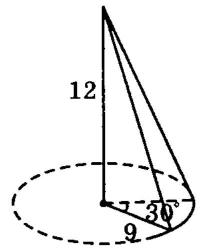
437. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра, той же высоты, что и пирамиды. Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $20\pi\sqrt{3}$ (см. рис. к задаче 435).

438. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. В него вписана окружность, являющаяся основанием цилиндра, той же высоты, что и пирамида. Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $24\pi\sqrt{3}$ (см. рис. к задаче 435).

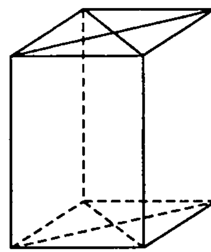
439. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите значение $\frac{V}{\pi}$.



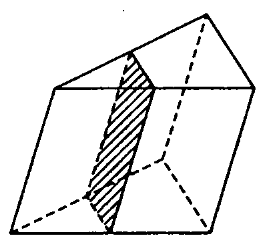
440. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите значение $\dfrac{V}{\pi}$.



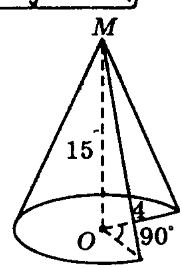
441. Основанием прямой призмы служит ромб. Площади диагональных сечений равны 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



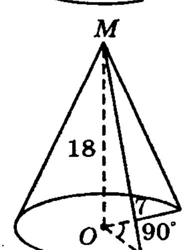
442. Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы, если площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы равна 48.



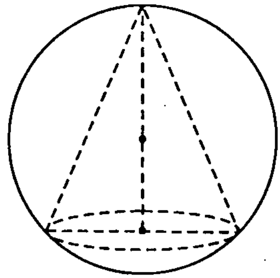
443. Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.



444. Найдите объем V части конуса, изображенного на рисунке. В ответе укажите $\dfrac{V}{\pi}$.



445. В шар вписан конус. Найдите высоту конуса, если радиус шара 5, а радиус основания конуса 4.



446. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.

§ 16. Повышенный уровень (часть С)

16.1. Стереометрия

447. В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны 12 и 8, а длина их общего ребра равна 4. Определите объем пирамиды.

448. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, равна $8\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.

449. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна 36. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60°. Найдите объем пирамиды.

450. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 3:5 (считая от вершины пирамиды), площадь сечения меньше площади основания пирамиды на 330. Найдите площадь сечения.

451. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно $3\sqrt{2}$.

452. Дана правильная четырехугольная пирамида $MABCD$, все ребра которой равны 1. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

453. Диаметр шара, равный 30, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12. Определите объем шара, заключенного внутри цилиндра.

454. Диагонали ромба 15 и 20. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10. Найдите расстояние от его центра до плоскости ромба.

455. Радиус шара 9. В него вписана правильная четырехугольная призма, высота которой 14. Найдите сторону основания призмы.

456. Основанием треугольной пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 1$ и $AC = 2$. Ребро $MA = 3$ и перпендикулярно плоскости ABC. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

457. Основанием четырехугольной пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Точка F лежит на ребре MB, причем $KB:MB = 2:5$. Найдите отношение объемов многогранников, на которые разбивает пирамиду плоскость, проходящая через точки A, D, F.

458. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B проведена диагональ. Найдите отношение площади сечения куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через ее середину, к площади его полной поверхности.

459. Около шара описан прямой параллелепипед, диагонали основания которого равны 2 и 4. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

460. Объем шара, вписанного в конус, равен $\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$. Угол при вершине осевого сечения конуса 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

461. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан шар, объем которого равен 36π. Найдите высоту конуса.

462. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна 18. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна $2-\sqrt{2}$.

463. Площадь боковой поверхности конуса равна 36, расстояние от центра основания до образующей конуса равно 7. Найдите объем конуса.

464. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно 2. Найдите полную поверхность куба.

465. В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5, 6 и 9, боковое ребро равно 10 и составляет с плоскостью основания угол в 45°. Определите объем призмы.

466. В треугольной призме расстояния между боковыми ребрами относятся как 9:10:17. Боковое ребро равно 1, боковая поверхность равна 6. Определите объем призмы.

467. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а диагональ боковой грани равна $4\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

468. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC известны длины ребер: $AB = 24\sqrt{3}$, $MC = 26$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AE, где E — точка пересечения медиан грани MBC.

469. Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

470. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в $\sqrt{3}$ раз больше площади ее основания. Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где α — плоский угол при вершине пирамиды.

471. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC известны длины ребер $AB = 8\sqrt{3}$, $MC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AM и BC.

472. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC известны длины ребер: $AB = 2\sqrt{3}$, $MC = 4\sqrt{10}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой EF, где E — середина ребра AM, а точка F делит ребро BC в отношении $1 : 2$.

473. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC известны длины ребер: $AB = 5\sqrt{3}$, $MC = 10\sqrt{2}$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой CE, где E — середина AM.

474. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ известны: $AB = 8$, высота $MO = 3$. Точка K — середина ребра MB, точка P — середина BC. Найдите угол между прямыми AK и MP.

475. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равна $4\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 0{,}25$. Точка E — середина ребра MD, точка F — середина ребра AD. Найдите угол между прямыми CE и MF.

476. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$. Известно, что $\angle ABC = 30°$ и $AB = CC_1$. Надите угол между плоскостями ABC и ADM, где M — середина ребра BB_1.

16.2. Планиметрия

477. Высота равнобедренной трапеции, равная 21, делит основание трапеции в отношении 1 : 9. Определите радиус описанного круга, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию.

478. В ΔABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC, AC соответственно в точках N, K и M. Найдите длину отрезка NK, если $AM = 2$, $AC = 7$ и $\angle ABC = 60°$.

479. Две стороны треугольника равны 6 и 4, а высота, опущенная на третью сторону, равна 2. Найдите радиус описанной окружности.

480. Боковая сторона равнобедренного треугольника, основание которого равно 4, делится точкой касания вписанной в него окружности в отношении 3 : 2, считая от вершины. Найдите периметр треугольника.

481. В ΔABC BD — высота, AE — биссектриса угла A, EF — перпендикуляр на AC. Определите EF, если $BD = 30$, $AB : AC = 7 : 8$.

482. По двум сторонам треугольника $a = 12$ и $b = 16$ найдите радиус описанной окружности, если известно, что угол, лежащий против третьей стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b.

483. В ΔABC одна из сторон в 2 раза больше другой, $\angle A = 2\angle B$. Найдите отношение R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

484. Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найдите R/r, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

485. В окружность вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в 2 раза больше основания. Найдите радиус описанной окружности, если радиус вписанной окружности равен 3.

486. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и боковой стороне, соответственно равны 8 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

487. В равнобедренном треугольнике из вершин нижнего основания опущены высоты на боковые стороны. Найдите длину отрезка, соединяющего их концы, если середина отрезка является центром описанной окружности радиуса $R=\sqrt{\sqrt{5}+2}$.

488. Прямоугольный треугольник с катетами $a = 12$ и $b = 5$ вписан в окружность. Биссектриса острого угла соединена с точкой, взятой на большем катете. Через эту точку проведена хорда так, что она делится точками пересечения на 3 равные части. Найдите длину хорды.

489. В квадрат вписан прямоугольный треугольник с катетами $a = 9$ и $b = 16$ так, что одна из вершин совпадает с вершиной квадрата, а две другие расположены на сторонах квадрата, не содержащих данную вершину квадрата. Найдите площадь квадрата.

490. Боковая сторона равнобедренной трапеции в 3 раза больше меньшего из оснований. Биссектрисы тупых углов этой трапеции пересекаются в точке, лежащей на основании. Найдите отношение площади трапеции к площади треугольника, образованного меньшим основанием и биссектрисами.

491. Две стороны треугольника равны 26 и 40. Отрезок прямой, длиной 7, параллелен третьей стороне и пересекает боковые стороны, а высота, опущенная на эту сторону, делится на части в отношении 1 : 5 (считая от вершины). Определите длины этих частей.

492. Площадь ΔABC равна $60\sqrt{3}$, $\angle BAC = 120°$, $\angle ABC > \angle ACB$. Расстояние от вершины A до центра вписанной окружности равно 4. Найдите $R \cdot r$, где R и

r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

493. Высоты, проведенные к боковым сторонам остроугольного треугольника, равны 4 см и $2\sqrt{3}$ см, а третья высота делится их точкой пересечения в отношении 3 : 1, считая от вершины треугольника. Найдите расстояние между ортоцентром треугольника и центром описанной окружности.

494. Окружность проходит через вершины A и C ΔABC и пересекает сторону AB в точке D, а сторону BC — в точке E. Найдите величину $\angle ABC$, если $AD = 2$, $AC = 14$, $BE = 5$ и $BD : CE = 8 : 11$.

495. Вершина B прямого угла в ΔABC лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящей через концы гипотенузы AC, BC — высота ΔABC. На прямой AC взята точка M так, что $MN = ON$. Найдите BM.

