

ПОДГОТОВКА К ГИА
ВЫСШИЙ УРОВЕНЬ КАЧЕСТВА

9

класс

ГИА

2013

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

- ✓ Задания всех уровней сложности
- ✓ Решения и ответы



ПОДГОТОВКА К ГИА
ВЫСШИЙ УРОВЕНЬ КАЧЕСТВА **9** класс

ГИА



2013

В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Рекомендовано «Институтом содержания и методов обучения»
Российской академии образования

Москва  **ЭКСМО** 2012

УДК 373.167.1:51

ББК 22.14я721

К 75

Об авторах:

В. В. Кочагин — кандидат педагогических наук
М. Н. Кочагина — кандидат педагогических наук, доцент кафедры
математического анализа и методики преподавания математики
ГОУ ВПО МПГУ

Кочагин В. В.

К 75 ГИА 2013. Математика : сборник заданий : 9 класс / В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина. — М.: Эксмо, 2012. — 336 с. — (Государственная (итоговая) аттестация (в новой форме) : 9 класс. Сборник заданий).

ISBN 978-5-699-57705-7

Издание адресовано учащимся 9-го класса и предназначено для подготовки к государственной (итоговой) аттестации (в новой форме) по математике.

В пособие включены:

- задания частей В и С, сгруппированные по темам;
- справочный теоретический материал;
- ответы ко всем заданиям;
- решение заданий с развернутым ответом.

Представлены все учебные темы, знание которых проверяется экзаменом.

Издание окажет помощь учителям, репетиторам и родителям при подготовке учащихся к государственной итоговой аттестации по математике.

УДК 373.167.1:51

ББК 22.14я721

ISBN 978-5-699-57705-7

© Кочагин В. В., Кочагина М. Н., 2012
© Оформление. ООО «Издательство
«Эксмо», 2012

Содержание

Введение	6
--------------------	---

РАЗДЕЛ 1. НОВАЯ ФОРМА ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 9-Х КЛАССОВ: ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ И СОДЕРЖАНИЯ . . .	8
---	----------

РАЗДЕЛ 2. ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ	13
---	-----------

Тема 1. Числа и выражения. Преобразование выражений	13
--	-----------

1.1. Делимость натуральных чисел	13
Теоретические сведения	13
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	15
Задания для самостоятельного решения	21
1.2. Приближенные значения	25
Теоретические сведения	25
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	26
Задания для самостоятельного решения	28
1.3. Степень с целым показателем	33
Теоретические сведения	33
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	34
Задания для самостоятельного решения	37
1.4. Квадратный корень. Корень третьей степени	41
Теоретические сведения	41
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	42
Задания для самостоятельного решения.	48

1.5. Выражения и преобразования	53
Теоретические сведения	53
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	54
Задания для самостоятельного решения	62
Тема 2. Уравнения	69
Теоретические сведения	69
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	71
Задания для самостоятельного решения	82
Тема 3. Системы уравнений	87
Теоретические сведения	87
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	87
Задания для самостоятельного решения	95
Тема 4. Неравенства	102
Теоретические сведения	102
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	103
Задания для самостоятельного решения	113
Тема 5. Прямоугольная система координат на плоскости	117
5.1. Уравнения прямой, параболы и гиперболы	117
Теоретические сведения	118
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	120
Задания для самостоятельного решения	128
5.2. Уравнение окружности	135
Теоретические сведения	135
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	135
Задания для самостоятельного решения	138
Тема 6. Функции	143
Теоретические сведения	144
Задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами)	147
Задания для самостоятельного решения	159

Тема 7. Арифметическая и геометрическая прогрессии	166
Теоретические сведения	166
Задания для активного обучения <i>(с комментариями, решениями, ответами)</i>	167
Задания для самостоятельной работы	175
Тема 8. Текстовые задачи	180
Задания для активного обучения <i>(с комментариями, решениями, ответами)</i>	180
Задания для самостоятельного решения	192
Тема 9. Элементы теории вероятностей	201
Теоретические сведения	201
Задания для активного обучения <i>(с комментариями, решениями, ответами)</i>	202
Задания для самостоятельного решения	203
Тема 10. Элементы статистики	205
Теоретические сведения	205
Задания для активного обучения <i>(с комментариями, решениями, ответами)</i>	205
Задания для самостоятельного решения	207
Тема 11. Уравнения и неравенства с модулем	209
Теоретические сведения	209
Задания для активного обучения <i>(с комментариями, решениями, ответами)</i>	210
Задания для самостоятельного решения	222
Тема 12. Уравнения и неравенства с параметром	225
Теоретические сведения	226
Задания для активного обучения <i>(с комментариями, решениями, ответами)</i>	226
Задания для самостоятельного решения	238
Тема 13. Планиметрия.	242
Теоретические сведения	242
Задания для активного обучения <i>(с комментариями, решениями, ответами)</i>	246
Задания для самостоятельного решения	263

УКАЗАНИЯ	272
Числа и выражения. Преобразование	
выражений	272
Уравнения	282
Системы уравнений	284
Неравенства	286
Прямоугольная система координат на плоскости . .	288
Функции	291
Арифметическая и геометрическая прогрессии . . .	295
Текстовые задачи	299
Уравнения и неравенства с модулем	302
Уравнения и неравенства с параметром	305
 ОТВЕТЫ	 313

Введение

Итоговый письменный экзамен по математике сдают все учащиеся 9-х классов.

Особенности такого экзамена:

- ❖ состоит из двух частей;
- ❖ первая часть экзаменационной работы содержит задания в тестовой форме;
- ❖ вторая часть содержит задания в традиционной форме, требующие полного обоснованного решения;
- ❖ оценивание работы осуществляется отметкой и рейтингом.

Структура экзаменационной работы и организация проведения экзамена отличаются от традиционной системы аттестации, поэтому и подготовка к экзамену должна быть другой.

В данном пособии представлены **все темы, которые входят в экзамен**. Каждой теме включает:

- ❖ основной теоретический материал;
- ❖ задания для активного обучения (с комментариями, решениями, ответами);
- ❖ задания для самостоятельного решения;
- ❖ указания и ответы ко всем заданиям.

Задания для самостоятельного решения в данном пособии полностью соответствуют уровню заданий обеих частей итоговой аттестации.

Надеемся, что данное пособие поможет девятиклассникам систематизировать свои знания по математике, узнать особенности заданий, предлагающихся на экзамене по математике, и научиться их выполнять.

Авторы выражают благодарность учащимся гимназии № 1534 г. Москвы и студентам математического факультета Московского городского педагогического университета за неоценимую помощь при подготовке данного пособия.

РАЗДЕЛ 1

НОВАЯ ФОРМА ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 9-х КЛАССОВ: ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ И СОДЕРЖАНИЯ

С 2005 года письменный экзамен по математике в 9-м классе в ряде регионов России, участвующих в эксперименте Министерства образования и науки РФ, проходит в новой форме. Все изменения в содержании и формах проведения экзамена связаны с необходимостью предъявления общих требований к уровню подготовки учащихся по математике и независимой процедуры оценки учебных достижений учащихся. Кроме того, в связи с введением профильного обучения в 10–11-х классах отбор учащихся в профильные классы может осуществляться по результатам экзамена без дополнительных испытаний.

Рассмотрим основные изменения в структуре экзаменационной работы по математике, организации ее проведения, ее оценивании и в методических рекомендациях по подготовке.

Структура работы. Текст экзаменационной работы печатается на индивидуальном бланке для каждого ученика. Предусмотрено 4 варианта работы для класса. Экзаменационная работа состоит из двух частей.

Первая часть содержит 18 заданий в тестовой форме. Учащиеся должны фиксировать ответы, полученные при решении заданий, в бланке с текстом работы. В этой части работы предлагаются задания трех типов:

- задания, в которых требуется выбрать из четырех предложенных ответов один верный;
- задания с кратким ответом, в которых требуется записать только ответ;
- задания на сопоставление, в которых требуется соотнести пары объектов.

Приведем примеры заданий каждого типа.

1. Запишите 0,00019 в стандартном виде.

1) $0,019 \cdot 10^{-2}$ 3) $1,9 \cdot 10^{-4}$

2) $0,19 \cdot 10^{-3}$ 4) $19 \cdot 10^{-5}$

2. Найдите значение выражения $\frac{m^3 \sqrt{7}}{7}$ при $m = -\sqrt{7}$.

Ответ: _____.

3. Соотнесите дроби, которые выражают доли некоторой величины, и соответствующие им проценты.

А. $\frac{1}{5}$ Б. $\frac{1}{4}$ В. $\frac{1}{2}$ Г. $\frac{1}{25}$

1) 4% 2) 50% 3) 20% 4) 25%

Вторая часть содержит 5 более сложных заданий, требующих записи хода решения. Уровень сложности заданий определяется баллом, который можно получить при правильном решении задания, — 2, 3 или 4 баллов. При выполнении заданий второй части нужно применять нестандартные приемы, уметь грамотно записывать решение, обосновывать свои рассуждения. Оформлять решения заданий второй части нужно на отдельных листах.

Время на выполнение работы. На выполнение всей работы отводится 4 часа. Тексты первой и второй частей работы выдаются в начале экзамена.

Содержание, проверяемое экзаменационными заданиями. Экзаменационные задания проверяют основные блоки содержания: числа, буквенные выражения, преобразования выражений, уравнения и текстовые задачи, неравенства, последовательности и прогрессии, графики и функции, элементы теории вероятностей и статистики, с 2012 года к ним планируется добавить элементы геометрии.

Система оценивания заданий. По результатам выполнения работы выставаются две оценки: отметки «2», «3», «4» или «5» — и рейтинг — сумма баллов за верно выполненные задания первой и второй частей.

Оценка «2» выставляется, если учащийся дал менее восьми верных ответов.

За каждое правильно решенное задание первой части начисляется 1 балл. Задания второй части оцениваются большим количеством баллов: за правильно решенное первое задание — 2 балла, за второе и третье — по 3 балла, за четвертое и пятое — по 4 балла. Для подсчета рейтинга учащегося нужно сложить количество баллов за первую и вторую части работы. Например, ученик правильно решил 12 заданий первой части, поэтому за эту часть он получил $12 \times 1 = 12$ баллов. Из второй части этот же ученик решил задание на 2 балла и на 3 балла, поэтому за вторую часть он получил $2 + 3 = 5$ баллов. Рейтинг этого ученика $12 + 5 = 17$ баллов. Как узнать, какую оценку получил ученик на экзамене? Для этого посмотрим на таблицу перевода рейтинга в оценку по пятибалльной шкале (2011 г.).

Количество набранных баллов	Оценка
8–14	«3»
15–21	«4»
22–34	«5»

Рейтингу в 17 баллов соответствует оценка «4».

Рекомендации по подготовке к экзамену с помощью пособия. Наиболее эффективно работу по подготовке к экзамену по алгебре можно построить по следующему плану:

1. Ознакомиться с разделом пособия «Новая форма итоговой аттестации по алгебре для учащихся 9 классов» с целью выяснения структуры экзаменационной работы.

2. Изучив (или повторив) теоретический материал первой темы основных вопросов содержания «Числа и выражения. Преобразование выражений», разобрать комментарии по решению типовых заданий этой темы и решить последовательно все предложенные задания.

3. Сравнить полученные ответы с ответами, приведенными в конце пособия. Обязательно разобраться с причинами появления ошибок (если такие будут), при необходи-

мости повторив теоретический материал или воспользовавшись указаниями к решению задач, которые предложены в разделе «Указания».

4. Работая так и дальше, последовательно переходить от одной темы к другой, от одного раздела к другому. Стараться запоминать основные приемы решения заданий.

5. Решать подготовительные варианты к экзамену или варианты экзамена по математике прошлых лет, которые можно найти в литературе, например: *Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А.* и др. Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9-м классе. — М.: Просвещение, 2010.

В случае ошибок в ответах или незнании способа выполнения какого-то задания повторить соответствующий теоретический вопрос по данному пособию и вернуться к решаемому варианту.

Рекомендации по поведению на экзамене. Во время проведения экзамена старайтесь не волноваться. Чем быстрее у вас получится сосредоточиться на решении заданий, тем скорее вы вспомните необходимые математические факты и приемы решения типовых заданий, а также поймете, что подготовка к экзамену на уроках в школе и с помощью данного пособия не прошла даром и вы можете многое решить. Однако все же не стоит забывать о самопроверке.

И еще, внимательно читайте *условие* и *требование* выполняемого задания. В заданиях первой части работы оценивается *только ответ на поставленный вопрос!*

Перед тем как приступить к выполнению заданий, просмотрите всю первую часть предложенной вам работы. Далее, не теряя времени, начинайте выполнять одно за другим задания первой части. Если какое-то задание вызвало затруднения, оставьте его и переходите к решению следующего. К пропущенным заданиям можно будет вернуться позже. Рекомендуем проверять себя после выполнения каждого задания, а также после выполнения заданий каждой части. Рекомендации по выполнению второй час-

ти работы такие же, как и для первой части, однако здесь еще следует следить за правильностью оформления решенных заданий. Очевидно, что надо стараться решить большее количество заданий, причем правильно. Перед тем как сдать работу, еще раз проверьте правильность заполнения бланка ответов, не осталось ли нерешенным какое-то задание.

Желаем успешной сдачи экзамена!

РАЗДЕЛ 2

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ

Тема 1. Числа и выражения.

Преобразование выражений

При выполнении заданий по преобразованию выражений используются различные свойства степени и арифметического квадратного корня. Вычисления и преобразования требуют повышенной концентрации внимания.

В первой части экзаменационной работы обычно требуется выполнить одно или два действия для получения результата по преобразованию целых и дробных выражений. Во второй части — преобразования многошаговые, причем часто приходится применять различные методы разложения выражений на множители.

1.1. ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

При выполнении заданий на делимость натуральных чисел используются различные свойства делимости, определение и свойства наибольшего общего делимого и наименьшего общего кратного двух чисел, а также признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Натуральное число a делится на натуральное число b , если существует натуральное число n , такое, что $a = bn$ (например, 32 делится на 4, так как $32 = 4 \cdot 8$).

Определение. Простым числом называется такое натуральное число, которое имеет только два натуральных делителя: 1 и само это число (например, число 7 делится только на 1 и на 7, поэтому 7 — простое число).

Определение. **Составным числом** называется такое натуральное число, которое имеет более двух натуральных делителей (например, число 8 делится на 1, на 2, на 4 и на 8, поэтому 8 — составное число).

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители, и причем только одним способом.

Способы, при которых произведения отличаются только порядком множителей, считаются за один способ.

Свойства делимости

Если в сумме натуральных чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число (например, сумма чисел $12 + 24 + 36$ делится на 12, так как каждое слагаемое суммы делится на 12).

Если в произведении натуральных чисел один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число (например, произведение чисел $12 \cdot 13 \cdot 14$ делится на 6, так как один из множителей — 12 делится на 6).

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Число делится **на 2** тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой (цифры 0, 2, 4, 6, 8 — четные; цифры 1, 3, 5, 7, 9 — нечетные; число 14 делится на 2, так как оканчивается цифрой 4).

Число делится **на 3** тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (например, число 84 делится на 3, так как сумма его цифр — $8 + 4 = 12$ делится на 3).

Число делится **на 5** тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 0 или 5 (например, число 45 делится на 5, так как оканчивается цифрой 5).

Число делится **на 9** тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (например, число 198 делится на 9, так как сумма его цифр — $1 + 9 + 8 = 18$ делится на 9).

Число делится **на 10** тогда и только тогда, когда оно оканчивается цифрой 0 (например, число 60 делится на 10, так как оканчивается цифрой 0).

Определение. Остатком от деления натурального числа a на натуральное число b называется такое натуральное число r , что разность $a - r$ делится на b , и $0 \leq r < b$.

Т.е. число a можно представить в виде $a = bn + r$, где n — некоторое натуральное число, а r — остаток (число n называют частным; например, число 17 можно представить следующим образом: $17 = 5 \cdot 3 + 2$, т.е. при делении на 5 число 17 дает остаток 2, а число 3 будет при этом частным).

Определение. Если натуральное число a делится на натуральное число b , то число b называют делителем числа a , а число a — кратным числа b (например, число 5 — делитель числа 45, а число 45 — кратное числа 5).

Определение. Пусть a и b натуральные числа. Число d называют общим делителем для a и b , если оно является делителем и для a , и для b (например, число 2 — делитель числа 12 и делитель числа 6, поэтому число 2 является общим делителем чисел 12 и 6).

Среди делителей чисел есть наибольший, который называют наибольшим общим делителем чисел a и b , и обозначают НОД ($a; b$) (например, НОД (12; 6) = 6).

Определение. Пусть a и b натуральные числа. Число k называют общим кратным для a и b , если оно кратно и a , и b (например, число 45 делится на 5 и на 3, поэтому является общим кратным чисел 5 и 3).

Среди общих кратных есть наименьший, который называют наименьшим общим кратным чисел a и b , и обозначают НОК ($a; b$) (например, НОК (3; 5) = 15).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Делители и кратные числа

Задание 1. Выберите из чисел 4, 6, 8, 10, 12 делители 20.

Решение.

Число 20 делится на 4 и на 10 и не делится на 6, 8, 12, поэтому только числа 4 и 10 являются делителями числа 20.

Ответ: 4, 10.

Задание 2. Выберите из чисел 4, 6, 8, 10, 12 кратные 4.

Решение.

Из указанных чисел на 4 делятся 4, 8, 12 и не делятся 6 и 10, поэтому только числа 4, 8 и 12 являются кратными 4.

Ответ: 4, 8, 12.

Задание 3. Докажите, что сумма $2^6 + 4^4 + 8^3$ делится на 13.

Решение.

Представим каждое слагаемое исходной суммы в виде степени 2: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$.

$$2^6 + 4^4 + 8^3 = 2^6 + (2^2)^4 + (2^3)^3 = 2^6 + 2^8 + 2^9.$$

Вынесем общий множитель 2^6 за скобки.

$$2^6 + 2^8 + 2^9 = 2^6(1 + 2^2 + 2^3) = 2^6 \cdot 13.$$

По свойствам делимости мы получили, что делителем $2^6 + 4^4 + 8^3$ является число 13, значит, сумма $2^6 + 4^4 + 8^3$ делится на 13.