496. Окружность радиуса 5 с центром O проходит через концы A и B гипотенузы ΔABC так, что вершина C прямого угла оказывается вне окружности, CD — высота ΔABC. На прямой AB взята точка M так, что $MD = OD$. Найдите CM.

497. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB — диаметр первой окружности, а отрезок BC — второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке M и касается второй окружности в точке N. Известно, что $BM = 9$, $BN = 12$. Найдите радиусы окружностей.

498. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Окружность радиуса 3 проходит через вершину A, касается стороны BC в точке D и пересекает сторону AB в точке E. Найдите $\angle A$ и $S_{\Delta ABC}$, если $BC = 4$, $\frac{AE}{BD} = \frac{3}{2}$.

499. В прямоугольном ΔABC гипотенуза DC является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты AD и AC в точках E и B соответственно. Найдите BD, если $\angle DBE = 30°$, $S_{\Delta DEC} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{4}$.

500. В ΔABC $AB = 13$, $BC = 2$, $AC = 12$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

501. В равнобедренный ΔABC ($AB = BC$) вписана окружность. Через точку M, лежащую на стороне AB, проведена касательная к окружности, пересекающая прямую AC в точке D. Найдите боковую сторону треугольника ABC, если $AC = CD = 14$, $MB = \frac{1}{8}AB$.

502. Биссектриса BD и высота CE остроугольного ΔABC пересекаются в точке O. Окружность радиуса 3 с центром в точке O проходит через вершину B, середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке K так, что $AK : KB = 2 : 1$. Найдите длину стороны AC.

503. В ΔABC $\angle B = \arccos\frac{15}{17}$. На стороне AC взята точка K так, что $AK = 12$, $KC = 4$. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину B, касающейся стороны AC в точке K и касающейся окружности, описанной около ΔABC.

504. Через середину гипотенузы AC прямоугольного ΔABC проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D, а продолжение катета AB за точку A — в точке M. Найдите площадь ΔABC, если $CD = 1$, $AM = 2$, $\angle CAB = \arccos\frac{3}{5}$.

505. Через середину катета AB прямоугольного ΔABC проведена прямая, пересекающая гипотенузу AC в точке M, а продолжение катета BC за точку B — в точке N. Найдите площадь ΔABC, если $AM = 2$, $BN = 3$, $\angle ACB = 60°$.

506. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найдите стороны параллелограмма, если его площадь $S = 2\sqrt{7}$, а $\angle BAC = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

507. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке M. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $CD = 10\sqrt{26}$.

508. На сторонах AB и AC ΔABC взяты точки M и N соответственно. Отрезок MN проходит через центр вписанной в треугольник окружности и параллелен отрезку BC. Найдите периметр ΔABC, если $BC = 15$, $BM = 6$, $CN = 4$.

509. В ΔABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$ проведена биссектриса BD, точка O — центр вписанной в ΔABC окружности, $BO : OD = 3 : 1$. Найдите радиус окружности, описанной около ΔABC.

ОТВЕТЫ

Глава 2
Планиметрия

§ 3

Часть 1

1. 160°. **2.** 40°. **3.** 10°. **4.** 80°; 50°; 50°. **5.** 8. **6.** 35°. **7.** $\angle BAK = 72°$, $\angle ABK = 18°$, $\angle AKB = 90°$. **8.** 4. **9.** 30. **10.** 5. **11.** 10. **12.** 12. **13.** 90°. **14.** 16. **15.** $48\sqrt{6}$ см². **16.** 32. **17.** 13,5 см². **18.** 27. **19.** 12. **20.** 9. **21.** 8. **22.** 130°. **23.** 75. **24.** 6. **25.** 150°. **26.** 8. **27.** 25. **28.** 133°. **29.** 60. **30.** 120. **31.** 50. **32.** 14. **33.** 40 см. **34.** 10 см. **35.** 6. **36.** 0,5. **37.** 80. **38.** 6; 8. **39.** 2. **40.** $7\sqrt{95}$ см². **41.** 12 см². **42.** 16. **43.** 8. **44.** 5 см. **45.** 12. **46.** 6. **47.** 6 см². **48.** 7,5. **49.** 8. **50.** 4. **51.** 4. **52.** 12. **53.** 20 см. **54.** 8. **55.** 3. **56.** 17. **57.** 8. **58.** 16. **59.** 2 : 3. **60.** 10 см.

Часть 2

1. 56 см. **2.** $9\sqrt{5}$ см. **3.** 10 см. **4.** 4,5. **5.** $\frac{25}{6}$ см². **6.** 60 см. **7.** 15. **8.** 20,4. **9.** 12. **10.** 75 см². **11.** 5. **12.** 8. **13.** 50. **14.** 12,5 см. **15.** 16°. **16.** 40. **17.** 1 см. **18.** 3,5. **19.** 2. **20.** 24 см. **21.** 120°. **22.** $\sqrt{10}$ см. **23.** 7,2 см. **24.** $3\left(\sqrt{5}+1\right)$. **25.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. **26.** $\arcsin\frac{72}{97}$. **27.** $\frac{1+\sqrt{73}}{12}$. **28.** $\arccos\frac{4}{5}$ или $\pi-\arccos\frac{4}{5}$. **29.** 48. **30.** 28. **31.** 4 см; 6 см; 8 см или $2\sqrt{6}$ см; $4\sqrt{6}$ см; 6 см; тупоугольный. **32.** 0,75. **33.** 10 см. **34.** 11 см. **35.** 45°. **36.** 144°. **37.** 11,2. **38.** 6,5. **39.** 2. **40.** 0,3. **41.** $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$. **42.** 30°; 60°; 90°. **43.** 90°; 22°30′; 67°30′. **44.** 9,5 см. **45.** 10,5. **46.** $\frac{15}{4}$. **47.** 2.

48. 3. **49.** $\sqrt{3}$ см^2. **50.** 4 см. **51.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см^2. **52.** 2. **53.** 8. **54.** 12. **55.** 8π. **56.** 2. **57.** $\frac{15}{8}$. **58.** 9 см. **59.** $3\sqrt{5}$ см. **60.** 16. **61.** 7,5. **62.** 10. **63.** 10. **64.** $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. **65.** $\sqrt{3}-1{,}5$. **66.** $2\left(3+2\sqrt{3}\right)$. **67.** $9\sqrt{3}$. **68.** 10. **69.** 130. **70.** 75°. **71.** 9,0625 см. **72.** $2\sqrt{6}$ см. **73.** $35\frac{35}{47}$ см. **74.** $\frac{40\sqrt{2}}{11}$ см. **75.** $8\frac{1}{8}$ см. **76.** 13,5. **77.** 2. **78.** 4. **79.** 6. **80.** –0,6. **81.** $42\sqrt{6}$ м^2. **82.** 98π м^2. **83.** $\sqrt{19}$ см. **84.** $\frac{27\pi}{4}$ м^2. **85.** 12 см. **86.** 20 см^2; 10,4 см^2. **87.** 16. **88.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ **89.** 30°. **90.** 0,5. **91.** $4{,}5\pi$ см. **92.** $\frac{25}{6\pi}$. **93.** 20. **94.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$ см. **95.** 2 см; 2 см. **96.** 12. **97.** 12 см. **98.** 16 см^2. **99.** 12 см^2. **100.** 30°. **101.** 9. **102.** 2. **103.** $682\frac{2}{3}$ см^2. **104.** 75. **105.** 20 см^2. **106.** 10. **107.** 125. **108.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см^2. **109.** 14. **110.** 0,3. **111.** 9 см; $9\sqrt{3}$ см; 18 см. **112.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. **113.** $12\sqrt{5}$ см. **114.** $\frac{7}{5}\sqrt{145}$ см. **115.** 8,25 см. **116.** $\frac{\sqrt{7}}{9}\left(\sqrt{7}+4\right)$. **117.** 16 см. **118.** 10. **119.** 8. **120.** 4.

Глава 6
Стереометрия

§ 13

Часть 1

1. 4. **2.** 18. **3.** 1. **4.** 4. **5.** 10. **6.** 2. **7.** 30. **8.** 1464. **9.** 2 м^2. **10.** 30 м. **11.** 20. **12.** 52. **13.** 12. **14.** 6,92. **15.** $220+24\sqrt{3}$ см^2; 70 см^2.