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Задание 4. Укажите число, которое делится на 3.

- 1) 314 2) 315 3) 316 4) 317

Решение.

Применим к этим числам признак делимости на 3. Для этого вычислим сумму цифр в записи каждого из этих чисел.

314 — сумма цифр $3 + 1 + 4 = 8$ не делится на 3.

315 — сумма цифр $3 + 1 + 5 = 9$ делится на 3.

316 — сумма цифр $3 + 1 + 6 = 10$ не делится на 3.

317 — сумма цифр $3 + 1 + 7 = 11$ не делится на 3.

Итак, только у одного числа 315 сумма цифр делится на 3, значит, по признаку делимости на 3 и само число 315 делится на 3.

Ответ: 2.

Задание 5. Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число 123^* делилось на 2?

Решение.

Число 123^* делится на 2 тогда и только тогда, когда оно оканчивается четной цифрой, значит, вместо * можно поставить четные цифры: 0, 2, 4, 6, 8.

Ответ: 0, 2, 4, 6, 8.

Задание 6. Найдите последнюю цифру числа $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

Решение.

Число $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ делится на 2 и на 5, значит, оно делится и на 10. Поэтому его последняя цифра равна 0.

Ответ: 0.

Деление с остатком

Задание 7. Остаток от деления числа 123 на 8 равен:

1) 1 2) 2 3) 3 4) 7

Решение.

Выполним деление уголком.

$$\begin{array}{r} 123 \overline{)8} \\ - 8 \overline{)15} \\ \hline 43 \\ - 40 \overline{)3} \\ \hline 3 \end{array}$$

Остаток от деления числа 123 на 8 равен 3.

Ответ: 3.

Задание 8. Найдите последнюю цифру числа 2^{2010} .

Решение.

Возводить в степень число 2 долго, поэтому исследуем вопрос о том, какими цифрами могут оканчиваться степени числа 2.

Рассмотрим последовательные натуральные степени числа 2.

$$\begin{array}{llll} 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16 \\ 2^5 = 32 & 2^6 = 64 & 2^7 = 128 & 2^8 = 256 \\ 2^9 = 512 & 2^{10} = 1024 & \dots & \end{array}$$

Заметим, что если показатель степени 2 при делении на 4 дает остаток 1 (1, 5, 9, ...), то последняя цифра в записи числа равна 2.

Если показатель степени 2 при делении на 4 дает остаток 2 (2, 6, 10, ...), то последняя цифра в записи числа равна 4.

Если показатель степени 2 при делении на 4 дает остаток 3 (3, 7, ...), то последняя цифра — 8.

Если показатель степени 2 делится на 4 (1, 5, ...), то последняя цифра — 6.

Рассмотрим число 2010.

$$2010 = 2008 + 2 = 4 \cdot 502 + 2.$$

Значит, последняя цифра в записи числа 2^{2010} равна 4.

Ответ: 4.

Задание 9. Остаток от деления некоторого натурального числа на 25 равен 7. Найдите остаток от деления этого числа на 5.

Решение.

Если остаток от деления некоторого натурального числа x на 25 равен 7, то само число можно записать в виде $x = 25n + 7$, где n — некоторое натуральное число.

Так как надо найти остаток от деления исходного числа на 5, преобразуем это число следующим образом: $25n + 7 = 25n + 5 + 2 = 5(5n + 1) + 2$, где $5n + 1$ — некоторое натуральное число, значит остаток от деления исходного числа на 5 равен 2.

Ответ: 2.

Замечание: число $x = 25n + 7$ можно представить в виде $x = 5 \cdot 5n + 7$, где $5n$ — некоторое натуральное число, но число 7 не будет остатком от деления числа x на 5, так как $7 > 5$ (см. определение остатка от деления).

Задание 10. Остаток от деления некоторого натурального числа на 5 равен 2. Найдите остаток от деления этого числа на 25.

Решение.

Если остаток от деления некоторого натурального числа x на 5 равен 2, то его можно записать в виде $x = 5n + 2$, где n — некоторое натуральное число.

Число n неизвестно, поэтому следует рассмотреть все случаи при делении числа n на 5: число n делится на 5; число n дает в остатке от деления на 5 числа 1, 2, 3, 4.

Если число n делится на 5, то его можно представить в виде $n = 5m$, где m — некоторое натуральное число. И исходное число имеет вид $x = 5 \cdot 5m + 2 = 25m + 2$, тогда остаток от деления его на 25 равен 2.

Если число n при делении на 5 дает остаток 1, то его можно представить в виде $n = 5m + 1$. И исходное число имеет вид $x = 5 \cdot (5m + 1) + 2 = 25m + 7$, тогда остаток от деления его на 25 равен 7.

Если число n при делении на 5 дает остаток 2, то его можно представить в виде $n = 5m + 2$. И исходное число имеет вид $x = 5 \cdot (5m + 2) + 2 = 25m + 12$, тогда остаток от деления его на 25 равен 12.

Рассуждая аналогично, понимаем, что исходное число при делении на 25 может давать остатки 17 и 22.

Ответ: 2, 7, 12, 17, 22.

Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители

При разложении натуральных чисел на простые множители используют признаки делимости.

Задание 11. Разложите на простые множители число 720.

Решение.

Сначала определим, на какие простые числа делится 720.

1) так как число 720 оканчивается четным числом 0, то 720 делится на 2;

2) так как 720 оканчивается числом 0, то делится на 5;
 3) так как сумма цифр числа 720 равна $7 + 2 + 0 = 9$, то делится на 3.

Удобно разложение на простые множители записывать столбиком: делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым.

720		2
360		2
180		2
90		2
45		3
15		3
5		5
1		

Итак, мы получили, что $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Ответ: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Наименьшее общее кратное, наибольший общий делитель

Задание 12. Наибольший общий делитель чисел $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ равен

- 1) 5 2) $2 \cdot 3 \cdot 5$ 3) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ 4) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Решение.

В разложении числа a на простые множители число 2 входит в третьей степени, а в разложении числа b на простые множители число 2 входит в первой степени, значит, в разложении на простые множители наибольшего общего делителя чисел a и b число 2 должно присутствовать в меньшей степени, т.е. в первой степени.

Аналогично можно получить, что в разложении на простые множители наибольшего общего делителя для a и b число 3 должно присутствовать в первой степени, а число 5 — во второй.

Поэтому НОД ($a; b$) = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Ответ: 4.

Задание 13. Найдите наименьшее общее кратное чисел 420 и 270.

Решение.

Разложим каждое из данных чисел на простые множители.

420	2	270	2
210	2	135	3
105	3	45	3
35	5	15	3
7	7	5	5
1		1	

В разложении числа 420 на простые множители число 2 входит во второй степени, а в разложении числа 270 на простые множители число 2 входит в первой степени, значит, *в разложении на простые множители наименьшего общего кратного число 2 должно присутствовать в большей степени, т.е. во второй степени.*

Аналогично рассматривая степени чисел 3, 5 и 7, можно получить, что в разложении на простые множители наибольшего общего делителя чисел 420 и 270 число 3 должно присутствовать в третьей степени, а числа 5 и 7 — в первой.

Поэтому $\text{НОК}(420; 270) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780$.

Ответ: $\text{НОК}(420; 270) = 3780$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Какое из чисел является делителем 36?
1) 8 2) 12 3) 24 4) 72
2. Какое из чисел **не является** делителем 50?
1) 5 2) 10 3) 20 4) 50
3. Какое из чисел является кратным 36?
1) 9 2) 18 3) 48 4) 72
4. Какое из чисел является делителем 36 и кратным 6?
1) 24 2) 12 3) 9 4) 72

5. Какое из чисел **не является** кратным 3?

- 1) 15 2) 27 3) 35 4) 45

6. Сколько натуральных делителей имеет число 12?

Ответ: _____.

7. Сколько четных чисел удовлетворяет неравенству $11 < x < 20$?

Ответ: _____.

8. Какие цифры надо поставить вместо *, чтобы число $543*$ делилось на 2?

Ответ: _____.

9. Какие цифры надо поставить вместо *, чтобы число $542*$ делилось на 3?

Ответ: _____.

10. Какие цифры надо поставить вместо *, чтобы число $543*$ делилось на 5?

Ответ: _____.

11. Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число $542*$ делилось на 6?

Ответ: _____.

12. Какую цифру надо поставить вместо *, чтобы число $541*$ делилось на 15?

Ответ: _____.

13. Остаток от деления числа 94 на 7 равен

- 1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

14. Частное от деления числа 94 на 7 равно

- 1) 11 2) 12 3) 13 4) 14

15. Наибольший общий делитель чисел

$a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и $b = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ равен

- 1) 5 3) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
2) $2 \cdot 3 \cdot 5$ 4) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$

16. Наименьшее общее кратное чисел $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ равно

- 1) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ 3) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
2) $2 \cdot 3 \cdot 5$ 4) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

ЧАСТЬ II**Задания на 2 балла**

17. Докажите, что сумма $2^5 + 4^3 + 8^3$ делится на 19.
18. Докажите, что $\frac{1}{3} \cdot 9^4 - 81 - 3^6$ делится на 17.
19. Найдите последнюю цифру числа $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$.
20. Разложите на простые множители число 360.
21. Разложите на простые множители число 792.
22. Найдите наименьшее общее кратное чисел 180 и 270.
23. Найдите наибольший общий делитель чисел 180 и 270.
24. Найдите наименьшее общее кратное чисел 168 и 450.
25. Найдите наибольший общий делитель чисел 168 и 450.
26. Сократите дробь $\frac{660}{924}$.
27. Сократите дробь $\frac{462}{990}$.
28. Какие простые числа являются решениями неравенства $18 < x < 27$?
29. Сколькими способами можно разложить на два натуральных множителя число 12? Способы, при которых произведения отличаются только порядком множителей, считаются за один способ.

Задания на 3 балла

30. Найдите последнюю цифру числа 3^{100} .
31. Остаток от деления некоторого натурального числа на 16 равен 9. Найдите остаток от деления этого числа на 4.
32. Остаток от деления некоторого натурального числа на 4 равен 1. Найдите остаток от деления этого числа на 16.
33. При делении на 12 число a дает остаток 7. Какой остаток получится при делении на 12 числа $a^2 - 2a + 5$?

34. При делении на 5 одно целое число дает остаток 2, а другое — остаток 4. Найдите остаток от деления на 5 суммы этих чисел.

35. При делении на 5 одно целое число дает остаток 2, а другое — остаток 4. Найдите остаток от деления на 5 произведения этих чисел.

36. Сколько натуральных делителей имеет число $5^5 - 25^2 + 125^2$?

37. Найдите все четырехзначные числа, в записи которых входят только цифры 1, 2 и которые делятся и на 2, и на 3.

38. Какую цифру надо приписать к числу 14 слева и справа, чтобы получилось число, делящееся на 3?

39. Вдоль дороги от деревни Видное поставили столбы через каждые 48 метров. Эти столбы решили заменить другими, поставив их на расстоянии 60 метров друг от друга. Найдите расстояние от деревни Видное до ближайшего столба, который будет стоять на месте старого.

40. Пакет сока стоит 19 р. 50 к. Какое наибольшее число таких пакетов можно купить на 220 р.?

41. Для учащихся третьего класса приготовили одинаковые подарки. Во всех подарках было 120 блокнотов, 280 ручек и 320 карандашей. Сколько учащихся в классе, если известно, что их больше 30 человек?

Задания на 4 балла

42. Может ли при делении квадрата натурального числа на 4 получиться остаток 2?

43. Докажите, что на прямой $2x + 4y = 3$ нет ни одной точки с целочисленными координатами.

44. Остаток от деления некоторого натурального числа на 6 равен 3, остаток от деления этого же числа на 15 равен 1. Найдите остаток от деления этого числа на 30.

45. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 7$.

46. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $xy + 3x = y + 8$.

47. На складе есть шоколадки двух видов: стоимостью 9 р. и стоимостью 15 р. Может ли стоимость всех шоколадок быть равной 2009 р.?

48. Найдите периметр треугольника, если длины двух его сторон равны 1 см и 9 см, а длина третьей стороны является натуральным числом.

49. На графике $y = \frac{x+5}{x+1}$ найдите все такие точки, абсциссы и ординаты которых являются натуральными числами.

50. В книге пронумеровали все страницы от 1 до 45. Сколько раз использовали цифру 3?

1.2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При измерении различных величин (масса, температура, скорость и т. д.) и при округлении чисел используют приближенные значения. Например, длину рейки 2,201 м можно заменить приближенным значением длины — 2,2 м (конечно, если такая точность допускается).

Правило округления десятичных дробей

Для округления десятичной дроби до какого-нибудь заданного разряда нужно знать, какая цифра следует за этим разрядом:

— если за разрядом следует любая из цифр 0, 1, 2, 3 или 4, — то все цифры, следующие за разрядом, отбрасывают (например, округляя до сотых число 5,7432, получим 5,74);

— если за разрядом следует любая из цифр: 5, 6, 7, 8 или 9, — то цифра разряда увеличивается на единицу, а все следующие за ней цифры отбрасываются (например, округляя до сотых число 5,7463, получим 5,75).

Абсолютная погрешность приближенного значения

Модуль разности между точным (x) и приближенным значением (a) некоторого числа называется абсолютной погрешностью (h) приближенного значения числа, т.е.

$$|x - a| = h.$$

Например, если длина рейки 2,201 м, а ее приближенное значение — 2,2 м, то $|2,201 - 2,2| = 0,001$ — абсолютная погрешность.

Задавая абсолютную погрешность измерения h (точность измерения) некоторого приближенного значения a , точное значение измеряемой величины (x) будет находиться между $a - h$ и $a + h$, т.е. $a - h \leq x \leq a + h$. Это неравенство можно записать в виде $x = a \pm h$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Округление натуральных чисел и десятичных дробей

Задание 1. В одной столовой ложке — 25 г риса, а в один стакан входит 235 г риса. Сколько целых ложек риса помещается в одном стакане?

Решение.

1 способ. В 10 ложках риса содержится $10 \times 25 = 250$ г риса. Этого много для одного стакана. Если возьмем 9 ложек риса, то получим $9 \cdot 25 = 225$ г риса, значит, в одном стакане помещается 9 целых ложек риса.

2 способ. В один стакан входит $235 : 25 = 9,4$ ложек риса. Получаем, что в один стакан входит 9 целых ложек риса.

Ответ: 9 ложек.

Задание 2. Округлите число 7,8157.

- а) до десятых
- б) до сотых
- в) до тысячных
- д) до целых

Решение.

а) У десятичной дроби $7,8\underline{1}57$ в следующем разряде после **десятых** стоит цифра 1, значит, оставим цифру десятых без изменения: $7,8157 \approx 7,8$.

б) У десятичной дроби $7,81\underline{5}7$ в следующем разряде после **сотых** стоит цифра 5, значит, увеличим цифру сотых на единицу: $7,8157 \approx 7,82$.

в) У десятичной дроби $7,815\underline{7}$ в следующем разряде после **тысячных** стоит цифра 7, значит, увеличим цифру тысячных на единицу: $7,8157 \approx 7,816$.

г) У десятичной дроби $7,8157$ цифра десятых равна 8, значит, $7,8157 \approx 8$.

Ответ: а) 7,8; б) 7,82; в) 7,816; г) 8.

Задание 3. Найдите площадь листа бумаги, размеры которого $21 \text{ см} \times 29,7 \text{ см}$. Результат округлите до целых.

Решение.

Площадь прямоугольного листа найдем, перемножив его длину и ширину: $21 \cdot 29,7 = 623,7 \text{ (см}^2\text{)}$. Округлим до целых число 623,7. После запятой стоит цифра 7, значит, по правилу округления десятичных дробей получим 624 см^2 .

Ответ: 624 см^2 .

Прикидка и оценка результатов вычислений

Задание 4. Оцените значение выражения $3x + 2y$, если $1 < x < 2$; $3 < y < 4$.

1) (3; 4)

2) (9; 14)

3) (6; 10)

4) (4; 8)

Решение.

Если $1 < x < 2$, тогда по свойствам числовых неравенств $3 < 3x < 6$. Аналогично оценим $2y$: $3 < y < 4$; $6 < 2y < 8$. Оценим сумму $3x + 2y$, для этого сложим столбиком два неравенства с положительными членами:

$$3 < 3x < 6$$

$$+ 6 < 2y < 8$$

$$9 < 3x + 2y < 14$$

Ответ: 2.

**Запись приближенных значений в виде $x = a \pm h$,
переход к записи в виде двойного неравенства**

Задание 5. В каких границах заключено число $p = 2,35 \pm 0,02$?

- 1) $2,34 \leq p \leq 2,38$ 3) $2,35 \leq p \leq 2,39$
2) $2,33 \leq p \leq 2,37$ 4) $2,36 \leq p \leq 2,40$

Решение.

От записи приближенного значения числа p в виде $p = 2,35 \pm 0,02$ перейдем к записи в виде двойного неравенства:

$$2,35 - 0,02 \leq M \leq 2,35 + 0,02; \quad 2,33 \leq p \leq 2,37.$$

Ответ: 2.

Задание 6. На упаковке пачки сливочного масла есть информация: «Масса 500 ± 7 г». Укажите, сколько масла не может быть в этой пачке?

- 1) 502 г 2) 507 г 3) 492 г 4) 497 г

Решение.

От записи приближенного значения массы (M) в виде $M = 500 \pm 7$ перейдем к записи в виде двойного неравенства: $500 - 7 \leq M \leq 500 + 7$; $493 \leq M \leq 507$. Масса пачки масла должна быть от 493 до 507 г (включая значения 493 г и 507 г). Из предложенных ответов в этот промежуток не входит только одно значение: 492 г.