16. 60 см^3. **17.** 288 см^2. **18.** 3 м^3. **19.** 32. **20.** 66. **21.** 22 см. **23.** $192+32\sqrt{6}$ см^2. **24.** 3 м^3. **25.** $8\sqrt{2}$ см^3 или 32 см^3. **26.** 84. **27.** 180. **28.** 9. **29.** 4980 см^2. **30.** 48 см^3. **31.** 2 см. **32.** 100 м^3. **33.** 24. **34.** 60. **35.** 540. **36.** 6. **37.** 9. **38.** 18. **39.** 1296. **40.** 2. **41.** 31. **42.** 288. **43.** 3. **44.** 5 см и 6 см. **45.** 12 см. **46.** 14 см^2. **47.** 11 м. **48.** 6. **49.** 9 см. **50.** 1 см. **51.** 6 см. **52.** $20\sqrt{2}$. **53.** 16 см^2. **54.** 168 м^2. **55.** 54 дм^2. **56.** 20 см и 10 см. **57.** $10\frac{1}{3}$ м^3. **58.** 109 см^3. **59.** 2325 м^3. **60.** 8 м^2. **61.** 16. **62.** 4 см и 14 см. **63.** π^2. **64.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **65.** 10. **66.** 3. **67.** 27. **68.** 48. **69.** 4. **70.** 2. **71.** 64. **72.** 4. **73.** 18π. **74.** $\frac{3}{4}$. **75.** 8. **76.** 12π см^3. **77.** 24π см^3. **78.** 2 : 1. **79.** 5 м. **80.** 20 см. **81.** 24. **82.** 35π. **83.** $\frac{1}{2}$, считая от большего основания. **84.** 16π. **85.** $\frac{1}{4}\pi R^2$. **86.** 3 : 4. **87.** 12 см. **88.** 6 см. **89.** ≈ 2148 см^3. **90.** 3. **91.** 60°. **92.** 9. **93.** 8. **94.** 24. **95.** $\frac{12}{\sqrt[3]{\pi}}$. **96.** 8,1 см. **97.** 1 : 2 : 3. **98.** 504π см^3, 504π см^2. **99.** $6\pi\sqrt{3}$. **100.** 3400π см^3.

Часть 2

1. 30°. **2.** 50. **3.** 40 см и 9 см. **4.** 6 см, 14 см, 16 см. **5.** 124 дм^2. **6.** 3 см. **7.** 4500 см^2. **8.** 6 м^3. **9.** $\frac{\sqrt{2}}{8}l^3$. **10.** 4. **11.** 6. **12.** 5. **13.** 60. **14.** 24 см^3. **15.** 3360. **16.** 1,5. **17.** 273 см^2 и 175 см^2. **18.** 1416 см^2. **19.** 36 м^3. **20.** 1,5. **21.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$. **22.** $\sqrt{2}$ м^3. **23.** 200 дм^3. **24.** $24\sqrt{2}$ м^3. **25.** 6. **26.** 7. **27.** 9. **28.** 4. **29.** $4\sqrt{3}$ м^2. **30.** 12. **31.** 6 см и 3 см или 4 см и 7 см. **32.** $8\sqrt{2}$ см^3 или 32 см^3. **33.** 6 м^3. **34.** 4. **35.** 105 м^3. **36.** 3,4 м; 3,4 м и 3,2 м. **37.** 12 см^3. **38.** 360. **39.** 5280. **40.** 45°. **41.** 12 см. **42.** 492 см^2. **43.** 576 см^2. **44.** 144 см^2. **45.** 2 см. **46.** 45 см^3. **47.** 3060 м^3. **48.** 1 м^3. **49.** am^2. **50.** 2 м^3. **51.** 3. **52.** 12. **53.** 84. **54.** 4. **55.** 120°. **56.** 60. **57.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **58.** $18\sqrt{3}$. **59.** $16\sqrt{6}$. **60.** 27. **61.** 4,5. **62.** 16 см и 6 см или 12 см и 8 см. **63.** $\sqrt{2}$. **64.** 108.

65. 24. **66.** 1. **67.** 2. **68.** $22+\sqrt{136}$. **69.** 448 см^2. **70.** 6 дм^2. **71.** 56 и 24. **72.** 2 см и 10 см. **73.** 2 см. **74.** 5 м. **75.** 10,5 м^2. **76.** 1900 м^3. **77.** 14. **78.** 98. **79.** 4. **80.** 12 см^2. **81.** 39 м и 51 м. **82.** 32 м^2. **83.** 50 м^2. **84.** 128 м^2 и 50 м^2. **85.** 1990 м^3. **86.** 90°. **87.** $40\sqrt{3}$ см^2. **88.** 4 : 1. **89.** 12. **90.** 0,5. **91.** 200,96. **92.** π. **93.** 3,375. **94.** $\frac{25}{16}$. **95.** $\pi Q + 2S$. **96.** 84. **97.** 6. **98.** 45°. **99.** 80. **100.** 500. **101.** 9π м^3. **102.** 96π см^2. **103.** 200π м^2. **104.** 7,2. **105.** $100\sqrt{2}$ см^2. **106.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **107.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **108.** 2 : 3. **109.** 5. **110.** 9. **111.** 30 дм^2. **112.** 9 м^2. **113.** 9 и 16. **114.** 100π см^2. **115.** 60. **116.** 15 м. **117.** 8 см. **118.** 2 м; 5,5 м; 12,5 м. **119.** 10 см и 20 см. **120.** 3020π см^3; 476π см^2. **121.** 2 см. **122.** 12 см. **123.** 24π м. **124.** 4π м. **125.** $R\sqrt[3]{15}$. **126.** 2,75. **127.** 96. **128.** 5. **129.** 8 см. **130.** ≈ 67 см. **131.** 1. **132.** 8. **133.** 0,5625. **134.** 8,5. **135.** 25. **136.** 3. **137.** 8 дм. **138.** 3 м. **139.** 2 дм. **140.** 5 дм. **141.** 13 см. **142.** 5 м. **143.** 169π см^2, 532π см^3. **144.** 54 см^3. **145.** 13 см. **146.** 280π см^3, 270π см^2. **147.** ≈ 1580 см^3 и 1580 см^2. **148.** 3 : 7. **149.** 457π см^3. **150.** 240π см^3, $84\pi\sqrt{3}$ см^2. **151.** 0,25. **152.** 2. **153.** 75. **154.** $\frac{1}{4}\pi a^3$; $\frac{1}{2}\pi a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$. **155.** 864π см^3.

§ 14

Часть 1

1. 33. **2.** 13. **3.** –6. **4.** –2. **5.** $m = -9$. **6.** $\sqrt{13}$. **7.** 13. **8.** 90°. **9.** (–1; 1; 1). **10.** 21. **11.** 88. **12.** 7. **13.** 46. **14.** 22. **15.** 90°.

Часть 2

1. 135°. **2.** 88. **3.** 2. **4.** $\sqrt{18}$. **5.** 10. **6.** –1. **7.** 45°. **8.** 10. **9.** 6. **10.** $\frac{2}{3}\overline{MA}+\frac{1}{3}\overline{MB}$. **11.** 45°. **12.** $\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$. **13.** {2; 1; –1}. **14.** –4,5. **15.** 0. **16.** {1; –2; 0} и {–1; 2; 0}. **17.** $\left\{\frac{5}{\sqrt{65}};-\frac{2}{\sqrt{65}};-\frac{6}{\sqrt{65}}\right\}$ или $\left\{-\frac{5}{\sqrt{65}};\frac{2}{\sqrt{65}};\frac{6}{\sqrt{65}}\right\}$. **18.** 0,4. **19.** –5. **20.** –1.

§ 15. Базовый уровень (часть В)