Ответ: 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Пирамида Хеопса сложена из 2 миллионов каменных глыб, каждая из которых весит не меньше 2 т. Каков вес пирамиды в килограммах?

Ответ: _____.

2. Сколько метров составляет 1 английский ярд (мера длины), если $150 \text{ м} = 164 \text{ ярда}$. Ответ округлите до второго знака.

Ответ: _____.

3. За 700 лет Пизанская башня отклонилась от своего центра на 5 м. На сколько сантиметров в год она «падает»? Ответ округлите до десятых.

Ответ: _____.

4. Высота самого высокого здания мира — телебашни Си-Эн Тауэр в Канаде — 553 м 33 см. Определите высоту одного этажа этой башни, если всего она имеет 147 этажей одинаковой высоты. Ответ округлите до десятых.

Ответ: _____.

5. Луч Солнца долетает до Земли за 8 минут. За такое время он пролетает 150 млрд км. Определите, с какой скоростью он летит (ответ выразите в км/с и округлите до целого числа).

Ответ: _____.

6. Звук распространяется в воздухе со скоростью 330 м/с, а в воде — со скоростью 1450 м/с. Во сколько раз быстрее распространяется звук в воде? Ответ округлите до десятых.

Ответ: _____.

7. Иррациональное число $\sqrt{2}$ можно представить в бесконечной десятичной дроби. Округлите эту дробь до сотых.

Ответ: _____.

8. Билет стоит 35 р. Для покупки какого числа билетов недостаточно 110 р.?

- 1) одного
- 2) двух
- 3) трех
- 4) четырех

9. Билет на аттракцион стоит 50 р. Для детей скидка — 50%. 220 р. **достаточно**, чтобы покататься на аттракционе

- 1) 5 взрослых и 5 детей
- 2) 2 взрослых и 5 детей
- 3) 1 взрослого и 6 детей
- 4) 3 взрослых и 3 детей

10. Из прямоугольного листа, размеры которого 21 см \times 29,7 см, нужно вырезать для оригами квадрат наибольшей площади. Найдите площадь остатка листа. Результат округлите до целого числа.

Ответ: _____.

11. Округлите бесконечную десятичную дробь 0,(61) до сотых.

Ответ: _____.

12. Переведите обыкновенную дробь $\frac{1}{7}$ в десятичную. Результат округлите до тысячных.

Ответ: _____.

13. Переведите обыкновенную дробь $\frac{5}{7}$ в десятичную. Результат округлите до десятых.

Ответ: _____.

14. Переведите обыкновенную дробь $\frac{3}{11}$ в десятичную. Результат округлите до сотых.

Ответ: _____.

15. Расстояние от Земли до Луны равно 384 404 км. Округлите это число до тысяч километров.

Ответ: _____.

16. Оцените значение выражения $2x + y$, если

$$2 < x < 3; 5 < y < 6.$$

1) (4; 6) 2) (9; 12) 3) (9; 10) 4) (10; 11)

17. Оцените значение выражения $3x + y$, если

$$1 < x < 2; 4 < y < 5.$$

1) (5; 7) 2) (3; 6) 3) (8; 10) 4) (7; 11)

18. Оцените значение выражения $3xy$, если

$$1 < x < 2; 5 < y < 6.$$

1) (5; 12) 2) (8; 11) 3) (15; 36) 4) (18; 30)

19. Вес среднего куриного яйца 43 г, в том числе 23 г белка и 20 г желтка. Найдите отношение веса желтка к весу яйца и укажите, в какой промежуток оно входит.

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) (0,3; 0,4) | 3) (0,5; 0,6) |
| 2) (0,4; 0,5) | 4) (2,1; 2,2) |

20. Вес среднего куриного яйца 43 г, в том числе 23 г белка и 20 г желтка. Найдите отношение веса белка к весу яйца и укажите, в какой промежуток оно входит.

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) (0,3; 0,4) | 3) (0,5; 0,6) |
| 2) (0,4; 0,5) | 4) (2,1; 2,2) |

21. Вес среднего куриного яйца 43 г, в том числе 23 г белка и 20 г желтка. Найдите отношение веса желтка к весу белка и укажите, в какой промежуток оно входит.

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) (0,9; 1) | 3) (0,5; 0,6) |
| 2) (0,4; 0,5) | 4) (0,8; 0,9) |

22. Билет на аттракцион для взрослого стоит 50 р., а для детей — дешевле. Достаточно ли 250 р. для посещения аттракциона двум взрослым с тремя детьми?

- 1) достаточно
- 2) недостаточно
- 3) недостаточно данных
- 4) лишние данные

23. Билет на аттракцион для взрослого стоит 50 р., а для детей — дешевле. Достаточно ли 220 р. для посещения аттракциона двум взрослым с тремя детьми?

- 1) достаточно
- 2) недостаточно
- 3) недостаточно данных
- 4) лишние данные

24. Число x взято из промежутка (1; 2). Какое из значений выражений больше?

- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1) $x \cdot 0,15$ | 3) $x \cdot 0,115$ |
| 2) $x \cdot 0,1$ | 4) $x \cdot 0,015$ |

25. Число x взято из промежутка (0; 1). Какое из значений выражений больше?

- | | | | |
|------------------|----------------|-------------------|------------------|
| 1) $x \cdot 0,1$ | 2) $x \cdot 1$ | 3) $x \cdot 0,01$ | 4) $x \cdot 0,2$ |
|------------------|----------------|-------------------|------------------|

26. Из какого промежутка следует взять число x , чтобы значение выражения $\frac{x}{0,2}$ было больше 1?

- 1) (0,2; 0,5) 3) (0,1; 0,2)
2) (0; 0,1) 4) (-0,2; -0,1)

27. В каких границах заключено число $p = 6,14 \pm 0,02$?

- 1) $6,14 \leq p \leq 6,16$ 3) $6,13 \leq p \leq 6,17$
2) $6,12 \leq p \leq 6,16$ 4) $6,14 \leq p \leq 6,18$

28. Число $y = 5,72 \pm 0,01$ заключено в границах:

- 1) $5,71 \leq y \leq 5,72$ 3) $5,72 \leq y \leq 5,73$
2) $5,71 \leq y \leq 5,73$ 4) $-5,71 \leq y \leq -5,73$

29. Число $y = 3,14 \pm 0,01$ заключено в границах:

- 1) $3,13 \leq y \leq 3,15$ 3) $3,14 \leq y \leq 3,15$
2) $3,13 \leq y \leq 3,14$ 4) $-3,13 \leq y \leq -3,15$

30. Число $y = 2,75 \pm 0,01$ заключено в границах:

- 1) $2,74 \leq y \leq 2,75$ 3) $2,74 \leq y \leq 2,76$
2) $2,74 < y < 2,76$ 4) $2,75 \leq y \leq 2,76$

31. В каких границах заключено число $p = 3,45 \pm 0,02$?

- 1) $3,46 \leq p \leq 3,48$ 3) $3,43 \leq p \leq 3,47$
2) $3,45 \leq p \leq 3,47$ 4) $3,44 \leq p \leq 3,46$

32. Длина одного мотка пряжи для вязания $150 \pm 0,2$ м. Какой длины **не может** быть пряжа из этого мотка?

- 1) 149,8 м 2) 150 м 3) 152 м 4) 150,2 м

33. Среди условий правильного хранения какао-порошка есть важное температурное условие: температура воздуха должна составлять $18 \pm 3^\circ\text{C}$. При какой температуре **нельзя** хранить какао?

- 1) 18°C 2) 20°C 3) 15°C 4) $21,5^\circ\text{C}$

34. В зависимости от влажности масса пачки соли может изменяться, но она всегда остается в пределах 1000 ± 30 г. Запишите возможные значения массы пачки соли (с помощью двойного неравенства).

Ответ: _____.

1.3. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие степени с целым показателем

Определение. Степенью числа a с натуральным показателем n называется число, записываемое как a^n и определяемое по правилу

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n \geq 2; \\ a, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Некоторые степени чисел 2, 3, 4, 5

$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	$2^6=64$
$3^0=1$	$3^1=3$	$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$	$3^5=243$	$3^6=729$
$4^0=1$	$4^1=4$	$4^2=16$	$4^3=64$	$4^4=256$		
$5^0=1$	$5^1=5$	$5^2=25$	$5^3=125$	$5^4=625$		

Определение. Степенью числа a ($a \neq 0$) с целым показателем m называется число, записываемое как a^m и определяемое по правилу

$$a^m = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ раз}}, & \text{если } m \text{ — натуральное число, } m \geq 2; \\ a, & \text{если } m = 1; \\ 1, & \text{если } m = 0; \\ \frac{1}{a^n}, & \text{если } m = -n, (-n) \text{ — целое отрицательное число.} \end{cases}$$

Выражения «нуль в нулевой степени» и «нуль в отрицательной степени» не определены.

Если основанием степени является обыкновенная дробь, то удобно использовать правило, которое следует непосредственно из определения:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n, \text{ если } n \text{ — целое число, } p \neq 0, q \neq 0.$$

$$\text{Например, } \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{1}\right)^1 = 8.$$

**Свойства степени с целым показателем,
преобразование выражений, содержащих
степени с целым показателем**

Свойства степени с целым показателем
(m, n — целые числа, $a \neq 0$)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (5)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (6)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (7)$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m \quad (b \neq 0), \quad (8)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0). \quad (9)$$

Запись чисел с использованием степеней числа 10
(стандартный вид числа)

Если положительное число a представлено в виде $a_1 \cdot 10^n$, где $1 \leq a_1 < 10$, n — целое число, то говорят, что число a записано в **стандартном виде**.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Задание 1. Соотнесите выражения с их значениями

А. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; Б. $\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1}$; В. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

1) $\frac{4}{9}$

2) $\frac{9}{4}$

3) $-\frac{9}{4}$

Решение.

По определению степени с натуральным показателем:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

По определению степени с целым показателем:

$$\left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{4}{9}} = 1 : \left(-\frac{4}{9}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = -\frac{4}{9}.$$

По определению степени с целым показателем:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1 : \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 : \frac{4}{9} = 1 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$$

Ответ: А. — 1; Б. — 3; В. — 2.

Задание 2. Расположите выражения 5^{-1} ; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 5^0 ; $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ в порядке возрастания их значений.

Решение.

Найдем значение каждого числового выражения.

По определению степени с целым показателем: $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

По определению степени с целым показателем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 1 : \frac{1}{5} = 1 \cdot 5 = 5.$$

По определению степени с целым показателем: $5^0 = 1$.

По определению степени с натуральным показателем:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}.$$

Сравним значения $\frac{1}{5}$, 5, 1, $\frac{1}{25}$ заданных числовых выражений:

$$\frac{1}{25} < \frac{1}{5} < 1 < 5.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; 5^{-1} ; 5^0 ; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

Задание 3. Вычислите: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3} : 4^{-5} + 2007^0$.

Решение.

Преобразуем каждое слагаемое, используя свойства степеней.

В выражении $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ перейдем к степени с натуральным показателем: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4^2$.

В выражении $4^{-3} : 4^{-5}$ применим свойство (6):

$$4^{-3} : 4^{-5} = 4^{-3-(-5)} = 4^2.$$

По определению степени с целым показателем $2007^0 = 1$.

В итоге получим

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - 4^{-3} : 4^{-5} + 2007^0 = 4^2 - 4^2 + 1 = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 4. Запишите 0,0032 в стандартном виде.

Решение.

Чтобы представить число 0,0032 в стандартном виде, нужно записать его в виде, $a_1 \cdot 10^n$, где $1 \leq a_1 < 10$. Перенесем запятую в числе 0,0032 на три знака вправо (только в этом случае получим $1 \leq 3,2 < 10$). Но после переноса запятой получаем число 3,2, которое больше числа 0,0032 в 10^3 раз, поэтому, чтобы число не изменилось, результат нужно умножить на 10^{-3} . В итоге получим, что $0,0032 = 3,2 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: $3,2 \cdot 10^{-3}$.

Задание 5. Переведите 155,4 м в: а) километры; б) сантиметры; в) миллиметры.

Решение.

А) Так как 1 км = 1000 м, решим пропорцию

$$\begin{aligned} 1 \text{ км} &= 1000 \text{ м} \\ x &= 155,4 \text{ м}, \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 \cdot 155,4}{1000} = 0,1554.$$

Пропорцию можно заменить рассуждениями о том, что в 155,4 м в тысячу раз меньше километров, поэтому

$$155,4 : 1000 = 0,1554 \text{ км.}$$

Ответ: 0,1554 км или $1,554 \cdot 10^{-1}$ км.

Б) Так как 1 м = 100 см,

$$\text{то } 155,4 \text{ м} = 155,4 \cdot 100 \text{ см} = 15\,540 \text{ см.}$$

Ответ: 15 540 см или $1,554 \cdot 10^4$ см.

В) Зная, что в 1 м — 1000 мм, найдем, что в 155,4 м — 155 400 мм.

Ответ: 155 400 мм или $1,554 \cdot 10^5$ мм.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Среди значений выражений 2^{-1} ; 3^{-1} ; 4^{-1} ; 5^{-1} укажите наибольшее.

- 1) 2^{-1} 2) 3^{-1} 3) 4^{-1} 4) 5^{-1}

2. Среди значений выражений 2^{-1} ; 3^{-1} ; 4^{-1} ; 5^{-1} укажите наименьшее.

- 1) 2^{-1} 2) 3^{-1} 3) 4^{-1} 4) 5^{-1}

3. Среди значений выражений 2^0 ; 2^{-1} ; 2^{-2} ; 2^{-3} укажите наименьшее.

- 1) 2^0 2) 2^{-1} 3) 2^{-2} 4) 2^{-3}

4. Среди значений выражений 2^0 ; 2^{-1} ; 2^{-2} ; 2^{-3} укажите наибольшее.

- 1) 2^0 2) 2^{-1} 3) 2^{-2} 4) 2^{-3}

5. Число $\frac{1}{64}$ равно

- 1) 2^{-3} 2) 4^{-4} 3) 4^{-3} 4) $64^{\frac{1}{2}}$

6. Значение выражения $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ равно

- 1) $\frac{4}{25}$ 2) $-\frac{4}{25}$ 3) $-\frac{4}{5}$ 4) $\frac{25}{4}$

7. Соотнесите выражения с их значениями

1) 4^{-1} ; 2) $(-4)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

А. 4 Б. $\frac{1}{4}$ В. $-\frac{1}{4}$

О т в е т: _____.

8. Среди значений выражений $(0,1)^0$; $(0,1)^{-1}$; $(0,1)^2$; $(0,1)^3$ укажите наибольшее.

1) $(0,1)^0$ 2) $(0,1)^{-1}$ 3) $(0,1)^2$ 4) $(0,1)^3$

9. Расположите в порядке возрастания числа:
0,0804; 0,08; 0,408.

1) 0,0804; 0,08; 0,408 3) 0,408; 0,08; 0,0804

2) 0,0804; 0,408; 0,08 4) 0,08; 0,0804; 0,408

10. Вычислите: $\frac{(2^{-3})^4}{16^{-2}}$.

О т в е т: _____.

11. Вычислите: $\frac{(5^{-1})^2}{25^{-2}}$.

О т в е т: _____.

12. Вычислите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 : 9^{-1}$.

О т в е т: _____.

13. Найдите значение выражения $\frac{2^{-2} \cdot 5^4 \cdot 10^{-5}}{2^{-3} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4}}$.

14. Найдите значение выражения $\frac{2,3 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-7}}{10^{-6}}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{2^{-2} \cdot 5^2 - 25}{2^{-5} \cdot 10}$.

16. Найдите значение выражения $\frac{4^2 \cdot 2^{-2} - 2^2 \cdot 4^{-2}}{2^{-3}}$.

17. Найдите значение выражения $\frac{2,7 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^2}{10^{-3}}$.

18. Найдите значение выражения $\frac{1,3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}$.

19. Найдите значение выражения $\frac{2^{-2} \cdot 3^2 + 3^{-2} \cdot 2^3}{6^{-2}}$.

20. Сравните: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} : (0,2)^{-2}$ и $\frac{1}{3^{-2}}$.

21. Сравните: $1,5 \cdot 4^{-2} : 10^{-1} \cdot 12^2$ и $0,1^{-2}$.

22. Представьте число 6 900 000 в стандартном виде.

- 1) $69 \cdot 10^5$ 3) $0,69 \cdot 10^7$
2) $690 \cdot 10^4$ 4) $6,9 \cdot 10^6$

23. Запишите выражение $17 \cdot 10^{-3}$ в стандартном виде.

- 1) $0,17 \cdot 10^{-4}$ 3) $1,7 \cdot 10^{-2}$
2) $0,17 \cdot 10^{-1}$ 4) $1,7 \cdot 10^{-4}$

24. Укажите число, равное 0,00049.

- 1) $4,9 \cdot 10^4$ 3) $4,9 \cdot 10^{-4}$
2) $4,9 \cdot 10^{-5}$ 4) $0,49 \cdot 10^4$

25. Запишите выражение $29 \cdot 10^{-3}$ в стандартном виде.

- 1) $0,29 \cdot 10^{-4}$ 3) $0,29 \cdot 10^{-1}$
2) $2,9 \cdot 10^{-2}$ 4) $2,9 \cdot 10^{-4}$

26. Запишите выражение $19 \cdot 10^{-3}$ в стандартном виде.

- 1) $0,19 \cdot 10^{-4}$ 3) $1,9 \cdot 10^{-4}$
2) $0,19 \cdot 10^{-1}$ 4) $1,9 \cdot 10^{-2}$

27. Укажите число, равное 0,00093.

- 1) $9,3 \cdot 10^4$ 3) $9,3 \cdot 10^{-3}$
2) $9,3 \cdot 10^{-4}$ 4) $0,93 \cdot 10^4$

28. Представьте число 2 500 000 в стандартном виде.

- 1) $25 \cdot 10^5$ 3) $2,5 \cdot 10^6$
2) $0,25 \cdot 10^7$ 4) $250 \cdot 10^4$

29. Укажите число, равное 0,00063.