В4

1. 3. **2.** 6. **3.** 0,8. **4.** 0,96. **5.** 20. **6.** 60. **7.** 35. **8.** 63. **9.** 0,6. **10.** 0,4. **11.** 0,75. **12.** 0,9. **13.** 0,8. **14.** 1,4. **15.** 2,25. **16.** 1,25. **17.** 0,5. **18.** 0,5. **19.** 0,7. **20.** 0,75. **21.** 0,25. **22.** 0,6. **23.** 0,2. **24.** 0,6. **25.** 0,28. **26.** 0,2. **27.** 0,3. **28.** 0,2. **29.** 0,5. **30.** 0,6. **31.** 0,8. **32.** 0,5. **33.** 0,6. **34.** 0,8. **35.** 0,4. **36.** 0,2. **37.** 0,28. **38.** 0,8. **39.** 0,5. **40.** 0,4. **41.** 0,8. **42.** 0,5. **43.** 0,1. **44.** 0,6. **45.** 0,7. **46.** 0,2. **47.** 0,3. **48.** 0,8. **49.** 0,8. **50.** 0,5. **51.** 0,25. **52.** 0,1. **53.** -0,8. **54.** -0,5. **55.** -0,9. **56.** -0,6. **57.** 0,8. **58.** 0,4. **59.** 0,2. **60.** 0,7. **61.** 12. **62.** 5. **63.** 10. **64.** 5. **65.** 20. **66.** 28. **67.** 28. **68.** 24. **69.** 12. **70.** 14. **71.** 36. **72.** 36. **73.** 0,4. **74.** 0,6. **75.** 0,9. **76.** 0,7. **77.** 26. **78.** 22. **79.** 21. **80.** 27. **81.** 42. **82.** 24. **83.** 7,5. **84.** 34. **85.** 0,75. **86.** 2,4. **87.** 2,4. **88.** 2,4. **89.** 50. **90.** 25. **91.** 27. **92.** 28. **93.** 10. **94.** 16. **95.** 28. **96.** 14. **97.** 12. **98.** 30. **99.** 36. **100.** 15. **101.** 0,8. **102.** 0,3. **103.** 0,6. **104.** 0,9. **105.** 2,4. **106.** 0,75. **107.** 2,4. **108.** 2,4. **109.** 0,8. **110.** 0,8. **111.** 0,8. **112.** 0,8. **113.** 2. **114.** 1,2. **115.** 1,5. **116.** 0,8. **117.** 1,5. **118.** 0,25. **119.** 2. **120.** 0,8. **121.** 0,75. **122.** 0,8. **123.** 0,9. **124.** 0,4. **125.** 0,28. **126.** 0,6. **127.** 0,75. **128.** 0,4. **129.** 0,6. **130.** 0,6. **131.** 0,5. **132.** 0,25. **133.** –0,6. **134.** –1,5. **135.** –0,5. **136.** –1,75. **137.** –0,8. **138.** –0,96. **139.** –0,5. **140.** –0,6. **141.** 50. **142.** 30. **143.** 12. **144.** 50. **145.** 15. **146.** 40. **147.** 24. **148.** 8. **149.** 4,25. **150.** 10. **151.** 20. **152.** 9. **153.** 25. **154.** 25. **155.** 12. **156.** 27. **157.** 32. **158.** 13,5. **159.** 16. **160.** 18. **161.** 9. **162.** 4. **163.** 3. **164.** 22,5. **165.** 24. **166.** 18. **167.** 24. **168.** 12. **169.** 10. **170.** 10,8. **171.** 15. **172.** 20. **173.** 15. **174.** 15. **175.** 12. **176.** 12. **177.** 30. **178.** 15. **179.** 114. **180.** 117. **181.** 42. **182.** 40. **183.** 29. **184.** 28. **185.** 0,6. **186.** 0,75. **187.** 0,8. **188.** 0,6. **189.** 0,6. **190.** 0,8. **191.** 0,8. **192.** 0,6. **193.** 0,5. **194.** 0,8. **195.** 9. **196.** 15. **197.** 30. **198.** 15. **199.** 6. **200.** 9. **201.** 6. **202.** 15. **203.** 18. **204.** 12. **205.** 16. **206.** 18. **207.** 10. **208.** 6. **209.** 6. **210.** 9. **211.** 12. **212.** 15. **213.** 16. **214.** 15. **215.** 10. **216.** 18,75. **217.** 1,8. **218.** 16. **219.** 12. **220.** 12. **221.** –6. **222.** –5. **223.** –21. **224.** –17. **225.** 0,6. **226.** 0,28. **227.** 0,6. **228.** 0,75. **229.** 0,75. **230.** 0,28. **231.** 0,6. **232.** 0,28. **233.** 0,3. **234.** 0,2. **235.** 21. **236.** 15. **237.** 14. **238.** 22. **239.** 12. **240.** 20. **241.** 24. **242.** 54. **243.** 13. **244.** 25. **245.** 4. **246.** 5. **247.** 7,2. **248.** 14,4. **249.** 10. **250.** 10. **251.** 4. **252.** 4. **253.** 78. **254.** 98. **255.** 84. **256.** 66. **257.** 136. **258.** 132. **259.** 14. **260.** 12. **261.** 20. **262.** 15. **263.** 55. **264.** 57. **265.** 19. **266.** 10. **267.** 20. **268.** 32. **269.** 9. **270.** 7,5. **271.** 6. **272.** 7. **273.** 16. **274.** 30. **275.** 6. **276.** 9. **277.** 6. **278.** 15.

279. 20. **280.** 16. **281.** 10. **282.** 12. **283.** 15. **284.** 11. **285.** 45. **286.** 60. **287.** 9. **288.** 15. **289.** 30. **290.** 40. **291.** 32. **292.** 40. **293.** 50. **294.** 60. **295.** 60. **296.** 50. **297.** 50. **298.** 55. **299.** 25. **300.** 25. **301.** 8. **302.** 10. **303.** 6,5. **304.** 10. **305.** 14. **306.** 7,5. **307.** 13. **308.** 9. **309.** 5,25. **310.** 3. **311.** 12. **312.** 24. **313.** 10. **314.** 13. **315.** 60. **316.** 45. **317.** 3. **318.** 8. **319.** 9. **320.** 10. **321.** 90. **322.** 150. **323.** 4. **324.** 7. **325.** 5. **326.** 11. **327.** 10. **328.** 14. **329.** 4. **330.** 16. **331.** 8. **332.** 20. **333.** 1,5. **334.** 6. **335.** 7. **336.** 10. **337.** 36. **338.** 10. **339.** 4. **340.** 10.