1) $6,3 \cdot 10^4$ 3) $6,3 \cdot 10^{-3}$

2) $0,63 \cdot 10^4$ 4) $6,3 \cdot 10^{-4}$

30. Представьте число 1 800 000 в стандартном виде.

1) $18 \cdot 10^5$ 3) $180 \cdot 10^4$

2) $0,18 \cdot 10^7$ 4) $1,8 \cdot 10^6$

31. Укажите число, равное 0,00086.

1) $8,6 \cdot 10^{-4}$ 3) $8,6 \cdot 10^{-3}$

2) $0,86 \cdot 10^4$ 4) $8,6 \cdot 10^4$

32. Во сколько раз число $\frac{1}{10^4}$ меньше числа $\frac{1}{10^2}$?

1) 10 2) 0,1 3) 100 4) 0,01

33. Во сколько раз число $\frac{1}{10^2}$ меньше числа $\frac{1}{10}$?

1) 10 2) 0,1 3) 100 4) 0,01

34. Во сколько раз число $\frac{1}{10^3}$ меньше числа $\frac{1}{10}$?

1) 10 2) 0,1 3) 100 4) 0,01

35. Во сколько раз один миллион меньше одного миллиарда?

1) 10 2) 1000 3) 0,1 4) 2

36. Расстояние от Земли до Солнца равно $1,5 \cdot 10^{11}$ м. Выразите это расстояние в километрах.

1) $1,5 \cdot 10^{10}$ 3) $1,5 \cdot 10^8$

2) $1,5 \cdot 10^9$ 4) $1,5 \cdot 10^7$

37. Расстояние от Земли до Солнца равно $1,5 \cdot 10^{11}$ м. Выразите это расстояние в миллиметрах.

1) $1,5 \cdot 10^{15}$ 3) $1,5 \cdot 10^{13}$

2) $1,5 \cdot 10^{14}$ 4) $1,5 \cdot 10^{12}$

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

38. Упростите выражение $(a^{-2} - x^{-2}) : (x^{-1} + a^{-1})$ и найдите его значение при $x = 3^{-1}, a = 4^{-1}$.

39. Упростите выражение $\left(\frac{4}{5}x^{-3}y\right)^{-4}$ и найдите его значение при $x = 2, y = \frac{10}{3}$.

40. Упростите выражение $\left(\frac{4}{9}xy^{-2}\right)^{-2}$ и найдите его значение при $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}$.

1.4. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ. КОРЕНЬ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

При выполнении заданий по преобразованию выражений, содержащих корни второй и третьей степени, используются различные свойства корней. Вычисления и преобразования требуют повышенной концентрации внимания.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют неотрицательное число \sqrt{a} , квадрат которого равен a , т.е. $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$.

Свойства арифметического квадратного корня ($a \geq 0$)

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0, \quad (2)$$

$$\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k, \quad a \geq 0, k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

$$\text{Для любого действительного числа } x: \sqrt{x^2} = |x| \quad (4)$$

Определение. Корнем третьей степени из числа a называют число, третья степень которого равна a .

Свойства корня третьей степени

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}, \quad (5)$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \quad b \neq 0, \quad (6)$$

$$\sqrt[3]{a^n} = (\sqrt[3]{a})^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2, \quad (8)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (9)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (10)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad (11)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \quad (12)$$

Таблица квадратов чисел от 11 до 25

$11^2=121$	$12^2=144$	$13^2=169$	$14^2=196$	$15^2=225$
$16^2=256$	$17^2=289$	$18^2=324$	$19^2=361$	$20^2=400$
$21^2=441$	$22^2=484$	$23^2=529$	$24^2=576$	$25^2=625$

Таблица кубов чисел от 2 до 6

$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
-----------	------------	------------	-------------	-------------

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)****Непосредственное применение свойств
арифметического квадратного корня и корня
третьей степени**

Задание 1. Вычислите: $\sqrt{81 \cdot 0,0001}$.

1) $\pm 0,09$ 2) $0,09$ 3) $0,03$ 4) другой ответ

Решение.

1 способ

Подкоренное выражение равно $0,0081$. Так как $0,09^2 = 0,0081$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{0,0081} = 0,09$.

2 способ

По свойству (1) получим

$$\sqrt{81 \cdot 0,0001} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{0,0001} = 9 \cdot 0,01 = 0,09.$$

О т в е т: 2.

Задание 2. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$.

1) 25 2) ± 5 3) 5 4) другой ответ

Р е ш е н и е.

1 способ

Применим свойство (6). Внесем и число 625, и число 5 под общий корень.

$$\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{625}{5}} = \sqrt[3]{125} = 5.$$

2 способ

В числителе разложим 625 на простые множители и вынесем множитель из-под знака корня.

$$\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5 \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = 5.$$

О т в е т: 3.

Задание 3. Вычислите: $(-3\sqrt{2})^2$.

Р е ш е н и е.

Возведем во вторую степень каждый из множителей произведения $(-3\sqrt{2})^2 = (-3)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$.

О т в е т: 18.

Задание 4. Вычислите: $(-3\sqrt[3]{2})^3$.

Р е ш е н и е.

Возведем в третью степень каждый из множителей произведения $(-3\sqrt[3]{2})^3 = (-3)^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 = -27 \cdot 2 = -54$.

О т в е т: -54.

Задание 5. Вычислите: $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

- 1) 2,2 2) $\pm 2,2$ 3) 0,44 4) другой ответ

Решение.

Чтобы вычислить значение арифметического квадратного корня из смешанного числа, переведем смешанное число в неправильную дробь и применим свойство (2):

$$\sqrt{4\frac{21}{25}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25 + 21}{25}} = \sqrt{\frac{121}{25}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5} = 2,2.$$

Ответ: 1.



Если сразу не удастся вычислить значение корня, то часто помогает разложение подкоренного выражения на множители.

Задание 6. Найдите значение выражения $\sqrt{12 \cdot 15 \cdot 20}$.

Решение.

1 способ (непосредственно)

$$\sqrt{12 \cdot 15 \cdot 20} = \sqrt{3600} = 60.$$

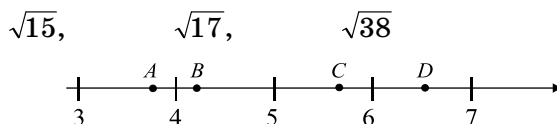
2 способ (с помощью разложения на множители)

$$\sqrt{12 \cdot 15 \cdot 20} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 100} = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 60.$$

Ответ: 60.

Оценка квадратных корней рациональными числами

Задание 7. Каждое из чисел $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{38}$ соотнесите с соответствующей ему точкой на координатной прямой.



Решение.

Определим, между какими двумя соседними целыми числами находится каждое из чисел $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{38}$.

$3 < \sqrt{15} < 4$, значит, числу $\sqrt{15}$ соответствует точка А.

$4 < \sqrt{17} < 5$, поэтому числу $\sqrt{17}$ соответствует точка В.

$6 < \sqrt{38} < 7$, следовательно, числу $\sqrt{38}$ соответствует точка D .

Ответ: $\sqrt{15} \rightarrow A, \sqrt{17} \rightarrow B, \sqrt{38} \rightarrow D$.

Преобразование числовых выражений

При преобразовании дробных числовых выражений, содержащих корни, иногда умножение числителя и знаменателя на выражение, сопряженное знаменателю, позволяет упростить вид всего выражения.

Задание 8. Вычислите $\frac{\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + \sqrt{35}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}}} + \sqrt{35} = \frac{\sqrt{6-\sqrt{35}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{35}}}{\sqrt{6+\sqrt{35}} \cdot \sqrt{6-\sqrt{35}}} + \sqrt{35} = \frac{6-\sqrt{35}}{1} + \sqrt{35} = 6.$$

Ответ: 6.

Приведем пример использования свойства (4) при преобразовании выражений (для любого действительного числа x : $\sqrt{x^2} = |x|$).

Задание 9. Вычислите: $\sqrt{(5-\sqrt{11})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$.

Решение.

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое суммы.

$$\sqrt{(5-\sqrt{11})^2} = |5-\sqrt{11}|.$$

Так как $5 = \sqrt{25} > \sqrt{11}$, то $|5-\sqrt{11}| = 5-\sqrt{11}$.

$$\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} = |3-\sqrt{11}|.$$

Так как $3 = \sqrt{9} < \sqrt{11}$, то $|3-\sqrt{11}| = -(3-\sqrt{11}) = \sqrt{11}-3$.

Окончательно имеем:

$$\sqrt{(5-\sqrt{11})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{11})^2} = 5-\sqrt{11} + \sqrt{11}-3 = 2.$$

Ответ: 2.

Приемы разложения на множители



При преобразовании числовых выражений часто приходится применять различные приемы разложения на множители. Напомним основные из них: 1) вынесение общего множителя; 2) группировка; 3) формулы сокращенного умножения.

Задание 10. Сократите дробь $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$.

1) $\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{3} - 2$ 3) 1 4) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

Решение.

Разложим числитель данного выражения на множители.

$$\sqrt{15} - \sqrt{10} = \sqrt{5 \cdot 3} - \sqrt{5 \cdot 2}.$$

Вынесем общий множитель — $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5 \cdot 3} - \sqrt{5 \cdot 2} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

$$\text{Имеем: } \frac{\sqrt{15}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Ответ: 4.

Задание 11. Упростите до целого числа выражение

$$\frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{7}.$$

Решение.

1 способ

Разложим числитель данного выражения на множители.

В числителе четыре слагаемых, сгруппируем их по два.

$$\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1 = (\sqrt{21} + \sqrt{7}) - (\sqrt{3} + 1).$$

Слагаемые в первых скобках имеют общий множитель $\sqrt{7}$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{21} + \sqrt{7}) - (\sqrt{3} + 1) &= \sqrt{7} \cdot (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} + 1) = \\ &= (\sqrt{7} - 1)(\sqrt{3} + 1). \end{aligned}$$

$$\text{Имеем: } \frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{7} = \frac{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{7} = -1.$$

2 способ

$$\frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} - \sqrt{7} = \frac{\sqrt{21} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 1 - \sqrt{7} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = -1.$$

Ответ: -1 .**Задание 12.** Упростите выражение $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{11} + \sqrt{5}}{\sqrt{11} - \sqrt{5}}$.**Решение.**

Приведем дроби к общему знаменателю.

$$\frac{\sqrt{11} - \sqrt{5}}{\sqrt{11} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{11} + \sqrt{5}}{\sqrt{11} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{5})(\sqrt{11} - \sqrt{5}) + (\sqrt{11} + \sqrt{5})(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{(\sqrt{11} + \sqrt{5})(\sqrt{11} - \sqrt{5})}.$$

В числителе применим формулы квадрата разности и квадрата суммы двух выражений, а в знаменателе — формулу разности квадратов. Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{5})(\sqrt{11} - \sqrt{5}) + (\sqrt{11} + \sqrt{5})(\sqrt{11} + \sqrt{5})}{(\sqrt{11} + \sqrt{5})(\sqrt{11} - \sqrt{5})} = \\ & = \frac{11 - 2\sqrt{55} + 5 + (11 + 2\sqrt{55} + 5)}{11 - 5}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем: $\frac{32}{6} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.**Ответ:** $5\frac{1}{3}$.**Выражения вида $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$** 

Для вычисления значения выражений вида $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ сначала обозначают это выражение, например A , потом возводят обе части равенства в квадрат и, учитывая знак выражения A , записывают ответ.

Задание 13. Выражение $\sqrt{7 - \sqrt{24}} - \sqrt{7 + \sqrt{24}}$ является целым числом. Найдите его.

Пусть $A = \sqrt{7 - \sqrt{24}} - \sqrt{7 + \sqrt{24}}$. Рассмотрим A^2 .

$$\begin{aligned} A^2 &= 7 - \sqrt{24} - 2\sqrt{7 - \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{24}} + 7 + \sqrt{24} = \\ &= 14 - 2\sqrt{(7 + \sqrt{24})(7 - \sqrt{24})} = 14 - 2\sqrt{25} = 4. \end{aligned}$$

Так как $A < 0$, то $A = -\sqrt{4} = -2$.

О т в е т: -2 .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Вычислите: $\sqrt{0,09} + \sqrt{49}$.

О т в е т: _____.

2. Вычислите: $0,1\sqrt{6400} - 10\sqrt{0,81}$.

О т в е т: _____.

3. Вычислите: $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt{\frac{9}{16}}$.

О т в е т: _____.

4. Вычислите: $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{0,008}$.

О т в е т: _____.

5. Вычислите: $0,2\sqrt[3]{27000} + 20\sqrt[3]{0,001}$.

О т в е т: _____.

6. Какое из данных выражений **не равно** $\sqrt{\frac{7}{12}}$?

1) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}$

2) $\frac{\sqrt{84}}{12}$

3) $\frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \sqrt{3}}$

4) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

7. Вычислите: $\sqrt[3]{-8 \cdot 0,001}$.

1) $\pm 0,02$

2) $-0,02$

3) $\pm 0,2$

4) $-0,2$

8. Вычислите: $\sqrt{54} \cdot \sqrt{6}$.

О т в е т: _____.

9. Вычислите: $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$.

О т в е т: _____.

10. Вычислите: $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$.

О т в е т: _____.

11. Какое из чисел $\sqrt{0,9}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt{9000}$ является рациональным?

1) $\sqrt{0,9}$

3) $\sqrt{9000}$

2) $\sqrt{900}$

4) ни одно из этих чисел

Ответ: _____.

12. Вычислите: $\left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{10}}\right)^3$.

Ответ: _____.

13. Вычислите: $\left(-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$.

Ответ: _____.

14. Вычислите: $\left(-4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^3$.

Ответ: _____.

15. Сократите дробь $\frac{7}{\sqrt{7}}$.

1) 1

2) $\sqrt{7}$

3) $\pm\sqrt{7}$

4) другой ответ

16. Сократите дробь $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

1) $\sqrt{3}$

2) 2

3) $\sqrt{3} - 1$

4) другой ответ

17. Сократите дробь $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{14}}{\sqrt{7}}$.

Ответ: _____.

18. Сравните выражения: $a = \sqrt{6^2 + 8^2}$ и $b = 6 + 8$.

Ответ: _____.

19. Сравните выражения: $a = \sqrt{13^2 - 5^2}$ и $b = 13 - 5$.

Ответ: _____.

20. Вычислите: $\sqrt{20} - 2\sqrt{5}$.

1) 0

2) $\sqrt{5}$

3) $-\sqrt{5}$

4) $2\sqrt{5}$

21. Какое целое число заключено между числами $\sqrt{24}$ и $\sqrt{26}$?

1) 4

2) 5

3) 6

4) таких чисел нет

22. Какие целые числа заключены между числами $\sqrt{11}$ и $\sqrt{29}$?

- 1) 12, 13, 28 2) 3, 4, 5 3) 4, 5 4) 4, 5, 6

23. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны $\sqrt{7} - 2$ и $\sqrt{7} + 2$.

- 1) 3 2) 4 3) 5 4) $4\sqrt{7}$

24. Вычислите: $\sqrt{74^2 - 70^2}$.

Ответ: _____.

25. Найдите периметр прямоугольника, стороны которого равны $\sqrt{7} - 2$ и $\sqrt{7} + 2$.

- 1) 3 2) 4 3) 5 4) $4\sqrt{7}$?

26. Вычислите: $\sqrt{6,4} \cdot \sqrt{22,5}$.

Ответ: _____.

27. Вычислите: $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{32}}$.

Ответ: _____.

28. Сравните $\sqrt{159}$ и 13.

Ответ: _____.

29. Вычислите: $\sqrt{23\frac{1}{25}}$.

Ответ: _____.

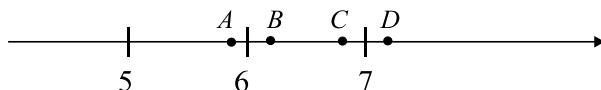
30. Вычислите: $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Ответ: _____.

31. Вычислите: $\sqrt[3]{4 \cdot 6 \cdot 9}$.

Ответ: _____.

32. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{34}$. Какая это точка?



- 1) A 2) B 3) C 4) D

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

33. Докажите, что $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$.
34. Вычислите: $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^3}$.
35. Вычислите: $\sqrt{108} - \sqrt{75} - \sqrt{3}$.
36. Вычислите: $(2\sqrt{2})^4 + (\sqrt[3]{-2})^3$.
37. Вычислите: $\sqrt{62,5^2 - 58,5^2} + (\sqrt{13} - 4)(4 + \sqrt{13})$.
38. Вычислите: $\sqrt{484 - 2 \cdot 22 \cdot 13 + 169} + \sqrt{2,5^2 - 2,4^2}$.
39. Расположите в порядке возрастания $2\sqrt{2}$; 3; -8; $-3\sqrt{7}$.
40. Расположите в порядке убывания $-2\sqrt[3]{3}$; -4; 3; $2\sqrt[3]{2}$.

Задания на 3 балла

41. Упростите выражение $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \cdot (1 + \sqrt{5})$ до целого числа.
42. Упростите выражение $(2 + \sqrt{6}) \cdot \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$ до целого числа.
43. Расположите в порядке возрастания $5\sqrt{5}$; $3\sqrt{7}$; $3\sqrt{11}$; $-4\sqrt{5}$; $-3\sqrt{10}$.
44. Вычислите: $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^2$.
45. Вычислите: $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.
46. Вычислите: $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$.
47. Вычислите: $\sqrt{(3 - \sqrt{6})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2}$.
48. Вычислите: $\frac{6}{\sqrt{3} - 1} - 3\sqrt{3}$.

49. Значением выражения $\frac{7\sqrt{30}}{3\sqrt{10}-10\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \sqrt{10}$ является целое число. Найдите его.

50. Значением выражения $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{5} - 1} - \sqrt{3}$ является целое число. Найдите его.

51. Значением выражения $\frac{\sqrt{8-\sqrt{63}}}{\sqrt{8+\sqrt{63}}} + \sqrt{63} + 2007$ является целое число. Найдите его.

52. Значением выражения $\frac{\sqrt[3]{(4-\sqrt{15})^2}}{\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}} + \sqrt{15}$ является целое число. Найдите его.

Задания на 4 балла

53. Упростите до целого числа выражение $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

54. Упростите до целого числа выражение $\sqrt{3} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

55. Упростите до целого числа выражение $4 - 3\sqrt{2} + \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$.

56. Упростите до целого числа выражение $(2\sqrt{6} - 5)^2 - 10\sqrt{49 - 20\sqrt{6}}$.

57. Упростите до целого числа выражение $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

58. Вычислите: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6$.

59. Вычислите: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2}$.

60. Вычислите: $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} - \sqrt{2}$.

61. Сравните $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$.

62. Значение выражения

$$\left(\sqrt[3]{2} + 5 - \frac{20\sqrt[3]{2}}{5 + \sqrt[3]{2}} \right) \left(\sqrt[3]{2} - 5 - \frac{20\sqrt[3]{2}}{5 - \sqrt[3]{2}} \right) - \sqrt[3]{4}$$

является целым числом. Найдите его.

1.5. ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При выполнении заданий по преобразованию выражений используются различные свойства степени, арифметического квадратного корня, корня третьей степени.

В первой части экзаменационной работы обычно требуется выполнить одно или два действия для получения результата по преобразованию целых и дробных выражений. Во второй части — преобразования многоступенчатые, причем часто приходится применять различные методы разложения выражений на множители.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Формулы сокращенного умножения

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2, \quad (1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (2)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (3)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \quad (4)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad (5)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad (6)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (7)$$

Формула разложения квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad a \neq 0, \quad (8)$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена $ax^2 + bx + c$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Нахождение значения выражения

Задание 1. Найдите значение выражения $\frac{x^3\sqrt{5}}{5}$ при $x = -\sqrt{5}$.

Решение.

Подставим значение переменной x в исходное выражение.

При $x = -\sqrt{5}$ значение выражения $\frac{x^3\sqrt{5}}{5}$ равно $\frac{(-\sqrt{5})^3\sqrt{5}}{5}$.

$$\frac{(-\sqrt{5})^3\sqrt{5}}{5} = -\frac{(\sqrt{5})^4}{5} = -\frac{\sqrt{5^4}}{5} = -\frac{\sqrt{625}}{5} = -\frac{25}{5} = -5$$

Ответ: -5 .

Задание 2. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2 - b^2}$ при $a = 8$; $b = -6$.

Решение.

Подставим значения a и b в исходное выражение.

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - b^2} &= \sqrt{8^2 - (-6)^2} = \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{(8 - 6)(8 + 6)} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 14} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 7} = 2\sqrt{7}.\end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{7}$.

Выражение переменной из формулы

Задание 3. Выразите из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$ время t .

Решение.

Будем действовать последовательно: 1) выразим at ; 2) выразим время t .

$$1) at = v - v_0; \quad 2) t = \frac{v - v_0}{a}.$$

Ответ: $t = \frac{v - v_0}{a}$.

Приемы разложения на множители



При преобразовании выражений часто приходится применять различные приемы разложения на множители. Напомним основные из них: 1) вынесение общего множителя; 2) группировка; 3) формулы сокращенного умножения; 4) формула разложения квадратного трехчлена на множители.

Вынесение общего множителя

Задание 4. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{ab}}{3\sqrt[3]{b} - 1}$.

Решение.

Разложим на множители числитель дроби, а затем сократим на общий множитель.

$$\frac{\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{ab}}{3\sqrt[3]{b} - 1} = \frac{\sqrt[3]{a}(1 - 3\sqrt[3]{b})}{3\sqrt[3]{b} - 1} = -\sqrt[3]{a}, \quad \text{причем } 3\sqrt[3]{b} - 1 \neq 0,$$

т.е. $\sqrt[3]{b} \neq \frac{1}{3}; b \neq \frac{1}{27}$.

Ответ: $-\sqrt[3]{a}; b \neq \frac{1}{27}$.

Группировка

Задание 5. Упростите выражение $\frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x} - 2\sqrt{y} + 2}{\sqrt{x} - 2}$ и найдите его значение при $x = y = 12100$.

Решение.

В числителе четыре слагаемых. Очень часто при разложении на множители выражения, содержащего четыре слагаемых, используют группировку.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{xy} - \sqrt{x} - 2\sqrt{y} + 2}{\sqrt{x} - 2} &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y} - 1) - 2\sqrt{y} + 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{y} - 1) - 2(\sqrt{y} - 1)}{\sqrt{x} - 2} = \\ &= \frac{(\sqrt{y} - 1)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} = \sqrt{y} - 1, \quad x \geq 0, \quad x \neq 4. \end{aligned}$$

При $y = 12100$ имеем: $\sqrt{y} - 1 = 110 - 1 = 109$.

Ответ: $\sqrt{y} - 1, x \geq 0, x \neq 4; 109$.

Формулы сокращенного умножения



Для упрощения выражений с помощью формул сокращенного умножения используют формулы (1)–(7). Чтобы выбрать соответствующую формулу, следует обратить внимание на показатели степени одночленов, входящих в выражение.

Задание 6. Упростите выражение $\frac{x^2-4}{x^2+x+1} : \frac{x+2}{x^3-1}$ и найдите его значение при $x = 101$.

Решение.

К выражению $(x^2 - 4)$ применим формулу разности квадратов, а к выражению $(x^3 - 1)$ — разности кубов.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x^2+x+1} : \frac{x+2}{x^3-1} &= \frac{(x-2)(x+2)}{x^2+x+1} : \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \\ &= (x-2)(x-1), \\ x &\neq 1, \quad x \neq -2.\end{aligned}$$

При $x = 101$ имеем: $(x-2)(x-1) = 99 \cdot 100 = 9900$.

Ответ: $(x-2)(x-1)$, $x \neq 1$, $x \neq -2$; 9900.

Задание 7. Упростите выражение $\frac{a-16b}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{a}-64b\sqrt{b}}{a-16b}$ и найдите его значение при $a = 4$ и $b = 0,04$.

Решение.

Первая дробь:

$$\begin{aligned}\frac{a-16b}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}} &= \frac{(\sqrt{a}-4\sqrt{b})(\sqrt{a}+4\sqrt{b})}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}} = \sqrt{a}+4\sqrt{b}, \\ \sqrt{a} &\neq 4\sqrt{b}, a \neq 16b.\end{aligned}$$

Вторая дробь:

$$\begin{aligned}\frac{a\sqrt{a}-64b\sqrt{b}}{a-16b} &= \frac{(\sqrt{a}-4\sqrt{b})(a+4\sqrt{ab}+16b)}{(\sqrt{a}-4\sqrt{b})(\sqrt{a}+4\sqrt{b})} = \frac{a+4\sqrt{ab}+16b}{\sqrt{a}+4\sqrt{b}}, \\ a &\neq 16b.\end{aligned}$$

Тогда исходное выражение имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{a-16b}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{a}-64b\sqrt{b}}{a-16b} &= \sqrt{a}+4\sqrt{b} - \frac{a+4\sqrt{ab}+16b}{\sqrt{a}+4\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+4\sqrt{b}}, \\ a &\neq 16b\end{aligned}$$

при $a = 4$ и $b = 0,04$ имеем $\frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+4\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{0,16}}{2+4\cdot 0,2} = \frac{1,6}{2,8} = \frac{4}{7}$.

О т в е т: $\frac{4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+4\sqrt{b}}$, $a \neq 16b$; $\frac{4}{7}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Задание 8. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство $3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)(\dots)$?

Р е ш е н и е.

Чтобы разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 2x - 1$, решим уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$ (см. формулу разложения квадратного трехчлена на множители (8)).

Уравнение имеет корни 1 и $-\frac{1}{3}$, поэтому

$$3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)(x + \frac{1}{3}).$$

О т в е т: $x + \frac{1}{3}$.

Замена переменной



При преобразовании иррациональных выражений иногда удобно воспользоваться заменой $\sqrt{x} = a$. Это позволяет свести преобразование выражений к действиям с многочленами.

Задание 9. Упростите выражение $\frac{x-7\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$ и найдите его значение при $x = \left(12\frac{4}{5} + 1\frac{5}{12} - 0,8 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 12$.

Р е ш е н и е.

Пусть $\sqrt{x} = a$, тогда исходное выражение будет иметь вид: $\frac{a^2 - 7a + 6}{a - 1}$. Чтобы разложить на множители числи-

тель, решим уравнение $a^2 - 7a + 6 = 0$ и применим формулу разложения квадратного трехчлена на множители (8).

$$\frac{a^2 - 7a + 6}{a - 1} = \frac{(a - 1)(a - 6)}{a - 1} = a - 6, \quad a \neq 1.$$

Вернемся к переменной x .

Осталось найти значение выражения $\sqrt{x} - 6, x \neq 1$.

Найдем значение x из выражения

$$x = \left(12\frac{4}{5} + 1\frac{5}{12} - 0,8 - 3\frac{1}{3} \right) \cdot 12.$$

Обратите внимание, что можно рационально вычислить значение числового выражения в скобке, если заметить, что $12\frac{4}{5} = 12,8$.

$$\begin{aligned} & \left(12\frac{4}{5} + 1\frac{5}{12} - 0,8 - 3\frac{1}{3} \right) \cdot 12 = \\ & = \left(12,8 - 0,8 - \left(3\frac{4}{12} - 1\frac{5}{12} \right) \right) \cdot 12 = \\ & = \left(12 - 1\frac{11}{12} \right) \cdot 12 = 144 - 23 = 121. \end{aligned}$$

Итак, при $x = 121$ $\sqrt{x} - 6 = 5$.

Ответ: $\sqrt{x} - 6, x \neq 1; 5$.

Покажем применение всех основных приемов разложения на множители при решении следующего задания.

Задание 10. Упростите выражение

$$\frac{25x^3 - 10x^2 + x}{5x^2 - 16x + 3} : \frac{x^2 + 3x}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$$

и найдите значение выражения при $x = 3,1$.

Решение.

Рассмотрим первую дробь $\frac{25x^3 - 10x^2 + x}{5x^2 - 16x + 3}$.

В числителе все три слагаемых имеют общий множитель (x). После вынесения общего множителя получим выражение $25x^2 - 10x + 1$, которое представляет собой квадрат разности, т.е. $25x^2 - 10x + 1 = (5x - 1)^2$.

В знаменателе используем формулу разложения на множители квадратного трехчлена, т.е.

$$5x^2 - 16x + 3 = 5(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Окончательно имеем: $\frac{25x^3 - 10x^2 + x}{5x^2 - 16x + 3} = \frac{x(5x - 1)^2}{5(x - 3)(x - 0,2)}$.

Обратим внимание на выражения $(5x - 1)$ и $(x - 0,2)$. Если первое выражение продолжим раскладывать на множители, то получим $5x - 1 = 5(x - 0,2)$. Учитывая это, преобразуем знаменатель: $5(x - 3)(x - 0,2) = (x - 3)(5x - 1)$. Итак, после сокращения на общий множитель дробь будет иметь вид: $\frac{x(5x - 1)^2}{5(x - 3)(x - 0,2)} = \frac{x(5x - 1)}{x - 3}$.

Рассмотрим вторую дробь $\frac{x^2 + 3x}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$.

В числителе вынесем общий множитель (x) .

В знаменателе обратим внимание на число слагаемых: их четыре. Используем группировку, т.е.

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 9x + 27 &= (x^3 - 3x^2) - 9(x - 3) = \\ &= x^2(x - 3) - 9(x - 3) = (x^2 - 9)(x - 3). \end{aligned}$$

В первом множителе применим формулу разности квадратов:

$$(x^2 - 9)(x - 3) = (x - 3)(x + 3)(x - 3) = (x - 3)^2(x + 3).$$

После сокращения на общий множитель дробь будет иметь вид:

$$\frac{x^2 + 3x}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} = \frac{x}{(x - 3)^2}, \quad x \neq -3.$$

Вернемся к исходному выражению:

$$\begin{aligned} &\frac{25x^3 - 10x^2 + x}{5x^2 - 16x + 3} : \frac{x^2 + 3x}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27} = \\ &= \frac{x(5x - 1)}{x - 3} : \frac{x}{(x - 3)^2} = (5x - 1)(x - 3), \quad x \neq \pm 3; \quad x \neq 0,2. \end{aligned}$$

При $x = 3,1$ значение исходного выражения равно

$$(5 \cdot 3,1 - 1)(3,1 - 3) = 1,45.$$

Ответ: $(5x - 1)(x - 3)$, $x \neq \pm 3$, $x \neq 0,2$; 1,45.

Рассмотрим преобразование выражений, содержащих степени с отрицательными целыми показателями.

Задание 11. Упростите выражение $\frac{a^{-3} + b^{-3}}{a^{-1} + b^{-1}} - (ab)^{-1}$ и найдите его значение при $a = \sqrt{20}, b = \sqrt{5}$.

Решение.

Сначала заменим степени с отрицательными целыми показателями на степени с натуральными показателями, т.е.

$$\frac{a^{-3} + b^{-3}}{a^{-1} + b^{-1}} - (ab)^{-1} = \frac{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \frac{1}{ab}.$$

Теперь избавимся от двухэтажности в числителе и в знаменателе первой дроби. Для этого выполним действия в числителе и в знаменателе.

$$\frac{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} - \frac{1}{ab} = \frac{(b^3 + a^3)ab}{a^3b^3(b+a)} - \frac{1}{ab}.$$

Обратим внимание на показатели степеней. Применим в числителе первой дроби формулу суммы кубов и сократим числитель и знаменатель на общий множитель $ab(a+b)$. Тогда выражение будет иметь вид:

$$\frac{(b^3 + a^3)ab}{a^3b^3(b+a)} - \frac{1}{ab} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2b^2} - \frac{1}{ab}, \quad a \neq -b.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2b^2} = \frac{(a-b)^2}{a^2b^2}.$$

Итак, при $a = \sqrt{20}, b = \sqrt{5}$ значение исходного выражения равно

$$\frac{(\sqrt{20} - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{20})^2 (\sqrt{5})^2} = \frac{(2\sqrt{5} - \sqrt{5})^2}{100} = 0,05.$$

Ответ: $\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}, \quad a \neq -b; 0,05.$

Покажем использование следующего свойства арифметического квадратного корня: для любого действительного числа x $\sqrt{x^2} = |x|$.

Задание 12. Упростите выражение

$$\sqrt{(10x - 1)^2} - \sqrt{(10x + 1)^2}$$

и найдите его значение:

- а) при $x < -2008$;
- б) при $-0,007 < x < 0,007$;
- в) при $x > 2008$.

Решение.

Преобразуем исходное выражение.

$$\sqrt{(10x - 1)^2} - \sqrt{(10x + 1)^2} = |10x - 1| - |10x + 1|$$

- а) при $x < -2008$

$$|10x - 1| - |10x + 1| = -(10x - 1) + 10x + 1 = 2.$$

- б) при $-0,007 < x < 0,007$

$$|10x - 1| - |10x + 1| = -(10x - 1) - (10x + 1) = -20x.$$

- в) при $x > 2008$

$$|10x - 1| - |10x + 1| = 10x - 1 - (10x + 1) = -2.$$

Ответ: $|10x - 1| - |10x + 1|$; а) 2; б) $-20x$; в) -2 .



При преобразовании выражений, содержащих корни, иногда удобно использовать прием введения новой переменной.

Задание 13. Найдите значение выражения

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} - \sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}}$$

при $x = 2008$.

Решение.

Пусть $a = \sqrt{x - 4}$, тогда $x = a^2 + 4$. Исходное выражение имеет вид:

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} - \sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} = \sqrt{(a - 2)^2} - \sqrt{(a + 2)^2}.$$

Так как для любого действительного числа x : $\sqrt{x^2} = |x|$, то

$$\sqrt{(a-2)^2} - \sqrt{(a+2)^2} = |a-2| - |a+2|$$

при $x = 2008$ имеем $|\sqrt{2008-4}-2| - |\sqrt{2008-4}+2| = -4$.

Ответ: -4 .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ при $a = 10$; $b = -4$.

Ответ: _____.

2. Найдите значение выражения $\frac{m^3 \sqrt{7}}{7}$ при $m = -\sqrt{7}$.

Ответ: _____.

3. Из формулы кинетической энергии $E_k = \frac{mv^2}{2}$ выразите скорость.

1) $v = \frac{2E_k}{m}$

3) $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$

2) $v = \frac{E_k}{2m}$

4) $v = \sqrt{\frac{E_k}{2m}}$

4. Из формулы мощности автомобиля $P = \frac{D^2 n}{16}$, где P — мощность в лошадиных силах, D — диаметр цилиндра, n — число цилиндров, выразите n .

1) $n = \frac{16P}{D^2}$

3) $n = \frac{16D^2}{P}$

2) $n = 16PD^2$

4) $n = \sqrt{\frac{16P}{D^2}}$

5. Представьте в виде степени с целым показателем $x^2 : x^{-3}$.

Ответ: _____.

6. Представьте в виде степени с целым показателем $(x^3)^4$.

О т в е т: _____.

7. Представьте в виде степени с целым показателем $\frac{x^2 x^5}{(x^3)^2}$.

- 1) x^2 2) x^{-2} 3) x^{-1} 4) x

8. Укажите выражение, равное степени 4^{n-2} .

- 1) $4^n - 16$ 2) $\frac{4^n}{16}$ 3) $\frac{4^n}{4^{-2}}$ 4) $(4^n)^{-2}$

9. Представьте в виде степени произведение $9 \cdot 3^n$.

- 1) 3^{2n} 2) 9^{n+1} 3) 3^{n+2} 4) 27^n

10. Выполните вычитание $(x + 7)^2 - x(14 + 4x)$.

О т в е т: _____.

11. Упростите выражение $4(m - 1)^2 + 8m$.