B6

341. 25. **342.** 20. **343.** 18. **344.** 24. **345.** 16. **346.** 13,5. **347.** 30. **348.** 32. **349.** 32. **350.** 27. **351.** 36. **352.** 36. **353.** 36. **354.** 24. **355.** 45,5. **356.** 49. **357.** 6. **358.** 12. **359.** 36. **360.** 33. **361.** 15. **362.** 12. **363.** 16. **364.** 6. **365.** 6. **366.** 4. **367.** 9. **368.** 32,5. **369.** 35. **370.** 30. **371.** 30. **372.** 24,5. **373.** 18. **374.** 18. **375.** 28. **376.** 24. **377.** 54. **378.** −6. **379.** 4. **380.** 6. **381.** −2. **382.** 4. **383.** 8. **384.** 10. **385.** 16. **386.** 20.

B9

387. 5. **388.** 72. **389.** 129. **390.** 368. **391.** 240. **392.** 156. **393.** 214. **394.** 214. **395.** 298. **396.** 190. **397.** 294. **398.** 214. **399.** 80. **400.** 8. **401.** 144. **402.** 9. **403.** 24. **404.** 3. **405.** 125. **406.** 18. **407.** 120. **408.** 94. **409.** 84. **410.** 180. **411.** 48. **412.** 540. **413.** 3. **414.** 6. **415.** 8. **416.** 10. **417.** 6. **418.** 32. **419.** 3. **420.** 495. **421.** 5. **422.** 3. **423.** 6. **424.** 4. **425.** 5. **426.** 1296. **427.** 676. **428.** 100. **429.** 27. **430.** 64. **431.** 60. **432.** 54. **433.** 9. **434.** 12. **435.** 32. **436.** 24. **437.** 15. **438.** 18. **439.** 30. **440.** 27. **441.** 20. **442.** 96. **443.** 60. **444.** 220,5. **445.** 8. **446.** 0,5625.

§ 16. Повышенный уровень (часть С)

447. 16. **448.** 6. **449.** 72. **450.** 54. **451.** 36. **452.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$. **453.** 3528. **454.** 8. **455.** 8. **456.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **457.** 13 : 12. **458.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **459.** 24. **460.** 2π. **461.** 3. **462.** 12. **463.** 84. **464.** 7. **465.** 100. **466.** 360. **467.** 30. **468.** $\operatorname{arctg}\frac{5}{48}$. **469.** $\arccos\frac{7}{15}$. **470.** 1. **471.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{16}$. **472.** $\operatorname{arctg} 3$. **473.** 4. **474.** $\arccos 0{,}6$. **475.** $\arccos\frac{23}{27}$.

476. 45. **477.** 16. **478.** 3. **479.** 6. **480.** 14. **481.** 16. **482.** $\frac{32}{3}$.
483. $\sqrt{3}+1$. **484.** $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$. **485.** 8. **486.** 1,6. **487.** 2.
488. $\sqrt{130}$. **489.** 172,8. **490.** 7. **491.** 4 и 20. **492.** 52. **493.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
494. 60. **495.** 8. **496.** 5. **497.** 36 и 8. **498.** 30; $12\left(2-\sqrt{3}\right)$. **499.** $\sqrt{2}$.
500. 1 или 1,5. **501.** 10. **502.** 15. **503.** 12. **504.** $\frac{96}{25}$. **505.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.
506. 2 и $\frac{8}{3}$. **507.** 270. **508.** 45. **509.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

Балаян Э.Н. Математика. Блиц-тренажеры для поступающих. — Ростов н/Д: Феникс, 2006.

Балаян Э.Н. Математика. Подготовка к ЕГЭ. — Ростов н/Д: Феникс, 2011.

Балаян Э.Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы. — 10-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2011.

Методическое пособие по математике для поступающих в вузы / М.И. Шабунин [и др.]. — М.: Физмат-книга, 2006.

Райхмист Р.Б. Задачи по математике для поступающих в вузы. — М.: Высшая школа, 1994.

Сборник задач по элементарной математике / С.Е. Ляпин [и др.]. — М.: Просвещение, 1998.

Симонов А.Я. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. — М.: Просвещение, 1991.

СОДЕРЖАНИЕ

Серия «Большая перемена»

Балаян Эдуард Николаевич

РЕПЕТИТОР ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА И ЕГЭ
7–11 КЛАССЫ

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 05.07.2011. Подписано в печать 06.09.2011.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18,48. Тираж 2500 экз.
Заказ № 450.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.