- 1) $4m^2 + 8m + 4$ 3) $4m^2 + 4$
2) $4m^2 + 8m - 4$ 4) $4m^2 + 1$

12. Укажите выражение, тождественно равное многочлену $8a^2 - 12ab$.

- 1) $-4a(2a + 3b)$ 3) $-4a(2a - 3b)$
2) $-4a(-2a + 3b)$ 4) $-4a(-2a - 3b)$

13. В выражении $3a^2 - 9ab$ вынесли за скобки общий множитель $(-3a)$. Какой двучлен остался в скобках?

- 1) $a + 3b$ 2) $a - 3b$ 3) $-a - 3b$ 4) $-a + 3b$

14. Преобразуйте в многочлен выражение

$$6p(p - 2) - (p - 6)^2.$$

О т в е т: _____.

15. Разложите на множители квадратный трехчлен $3x^2 - 9x - 12$.

1) $3(x+1)(x-4)$

3) $3(x+1)(x+4)$

2) $3(x-1)(x-4)$

4) $3(x-1)(x+4)$

16. Сократите дробь $\frac{4b^2 - 12b}{b^2 - 9}$.

Ответ: _____.

17. Сократите дробь $\frac{a^3 + 27b^3}{a + 3b}$.

1) $a^2 - 3ab + 9b^2$

3) $a^2 - 3ab + b^2$

2) $a^2 + 3ab + 9b^2$

4) $a^2 + 6ab + b^2$

18. Какое из выражений тождественно дроби $\frac{a-b}{3b-a}$?

1) $\frac{a-b}{a-3b}$

3) $\frac{b-a}{a-3b}$

2) $\frac{b-a}{3b-a}$

4) $-\frac{a-b}{3b-a}$

19. Упростите выражение $\frac{9x^2 - y^2}{3x^2 + xy}$ и найдите его значение при $x = 100$ и $y = 299$.

Ответ: _____.

20. Найдите разность выражений $\frac{6x^2}{2x-1} - 3x$.

Ответ: _____.

21. Найдите разность выражений $\frac{a}{(a-2)^2} - \frac{2}{(2-a)^2}$.

1) $\frac{1}{2-a}$

3) $\frac{a+2}{(a-2)^2}$

2) $\frac{1}{a-2}$

4) $\frac{1}{a+2}$

22. Выполните умножение $\frac{c}{b^2-9c^2} \cdot \frac{3b+9c}{6c^2}$.

1) $\frac{1}{2b-2c}$

3) $\frac{1}{2bc-2c^2}$

2) $\frac{2}{3b+3c^2}$

4) $\frac{1}{2bc-6c^2}$

23. Выполните умножение $(ab+b^2) \cdot \frac{a}{a^2-b^2}$.

О т в е т: _____.

24. Выполните деление $(ab-b^2) : \frac{a^2-b^2}{b}$.

О т в е т: _____.

25. Упростите выражение $\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{6x}\right) \cdot \frac{x^2}{5}$.

О т в е т: _____.

26. В каком случае выражение преобразовано в тождественно равное

1) $(4+a)(a-4) = 16 - a^2$

2) $(a-4)^2 = 16 - 8a + a^2$

3) $4(a-b) = 4a - b$

4) $(4+a)^2 = 16 + a^2$

27. Упростите выражение $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4y^2}\right) \cdot \frac{xy}{2y+x}$.

О т в е т: _____.

28. В выражение $x-y$ подставьте $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{a+b}{a-b}$ и упростите его.

О т в е т: _____.

29. Упростите выражение $\frac{1}{y^{-2}} \cdot \frac{1}{y^{-1}}$ и найдите его значение при $y = -3$.

1) 27

2) -27

3) $\frac{1}{27}$

4) $-\frac{1}{27}$

1) 2 2) $a \ b$ 3) $a+b$ 4) $\frac{1}{ab}$

1) $\sqrt{a} - 9\sqrt{b}$ 3) $\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$
2) $\sqrt{a} + 9\sqrt{b}$ 4) $\sqrt{a} + 3\sqrt{b}$

О т в е т: _____.

Задания на 2 балла

36. Сократите дробь $\frac{3x^2 - 2x - 1}{2 + 6x}$.

38. Упростите выражение $\frac{xy - x - y + 1}{x - 1}$ и найдите его

39. Сократите дробь $\frac{64x^3 - 27}{16x^2 + 12x + 9}$.

41. Упростите выражение $\frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 1} \cdot \frac{x + 3}{x^2 + 5x + 6}$.

42. Упростите выражение $\frac{2m}{(m-1)^3} + \frac{1+m^2}{(1-m)^3}$ и найдите

его значение при $m = 0,75$.

43. Упростите выражение $\frac{8 - 27^n}{4 + 2 \cdot 3^n + 9^n} + 2007 + 3^n$.

44. Докажите, что значение выражения не зависит от допустимых значений переменной

$$\frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x + 4} : \frac{x - 6}{x^3 + 8} - 8x - x^2.$$

45. Упростите выражение

$$\left(\frac{3\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} + 3 \right) (9 - 6\sqrt{x} + x)$$

и найдите его значение при $x = 169$.

Задания на 3 балла

46. Разложите на множители $x^4 + x^2 - 2$.

47. Разложите на множители

$$p^2x + p^2y - px - py - p^2 + p.$$

48. Разложите на множители

$$m^2x^2 - 3m^2x - 4m^2 - x^2 + 3x + 4.$$

49. Упростите выражение $\left(\frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} - \frac{9x}{x + 3} \right) : \left(1 - \frac{6}{x + 3} \right)$.

50. Упростите выражение $\frac{5}{1 + 4x^{-1}} \cdot \left(\frac{x - 4}{x^2 + 4x} - \frac{16}{16 - x^2} \right)$.

51. Докажите, что значение выражения

$$\frac{x^2 - 2(m + a)x + 4ma}{x^2 + 2(a + b)x + 4ab} \cdot \frac{x^2 - 4b^2}{x^2 - 4a^2} \cdot \frac{(x + 2a)^2}{x - 2m}$$

не зависит от допустимых значений переменной a .

52. Упростите выражение $\frac{9 \cdot 75^n}{3^{n+1} \cdot 5^{2n-1}}$.

53. Упростите выражение $\frac{2^{n+2} - 2^{n-1}}{7 \cdot 2^n}$.

54. Сократите дробь $\frac{n + \sqrt{n} - 12}{3 - \sqrt{n}}$.

55. Упростите выражение $\frac{x-9}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-1}$ и найдите его значение при $x = 0,81$.

56. Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{7}}{y-\sqrt{7}y} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}y+y} \right) : \frac{2\sqrt{7}y}{49-14y+y^2} - 1$ и найдите его значение при $y = 0,01$.

57. Найдите значение выражения

$$\left((\sqrt{x}+2)^2 - 4(\sqrt{x}+2) + 4 \right)^2 \text{ при } x = 200.$$

58. Найдите значение выражения

$$\sqrt{(3x-12)^2} - \sqrt{(3x+12)^2} \text{ при } x < -2010.$$

59. Значение выражения $50\left(\sqrt{x-6\sqrt{x-9}} - \sqrt{x+6\sqrt{x-9}}\right)$ при $x = 9,0169$ является целым числом. Найдите его.

Задания на 4 балла

60. Упростите выражение $\frac{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1}{n^5 - 1} - \frac{n^2 - n + 1}{n^3 + 1}$.

61. Упростите выражение $\frac{m^4 - m^3 + m^2 - m + 1}{m^5 + 1} - \frac{m^2 + m + 1}{m^3 - 1}$.

62. Найдите значение дроби $\frac{x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - y^3}{x^3 - 6y^3}$, если $\left(\frac{2x-y}{3x+y} \right)^{-1} = 0,25$.

63. Найдите значение выражения $\sqrt{19-a} + \sqrt{10-a}$, если $\sqrt{19-a} - \sqrt{10-a} = 1$.

64. Найдите наибольшее значение выражения $a^2 - 2b^2$, если $a + b = 2$. При каких значениях a и b оно достигается?

65. Найдите значение выражения $\sqrt{60-a^4} + 4a^2$, если $\sqrt{6+a^2} + \sqrt{10-a^2} = 6$.

66. Упростите до целого числа

$$\sqrt{16-8\sqrt{a}+a} + \sqrt{4+4\sqrt{a}+a}, \text{ если } 0 < a < 0,2008.$$

67. Сократите дробь $\frac{a^4 + 4}{a^2 - 2a + 2}$.

68. Найдите значение выражения $\frac{a^2}{a^4 + 4}$, если известно, что $\frac{1}{a} + \frac{a+1}{2} = 3,5$.

69. Упростите выражение

$$\frac{(x+10)(x+20)(x+30)(x+40)+1000}{x^2+50x+500} - x^2 - 50x.$$

70. Сократите дробь

$$\frac{(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1) \times \\ \times (x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} - x^{16} + 1)(x^2 + x + 1)}{x^{64} + x^{32} + 1}.$$

71. Сократите дробь $\frac{x^{11} + x^{10} + \dots + x + 1}{(x^3 + 1)(x^6 + 1)}$.

Тема 2. Уравнения

Все уравнения школьного курса, изучаемые в курсе алгебры 7–9-х классов, можно разбить на несколько больших групп: 1) линейные; 2) квадратные; 3) дробно-рациональные; 4) уравнения высших степеней. В первой части экзаменационной работы требуется решить уравнения без дополнительных условий. При решении уравнений из второй части работы часто требуется выполнить алгебраические преобразования выражений, упрощающие решение уравнения, или решать уравнения с дополнительными условиями, или использовать специальные приемы решения уравнений, такие как разложение на множители или введение новой переменной.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Корнем уравнения с одним неизвестным называют значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Определение. Решить уравнение с одним неизвестным — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Определение. Линейным уравнением с одним неизвестным x называют уравнения вида $ax = b$, где x — неизвестное, a и b — некоторые числа; a называют коэффициентом при переменной, b — свободным членом.

Определение. Квадратным уравнением с одним неизвестным x называют уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — неизвестное, a , b и c — некоторые числа (коэффициенты уравнения), причем $a \neq 0$. a называют первым (старшим) коэффициентом, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом.

Если в квадратном уравнении хотя бы один из коэффициентов равен 0 (кроме, конечно, коэффициента при x^2), то уравнение называют **неполным квадратным уравнением**.

Выражение

$$D = b^2 - 4ac \quad (1)$$

называют **дискриминантом** квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. По дискриминанту квадратного уравнения определяют, сколько оно имеет корней:

- если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня;
- если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или два совпавших корня);
- если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Формулы корней квадратного уравнения

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad (2)$$

Корни квадратного уравнения, в котором второй коэффициент — четное число, можно вычислять по формуле

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}, \text{ где } \frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac. \quad (3)$$

Теорема Виета

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, то сумма корней этого уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т.е. если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \quad (4)$$

Обратная теорема Виета

Если сумма двух чисел равна второму коэффициенту приведенного квадратного уравнения, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения, т.е. если выполняются условия

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$$

то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ.)

Линейные уравнения



При решении линейных уравнений слагаемые с неизвестным обычно переносят в левую часть уравнения, а остальные слагаемые — в правую часть. При этом переносе надо изменить знак всех слагаемых на противоположный.

Задание 1. Решите уравнение $2 - 3(x + 2) = 5 - 2x$.

Решение.

Сначала раскроем скобки.

$$2 - 3x - 6 = 5 - 2x$$

$$-3x + 2x = 5 - 2 + 6$$

$$-x = 9.$$

Уравнение еще не решено. Надо найти значение переменной x , а не $(-x)$.

$$x = -9.$$

Ответ: -9 .

Задание 2. Найдите корни уравнения $\frac{m}{3} + \frac{m}{12} = 3,75$.

Решение.

В левой части уравнения — дроби с разными знаменателями. Приведем их к общему знаменателю.

$$\frac{4m}{12} + \frac{m}{12} = 3,75$$

$$\frac{5m}{12} = 3,75$$

Остается разделить и левую, и правую часть уравнения на коэффициент при неизвестном, т.е. на $\frac{5}{12}$.

$$m = 3,75 : \frac{5}{12}$$

$$m = 3,75 \cdot \frac{12}{5}$$

При умножении можно либо число $3,75$ перевести в обыкновенную дробь (полезно знать, что $0,75 = \frac{3}{4}$), либо число $\frac{12}{5}$ перевести в десятичную (разделив 12 на 5).

$$m = \frac{15}{4} \cdot \frac{12}{5}$$

$$m = 9.$$

Ответ: 9 .

Квадратные уравнения



Неполные квадратные уравнения можно решить без применения основной формулы (2) корней квадратного уравнения.

Задание 3. Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

$$\text{А. } 0,5x^2 - 2x = 0 \quad \text{Б. } 0,5x^2 - 2 = 0 \quad \text{В. } 0,5x^2 = 0$$

$$1) 0 \quad 2) -2 \text{ и } 2 \quad 3) 0 \text{ и } 4$$

Решение.

Решим сначала первое уравнение. Вынесем за скобки общий множитель.

$$\begin{aligned} x(0,5x - 2) &= 0 \\ x &= 0 \text{ или } 0,5x - 2 = 0 \\ x &= 0 \text{ или } x = 2 : 0,5 \\ x &= 0 \text{ или } x = 4 \end{aligned}$$

Итак, корнями первого уравнения являются числа 0 и 4.

Решим второе уравнение. Выразим x^2 , т.е.

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 : 0,5 \\ x^2 &= 4. \end{aligned}$$

Корнями второго уравнения являются числа 2 и -2 .

Осталось решить третье уравнение. При решении его тоже выразим x^2 .

$$x^2 = 0.$$

Только число 0 является его корнем.

Остается записать ответ.

Ответ: А. -3) Б. -2); В. -1 .

Замечание: соотнести данные уравнения с множеством их корней можно и проще, с помощью следующих рассуждений: первое уравнение имеет два различных корня — нуль и другое число, корнями второго уравнения являются два противоположных числа, корнем третьего уравнения является только число нуль.

Рассмотрим решение квадратных уравнений, в которых ни один из коэффициентов не равен 0.

Задание 4. Решите уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Решение.

По основной формуле корней квадратного уравнения

$$(2) \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad \text{В данном уравнении } a = 3, b = -2,$$

$$c = -1, \text{ поэтому } D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16.$$

Имеем:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3}, \quad x = \frac{2 \pm 4}{6}.$$

О т в е т: $1; -\frac{1}{3}$.

Замечание: подсчитаем сумму коэффициентов этого уравнения: $3 + (-2) + (-1) = 0$. Число 1 является корнем этого уравнения.

Это верно и в общем случае, т.е. если мы решаем квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ и сумма его коэффициентов равна нулю $a + b + c = 0$, то один из корней уравнения равен 1.

Задание 5. Решите уравнение $-x^2 + 0,1 = 0,9x$. В ответе укажите произведение его корней.

Р е ш е н и е.

Перенесем слагаемые в левую часть уравнения.

$$-x^2 + 0,1 - 0,9x = 0$$

$$x^2 + 0,9x - 0,1 = 0$$

Чтобы избавиться от десятичных дробей, умножим обе части уравнения на 10.

$$10x^2 + 9x - 1 = 0$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1) = 121$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{20}$$

$$x = -1 \text{ или } x = 0,1$$

Не забудем, что в задании есть дополнительный вопрос. Произведение корней уравнения равно $-0,1$.

О т в е т: $-0,1$.

Замечание: на дополнительный вопрос в задании можно было ответить, даже не находя корней уравнения. Вспомните формулировку теоремы Виета (3).

После того как вы убедились в существовании корней ($D > 0$), можно просто найти их произведение. Из двух уравнений $x^2 + 0,9x - 0,1 = 0$ и $10x^2 + 9x - 1 = 0$ только

первое является приведенным, поэтому теорему Виета применяем к первому уравнению: $x_1 \cdot x_2 = -0,1$.

Задание 6. Не решая уравнения $2x^2 + 2x - 3 = 0$, найдите:

а) $x_1 + x_2$; б) $x_1 \cdot x_2$; в) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; г) $x_2^2 + x_1^2$;

д) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$; е) $x_2^3 + x_1^3$; ж) $x_2^4 + x_1^4$,

где x_1 и x_2 — корни уравнения.

Решение.

Известно, что x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения. Применим теорему Виета.

а), б) сначала необходимо сделать исходное уравнение приведенным, т.е. разделить на первый (старший) коэффициент 2. Имеем: $x^2 + x - 1,5 = 0$.

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 \cdot x_2 = -1,5. \end{cases}$$

Поэтому в пункте а) $x_1 + x_2 = -1$; а в пункте

$$\text{б) } x_1 \cdot x_2 = -1,5.$$

Чтобы вычислить значения выражений в пунктах в)–ж), выразим слагаемые в них через $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$.

$$\text{в) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-1}{-1,5} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{г) } x_2^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1 + 2 \cdot 1,5 = 4.$$

$$\text{д) } x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1,5.$$

$$\text{е) } x_2^3 + x_1^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = -1 \cdot (4 + 1,5) = -5,5.$$

$$\text{ж) } x_2^4 + x_1^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2 = 16 - 2 \cdot 2,25 = 11,5.$$

$$\text{Ответ: а) } -1; \text{ б) } -1,5; \text{ в) } \frac{2}{3}; \text{ г) } 4; \text{ д) } 1,5; \text{ е) } -5,5;$$

$$\text{ж) } 11,5.$$

Если в квадратном уравнении коэффициент при x — четный, можно использовать формулу (4) для нахождения корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом.

Задание 7. Решите уравнение $x^2 - 32x + 31 = 0$.

Решение.

В уравнении $a = 1$, $b = -32$, $c = 31$.

1-й способ

Применим формулу для уравнений с четным вторым коэффициентом (3).

$$\frac{D}{4} = (-16)^2 - 1 \cdot 31 = 256 - 31 = 225$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{225}}{1}$$

$$x = 31 \text{ или } x = 1$$

2-й способ

Применим основную формулу (2).

$$D = (-32)^2 - 4 \cdot 31 = 1024 - 124 = 900$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1}$$

Ответ: 1; 31.

Замечание: в уравнении $x^2 - 32x + 31 = 0$ сумма коэффициентов $1 + (-32) + 31 = 0$, поэтому 1 является корнем уравнения. А второй корень можно найти по теореме Виета, так как $x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot x_2 = 31$, то $x_2 = 31$.

Задание 8. Решите уравнение $(3x - 2)(4x - 3) = 0$. В ответе укажите больший корень.

Решение.

В левой части уравнения записано произведение, причем произведение равно 0.

$$(3x - 2)(4x - 3) = 0$$

$$3x - 2 = 0 \quad \text{или} \quad 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad x = \frac{3}{4}$$

Чтобы выбрать больший корень, можно либо привести дроби к одному знаменателю и сравнить числители дробей $\left(\frac{2}{3} = \frac{8}{12}; \frac{3}{4} = \frac{9}{12}\right)$, либо перевести обе дроби в десятичные дроби $\left(\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6), \frac{3}{4} = 0,75\right)$.

О т в е т: 0,75.

В курсе алгебры рассматривают также различные уравнения, сводимые к решению квадратных уравнений.

Дробно-рациональные уравнения



Решение дробно-рациональных уравнений основано на следующем утверждении: дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

Задание 9. Решите уравнение $\frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = 0$.

1) -1 2) 2,5 3) -1; 2,5 4) -1; 2,5

Р е ш е н и е.

Дробь равна нулю, значит, числитель равен 0, а знаменатель не равен 0, т.е. $2x^2 - 3x - 5 = 0$ и $x + 1 \neq 0$.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 = 0, \\ x + 1 \neq 0. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение и произведем отбор его корней.

$$x = 2,5 \quad \text{или} \quad x = -1.$$

Но $x \neq -1$, число (-1) является посторонним корнем. Итак, уравнение имеет единственное решение $x = 2,5$.

О т в е т: 2.

Задание 10. Найдите корни уравнения

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-2x+4} = \frac{-5x+2}{x^3+8}.$$

Решение.

Перенесем все слагаемые в левую часть, а затем приведем к общему знаменателю. При этом желательно разложить знаменатели дробных выражений на множители. Один из знаменателей равен $x^3 + 8$. Переменная возводится в третью степень, поэтому целесообразно к выражению $x^3 + 8$ применить формулу суммы кубов $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

Имеем

$$\frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-2x+4} - \frac{-5x+2}{x^3+8} = 0,$$

$$\frac{x^2-2x+4}{(x+2)(x^2-2x+4)} + \frac{x \cdot (x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} + \frac{5x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0,$$

$$\frac{2x^2+5x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0,$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 = 0, \\ x + 2 \neq 0, \\ x^2 - 2x + 4 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \text{ или } x = -0,5, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Уравнение имеет единственный корень $(-0,5)$.

Ответ: $-0,5$.

Уравнения высших степеней



Уравнения, степень которых выше второй, обычно решаются двумя основными методами: введением новой переменной и разложением на множители.

Метод введения новой переменной

Задание 11. Найдите корни уравнения

$$x^4 - 11x^2 - 12 = 0.$$

Замечание: уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, являющиеся квадратными относительно x^2 , называют **би-квадратными уравнениями**.

Решение.

Это уравнение можно свести к квадратному с помощью замены $a = x^2$.

$$x^4 - 11x^2 - 12 = 0$$

$$a = x^2$$

$$a^2 - 11a - 12 = 0$$

$$a = -1 \text{ или } a = 12.$$

Вернемся к переменной x .

$$x^2 = -1 \text{ или } x^2 = 12.$$

Первое уравнение решений не имеет, а второе уравнение имеет два корня $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ и $-\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$.

Ответ: $\pm 2\sqrt{3}$.

Замечание: уравнение $x - 11\sqrt{x} - 12 = 0$ тоже можно свести к квадратному $a^2 - 11a - 12 = 0$ заменой $a = \sqrt{x}$. Правда, тогда, после решения уравнения с переменной a , придется решать простейшие иррациональные уравнения: $\sqrt{x} = -1, \sqrt{x} = 12$. И корнем исходного уравнения будет только $12^2 = 144$.



Не всегда замена переменной так очевидна, как при решении биквадратных уравнений.

Задание 12. Найдите наименьший корень уравнения

$$(x + 3)^4 + 3x^2 + 18x - 1 = 0.$$

Решение.

Рассмотрим первое слагаемое $(x + 3)^4$. Вспомним, что $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Сгруппируем второе и третье слагаемые $3x^2 + 18x$. Если вынести общий множитель 3 за скобки, тогда имеем $3(x^2 + 6x)$.

Введем новую переменную $a = (x + 3)^2, a \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned} 3x^2 + 18x &= 3x^2 + 18x + 27 - 27 = \\ &= 3(x^2 + 6x + 9) - 27 = 3a - 27. \end{aligned}$$

Исходное уравнение будет иметь вид $a^2 + 3a - 27 - 1 = 0$. Получили квадратное уравнение относительно переменной a . Решим его.

$$a^2 + 3a - 28 = 0$$

$$a = -7 \text{ или } a = 4$$

$a = -7$ — посторонний корень.

Вернемся к переменной x .

$$(x + 3)^2 = 4.$$

Как проще решить это уравнение?

1-й способ. Раскрыть квадрат суммы и применить основную формулу корней квадратного уравнения.

2-й способ. Перенести 4 в левую часть и применить формулу разности квадратов.

3-й способ. Извлечь квадратный корень из обеих частей уравнения.

$$x + 3 = 2 \text{ или } x + 3 = -2.$$

$$x = -1 \text{ или } x = -5.$$

Прежде чем записать ответ, вспомните, на какой вопрос требуется ответить в задании.

О т в е т: -5 .

Метод разложения на множители



Прежде чем приступать к решению уравнений с помощью данного метода, советуем повторить тему «Числа и выражения. Преобразование выражений».

Задание 13. Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 - 32x + 96 = 0$?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 0

Р е ш е н и е.

В левой части уравнения четыре слагаемых, поэтому применяем метод группировки.

$$(x^3 - 3x^2) - (32x - 96) = 0$$

$$x^2(x - 3) - 32(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^2 - 32) = 0$$

Произведение равно 0, значит, $x - 3 = 0$ или $x^2 - 32 = 0$.

Уравнение имеет три корня: 3; $\pm 4\sqrt{2}$.

О т в е т: 3.

Задания второй части экзаменационной работы на 4 и 6 баллов по теме «Уравнения» часто содержат уравнения с параметром. Рассмотрим примеры решения двух таких заданий.

Уравнения с параметром

Задание 14. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ имеет: 1) два различных корня; 2) имеет корень, равный 2?

Р е ш е н и е.

1) Так как уравнение $x^2 + 2x + a = 0$ имеет два различных корня, то $D > 0$.

$$D = 4 - 4a, 4 - 4a > 0, a < 1$$

О т в е т: при $a < 1$ уравнение имеет два различных корня.

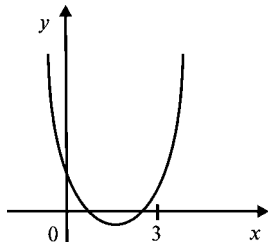
2) Так как 2 является корнем уравнения $x^2 + 2x + a = 0$, то $2^2 + 2 \cdot 2 + a = 0$, $a = -8$.

О т в е т: при $a = -8$ уравнение имеет корень, равный 2.

Задание 15. При каких значениях параметра m оба корня уравнения $x^2 - mx + 2 = 0$ лежат в промежутке $(0; 3)$?

Р е ш е н и е.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - mx + 2$. Графиком данной функции является парабола. Изобразим параболу с указанными свойствами.



Запишем условия, соответствующие этому расположению параболы.

$$\begin{cases} f(0) > 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(3) > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 0 < x_{\text{вершины}} < 3, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} D \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Решим отдельно каждое из этих неравенств.

(1) $f(0) = 2 > 0$, значит, первое условие выполняется автоматически.

$$f(3) = 9 - 3m + 2 > 0, \quad -3m > -11, \quad m < \frac{11}{3}.$$

$$x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2}, \quad 0 < \frac{m}{2} < 3, \quad 0 < m < 6.$$

$$D = m^2 - 8 \geq 0, \quad m \in (-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; +\infty).$$

Решением системы неравенств будет промежуток $\left[2\sqrt{2}; 3\frac{2}{3}\right)$.

Ответ: при $m \in \left[2\sqrt{2}; 3\frac{2}{3}\right)$ оба корня уравнения лежат в промежутке $(0; 3)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Решите уравнение $x - 5(x - 4) = 6x + 5$.

Ответ: _____.

2. Найдите корень уравнения $4 - \frac{x}{2} = 3$.

Ответ: _____.

3. Какое из уравнений имеет бесконечное число корней?

1) $0 \cdot x = 0$ 2) $0 \cdot x = 1$ 3) $0 + x = 0$ 4) $0 - x = 0$

4. Решите уравнение $\frac{m+4}{6} - \frac{m}{9} = -1$.

Ответ: _____.

5. Найдите корни уравнения $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)(0,2x - 1) = 0$.

Ответ: _____.

6. Решите уравнение $4n - 10,5 = 5n - 3(2n - 1,5)$.

Ответ: _____.

7. Корнем квадратного уравнения $-5x^2 = -25$ является число

- 1) -5 2) $\frac{1}{5}$ 3) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 4) $-\sqrt{5}$

8. Найдите корни уравнения $-2k^2 + 32 = 0$.

Ответ: _____.

9. Найдите корни уравнения $-2k^2 + 32k = 0$.

Ответ: _____.

10. Решите уравнение $-9x^2 + \frac{9}{25}x = 0$. В ответе укажите наименьший из его корней.

- 1) $-\frac{5}{3}$ 2) 0 3) $-\frac{9}{25}$ 4) $\frac{1}{25}$

11. Укажите верную формулу корней квадратного уравнения $kx^2 + mx + n = 0$.

- 1) $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2}$ 3) $x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4k}}{2k}$
2) $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4kn}}{2}$ 4) $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4kn}}{2k}$

12. Решите уравнение $x^2 - 6x + 7 = 0$.

- 1) $3 - \sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$ 3) $6 - 2\sqrt{2}$; $6 + 2\sqrt{2}$
2) $3 - \sqrt{3}$; $3 + \sqrt{3}$ 4) $-3 - \sqrt{2}$; $-3 + \sqrt{2}$

13. Каждое уравнение соотнесите с множеством его корней.

- 1) $0,2x^2 - 5x = 0$; 2) $0,2x^2 - 5 = 0$; 3) $0,2x^2 = 0$.
а) 0 ; б) -5 и 5 ; в) 0 и 25 .

14. Найдите положительный корень уравнения

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

1) 1 2) 2 3) 5 4) 2,5

15. Укажите наименьший корень уравнения

$$x^2 + 2x = 24.$$

Ответ: _____.

16. Решите уравнение $\frac{y+7}{(y-7)(y+9)} = 0$.

Ответ: _____.

17. Решите уравнение $\frac{y-7}{(y-7)(y+9)} = 0$.

Ответ: _____.

18. Решите уравнение $\frac{(y-7)(y+9)}{y+7} = 0$.

Ответ: _____.

19. Решите уравнение $\frac{(y-7)(y+9)}{y-7} = 0$.

Ответ: _____.

20. Решите уравнение $\frac{6}{x-4} = \frac{5}{x+2}$.

Ответ: _____.

21. Решите уравнение $\frac{2x^2 - 3x - 14}{x+2} = 0$.

Ответ: _____.

22. Решите уравнение $\frac{2x^2 - 5x - 7}{x+1} = 0$.

Ответ: _____.

23. Укажите количество корней уравнения

$$\frac{x^2 - 8}{x-2} = \frac{2x}{2-x}.$$

Ответ: _____.

24. Найдите сумму корней уравнения

$$x^2 - 28x + 27 = 0.$$

Ответ: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

25. Укажите общий корень уравнений

$$\left(\frac{2x-5}{x+3}\right)^2 - 1 = 0 \text{ и } x^2 - 5x - 24 = 0.$$

26. Решите уравнение $-x^3 + 5x^2 + 10x - 50 = 0$.

27. Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 18x - 36 = 0$.

28. Решите уравнение $(x^2 + 2)(x^2 - 8) = 11$.

29. Выясните, имеет ли уравнение $x^2 + 2x = -2x\sqrt{3} - 8$ корни.

30. Решите уравнение $\frac{x-2}{x+3} - \frac{30}{x^2-9} = 3$.

31. Решите уравнение $\frac{x-3}{x+2} - \frac{20}{x^2-4} + 2 = 0$.

Задания на 3 балла

32. Решите уравнение $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{x^2+2x+4} = \frac{5x+2}{x^3-8}$.

33. Решите уравнение $(x-2)^4 - 4x^2 + 16x - 61 = 0$.

34. При каком значении a уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет один корень?

35. Один из корней уравнения $x^2 + px - 15 = 0$ равен 5. Найдите сумму корней этого уравнения.

36. Найдите произведение корней уравнения $(x^2 + 3x)^2 - x^2 - 3x = 12$.

37. Решите уравнение $x - 17\sqrt{x} - 18 = 0$.

38. Не решая уравнения $3x^2 + 3x - 1 = 0$, найдите $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

39. Не решая уравнения $3x^2 + 3x - 1 = 0$, найдите $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения.

40. При каких значениях a уравнение $x^2 - 3x + a = 0$ имеет корень, равный 3?

41. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{x^2 - b}{x - 6} = 0$ имеет единственное решение?

42. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{x^2 - 36}{x + b} = 0$ имеет единственное решение?

43. При каких значениях параметра b уравнение $\frac{x^2 - bx + 4}{x - 6} = 0$ имеет единственное решение?

Задания на 4 балла

44. Укажите наибольшее целое значение a , при котором уравнение $x^2 - 2ax + 2a + 24 = 0$ имеет различные отрицательные корни.

45. Укажите наибольшее значение a , при котором уравнение $x^2 - (a+7)|x| + a^2 - 5a = 0$ имеет три решения.

46. Числа 13 и -24 являются корнями уравнения $x^4 - 745x^2 + 97344 = 0$. Укажите наибольший корень уравнения.

47. Укажите все значения a , при которых уравнение $x^3 - 2ax^2 - (2a - 3)x = 0$ имеет три различных корня.

48. Решите уравнение $\frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 5x + 4} + \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 5x + 9} = 1$.

49. Решите уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+5} = 0$.

50. Решите уравнение $\frac{3x - 6}{2x^2 - x} = \frac{x - 2x^2}{2 - x} - 2$.

51. Докажите, что уравнение

$$(x^2 - 2x + 7)(x^2 + 6x + 11) = 11$$

не имеет корней.

52. При каких значениях b оба корня уравнения $x^2 - bx + 2 = 0$ лежат в промежутке $(1; 3)$?

Тема 3. Системы уравнений

Системы уравнений можно решить различными методами. В первой части экзаменационной работы требуется решить системы уравнений либо методом подстановки, либо методом сложения, либо графическим методом.

При решении систем уравнений из второй части экзаменационной работы приходится применять специальные приемы решения систем уравнений, в частности метод введения новых неизвестных, а также решать системы уравнений с параметром.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Решением системы уравнений с двумя неизвестными называется пара значений неизвестных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Метод подстановки

Задание 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 10, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим второе уравнение системы. Выразим неизвестное x через y и подставим в первое уравнение.

$$\begin{cases} (2y + 1)y = 10, \\ x = 2y + 1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы.

$$(2y + 1)y = 10$$

$$2y^2 + y - 10 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

$$y = \frac{-1 \pm 9}{4}$$

$$y = 2 \quad \text{или} \quad y = -2,5$$

Соответствующие значения x можно найти, подставив найденные значения y в одно из уравнений исходной системы, например во второе уравнение.

$$\begin{cases} y = 2, \\ x = 2 \cdot 2 + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 5. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = -2,5 \\ x = 2 \cdot (-2,5) + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2,5, \\ x = -4. \end{cases}$$

Ответ можно записать так: $(5; 2)$, $(-4; -2,5)$ — или так: $x_1 = 5, y_1 = 2; x_2 = -4, y_2 = -2,5$.

О т в е т: $(5; 2)$, $(-4; -2,5)$.

Метод сложения

Задание 2. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13, \\ 3x - 5y = -7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

1-й способ. Метод сложения

Сложим оба уравнения исходной системы

$$3x + 5y + (3x - 5y) = 13 - 7$$

$$6x = 6$$

$$x = 1$$

Найдем соответствующее значение y , подставив найденное значение x в любое из уравнений системы, например в первое.

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 5y = 13, \\ x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

2-й способ. Метод подстановки

Выразим x из первого уравнения $x = \frac{13-5y}{3}$ и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} x = \frac{13-5y}{3}, \\ 3 \cdot \frac{13-5y}{3} - 5y = -7. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$$\begin{aligned}13 - 5y - 5y &= -7 \\ -10y &= -20 \\ y &= 2\end{aligned}$$

Найдем соответствующее значение x из первого уравнения

$$x = \frac{13 - 5 \cdot 2}{3}, x = 1.$$

О т в е т: (1; 2).

Задание 3. Вычислите координаты точки пересечения прямых $6x + 5y = -1$, $7x - 3y = -10$.

Р е ш е н и е.

Точка пересечения прямых принадлежит как первой прямой, так и второй прямой, поэтому, чтобы найти ее координаты, надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 5y = -1, \\ 7x - 3y = -10. \end{cases}$$

Метод подстановки в данном случае неудобен, так как надо выражать переменные и при этом придется делить либо на 6, либо на 5, либо на 7, либо на 3.

Попробуем применить метод сложения. Как получить слагаемые, отличающиеся только знаком?

Умножим первое уравнение на (-7) , а второе на 6.

$$\begin{cases} 6x + 5y = -1, & | \times (-7) \\ 7x - 3y = -10; & | \times 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -42x - 35y = 7, \\ 42x - 18y = -60. \end{cases}$$

Почленно сложим уравнения.

$$\begin{aligned}-42x - 35y + 42x - 18y &= 7 + (-60) \\ -53y &= -53 \\ y &= 1\end{aligned}$$

Подставим найденное значение y в любое из уравнений исходной системы, например во второе.

$$\begin{cases} y = 1, \\ 7x - 3 \cdot 1 = -10; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ x = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; 1)$.

Метод введения новых неизвестных

Задание 4. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{10}{x-y} - \frac{2}{x+y} = 1, \\ \frac{4}{x+y} - \frac{15}{x-y} = -1. \end{cases}$$

1) $(-3,5; -1,5)$

3) $(3,5; -1,5)$

2) $(3,5; 1,5)$

4) $(-3,5; 1,5)$

Решение.

Введение новых неизвестных позволяет упростить вид выражений, входящих в систему уравнений. В данном случае можно ввести следующие неизвестные $a = \frac{1}{x+y}$, $b = \frac{1}{x-y}$, тогда получим систему

$$\begin{cases} 10b - 2a = 1, \\ 4a - 15b = -1. \end{cases} \quad (*)$$

Далее применяем уже известные методы: метод подстановки или метод сложения. Учитывая коэффициенты при неизвестных, выберем для решения метод сложения.

Чтобы получить слагаемые, отличающиеся только знаком, умножим первое уравнение на 2.

$$\begin{cases} 10b - 2a = 1, | \times 2 \\ 4a - 15b = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} 20b - 4a = 2, \\ 4a - 15b = -1. \end{cases}$$

Сложим уравнения. Получим $5b = 1, b = 0,2$. Найдем соответствующее значение переменной a , подставив в любое из уравнений системы значение b (*).

$$\begin{cases} a = 0,5, \\ b = 0,2. \end{cases}$$

Вернемся к переменным x и y .

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 0,5, \\ \frac{1}{x-y} = 0,2. \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 2, \\ x-y = 5. \end{cases}$$

Далее систему уравнений можно решить либо методом сложения, либо методом подстановки. Окончательно получаем:

$$\begin{cases} x = 3,5, \\ y = -1,5. \end{cases}$$

О т в е т: 3.

Замечание: получить правильный ответ в задании 4 можно и иначе, например, поочередно подставив возможные решения из вариантов 1), 2), 3), 4) в систему и проверяя, не получили ли мы верное равенство. Здесь главное не ошибиться в вычислениях.

Задание 5. Сколько решений имеет система уравнений?

$$\begin{cases} x+y = 8, \\ \frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{y}{x} = 5. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Рассмотрим второе уравнение системы. Если обозначим $\frac{x}{y} = a$, то $\frac{y}{x} = \frac{1}{a}$. Имеем уравнение $a + \frac{4}{a} = 5$. Это дробно-рациональное уравнение (см. решение таких уравнений в теме «Уравнения»).

Решим его.

$$\frac{a^2 - 5a + 4}{a} = 0.$$

Его корни 1 и 4.

Вернемся к неизвестным x и y . Исходная система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x+y = 8, \\ \frac{x}{y} = 1; \end{cases} \quad (\text{I}) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y = 8, \\ \frac{x}{y} = 4; \end{cases} \quad (\text{II})$$

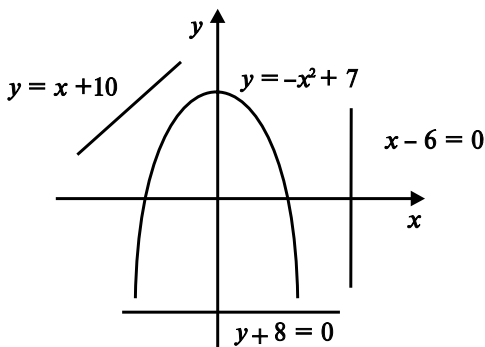
$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x = y; \end{cases} \quad (\text{I}) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 8, \\ x = 4y. \end{cases} \quad (\text{II})$$

Решением системы (I) является пара чисел (4; 4). Решением системы (II) является пара чисел (6,4; 1,6). Исходная система имеет два решения.

Ответ: два решения.

Графический метод

Задание 6. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая имеет 2 решения.



- 1) $\begin{cases} y = -x^2 + 7, \\ y = x + 10. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2 + 7, \\ x - 6 = 0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = -x^2 + 7, \\ y + 8 = 0. \end{cases}$

4) Все три указанные системы.

Решение.

Каждая система содержит уравнение параболы $y = -x^2 + 7$ и уравнение прямой. Если система имеет два решения, то парабола и прямая должны иметь две общие точки. Проанализируем рисунок.

Прямая $y = x + 10$ и парабола не пересекаются. Система из варианта 1) решений не имеет.

Прямая $x - 6 = 0$ и парабола пересекаются в одной точке (это можно заметить, если мысленно продлить параболу и прямую). Система из варианта 2) имеет одно решение.

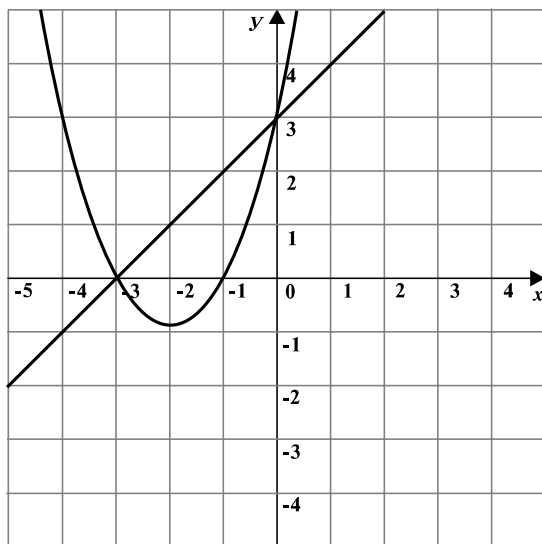
Прямая $y + 8 = 0$ и парабола пересекаются в двух точках (это можно заметить, если мысленно продлить параболу и прямую).

Значит, ответ на вопрос задачи — система из варианта 3.

О т в е т: 3.

Задание 7. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 + 4x + 3$ и $y = x + 3$. Используя графики, решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 3, \\ y = x + 3. \end{cases}$$



Решение.

Координаты каждой из точек пересечения параболы $y = x^2 + 4x + 3$ и прямой $y = x + 3$ удовлетворяют как первому уравнению системы, так и второму, т. е. являются решением исходной системы. Остается найти координаты этих точек.

О т в е т: $(-3; 0)$, $(0; 3)$.

Системы уравнений с параметром

Задание 8. При каких значениях m имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 0, \\ 4x + 5y = 19, \\ 5 - m = x? \end{cases}$$

Решение.

Все три уравнения системы — это уравнения прямых. Чтобы система имела решение, нужно, чтобы все три прямые пересекались в одной точке. Сначала найдем координаты точки пересечения первых двух прямых, т.е. решим систему

$$\begin{cases} 3x - y = 0, \\ 4x + 5y = 19. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом подстановки. Ее решение $(1; 3)$. Подставим $x = 1$ в третье уравнение исходной системы и найдем значение m .

Получим $5 - m = 1$, следовательно, $m = 4$.

Ответ: при $m = 4$.

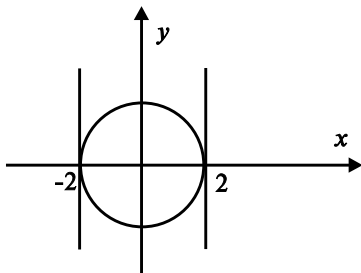
Задание 9. При каких значениях m система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x = m - 4 \end{cases}$$

имеет два решения?

Решение.

Первое уравнение системы задает окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 2. Второе уравнение задает множество прямых, перпендикулярных оси абсцисс. Эти прямые должны пересекать окружность в двух точках. Обратимся к рисунку.



Итак, переменная x должна принимать значения от -2 до 2 , исключая -2 и 2 , так как при таких значениях x система будет иметь единственное решение.

$$\begin{aligned} -2 < m - 4 < 2 \\ -2 + 4 < m < 2 + 4 \\ 2 < m < 6 \end{aligned}$$

Ответ: при $m \in (2; 6)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - 2y = -7, \\ 3x + 4y = 19. \end{cases}$$

Ответ: _____.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} xy = -6, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Ответ: _____.

3. Вычислите координаты точки пересечения прямых $2x - 3y = -8$, $4x + 2y = 0$.

Ответ: _____.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 7y = 31, \\ 5x + 7y = -11. \end{cases}$$

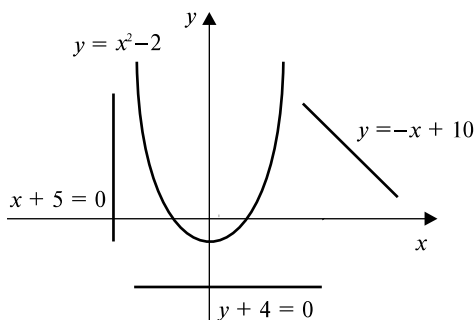
Ответ: _____.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 11y = 36, \\ 3x + 11y = -30. \end{cases}$$

Ответ: _____.

6. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая имеет 2 решения.



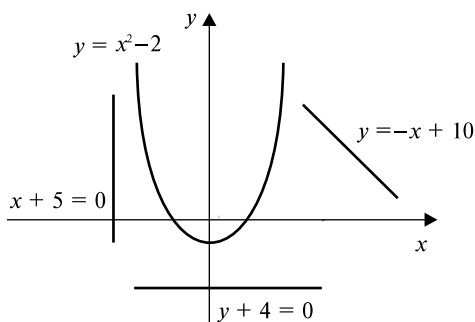
1) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = -x + 10. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ x + 5 = 0. \end{cases}$

4) Все три указанные системы.

7. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая не имеет решения.



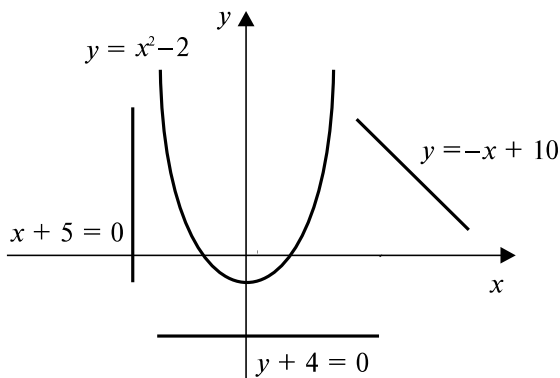
1) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = -x + 10. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ x + 5 = 0. \end{cases}$

4) Все три указанные системы.

8. На рисунке изображены парабола и три прямые. Укажите систему уравнений, которая имеет одно решение.



1) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = -x + 10. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y + 4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ x + 5 = 0. \end{cases}$

4) Все три указанные системы.

9. Из данных уравнений выберите второе уравнение системы

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ \dots \end{cases}$$

так чтобы система имела 2 решения (используйте графические представления).

1) $y = -x$ 2) $y = x$ 3) $-y = x^2$ 4) $y = x^2$

10. Из данных уравнений выберите второе уравнение системы

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ \dots \end{cases}$$

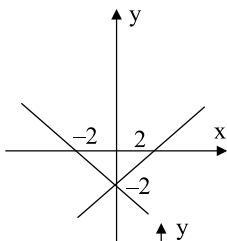
так чтобы система не имела решения (используйте графические представления).

1) $y = -x$ 2) $y = x$ 3) $-y = x^2$ 4) $y = x^2$

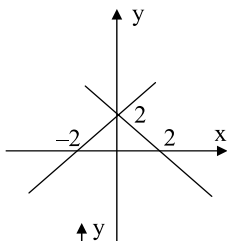
11. Укажите рисунок, на котором приведена графическая иллюстрация решения системы уравнений

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = -x - 2. \end{cases}$$

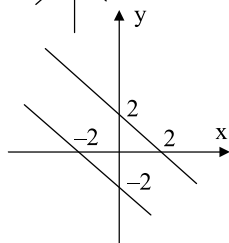
1)



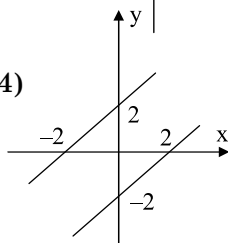
2)



3)



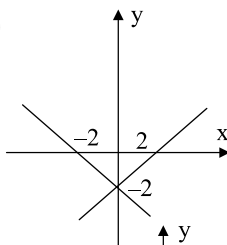
4)



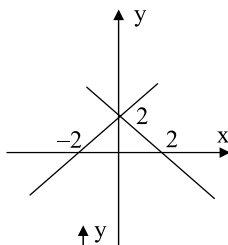
12. Укажите рисунок, на котором приведена графическая иллюстрация решения системы уравнений

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = x + 2. \end{cases}$$

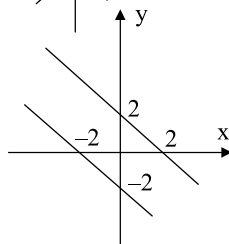
1)



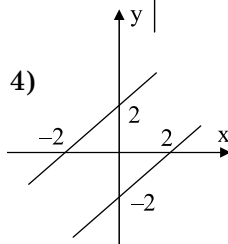
2)



3)

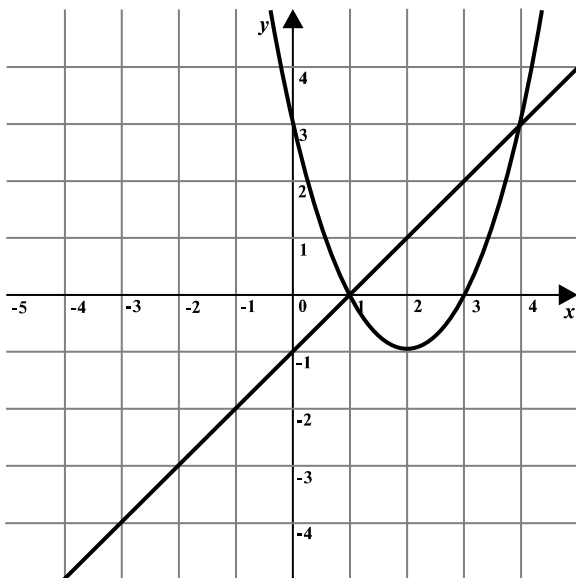


4)



13. На рисунке изображены графики функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = x - 1$. Используя графики, решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3, \\ y = x - 1. \end{cases}$$



Ответ: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x-1}{4} + \frac{y}{6} = 2, \\ \frac{x+2}{6} - \frac{y}{4} = -2,5. \end{cases}$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25 - 2xy. \end{cases}$$

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$$

17. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = 21? \end{cases}$$

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = -11. \end{cases}$$

19. Решите систему уравнений и укажите наименьшую сумму $x_{\text{к}} + y_{\text{к}}$, где $(x_{\text{к}}; y_{\text{к}})$ — решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ 2x^2 - y^2 = 46. \end{cases}$$

20. Решите систему уравнений и укажите наибольшую сумму $x_{\text{к}} + y_{\text{к}}$, где $(x_{\text{к}}; y_{\text{к}})$ — решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 10, \\ x^2 - y^2 + x = 2. \end{cases}$$

Задания на 3 балла

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 12, \\ \frac{x}{y} + 8 \cdot \frac{y}{x} = 6. \end{cases}$$

22. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{9}{x-y} - \frac{4}{x+y} = 1, \\ \frac{6}{x-y} + \frac{12}{x+y} = 8. \end{cases}$$

23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-5)(y+2) = 0, \\ x^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

24. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ x^4 - y^4 = 65? \end{cases}$$

25. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 4y = 8, \\ 3x + 5y = 1, \\ x^2 - 8y^2 = -4. \end{cases}$$

26. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = -19, \\ 2x - 5y = 18, \\ x + y - a = 5 \end{cases}$$

имеет решение?

Задания на 4 балла

27. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$$

28. Сколько различных решений имеет уравнение

$$(x^2 + 2xy + y^2)^2 + (x^2 - 5y - 1)^2 = 0?$$

29. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 37} = 0?$$

30. Решите систему

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 5, \\ z + x = 4. \end{cases}$$

31. Решите систему

$$\begin{cases} xy = 2, \\ yz = 6, \\ zx = 3. \end{cases}$$

32. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 5 + y^2 - 4x = 0, \\ x^2 - 2xy = 8. \end{cases}$$

33. При каких значениях b система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x = b + 4 \end{cases}$$

не имеет решения?

34. При каких значениях b система

$$\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет одно решение?

Тема 4. Неравенства

Решение большинства неравенств сводится к решению соответствующих уравнений. Рассмотрим решение линейных и квадратных неравенств, а также специальный метод решения неравенств — метод интервалов.

В первой части экзаменационной работы обычно требуется решить неравенства без дополнительных условий. Во второй части часто приходится совершать алгебраические преобразования, выбирать решения, удовлетворяющие дополнительным условиям, а также решать неравенства и системы неравенств с параметром.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Всякое значение неизвестного, при котором данное неравенство с неизвестным обращается в верное числовое неравенство, называется **решением неравен-**

ства. Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение. Неравенства вида

$ax + b > 0 (< 0, \geq 0, \leq 0)$, где x — неизвестное, a и b — некоторые действительные числа ($a \neq 0$), называются неравенствами первой степени, или **линейными неравенствами**.

Определение. Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0 (< 0, \geq 0, \leq 0),$$

где $a \neq 0$, называют неравенствами второй степени с одним неизвестным, или **квадратными неравенствами**.

Свойства числовых неравенств

(a, b, c — действительные числа)

Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

(1)

Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

(2)

Если $a > b$ и c — положительное число ($c > 0$), то $ac > bc$.

(3)

Если $a > b$ и c — отрицательное число ($c < 0$), то $ac < bc$.

(4)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

(С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Использование свойств числовых неравенств

Задание 1. Если $a < b$, то верно неравенство:

1) $-2b > -2a$

3) $5 - a < 5 - b$

2) $a - 2 < b - 2$

4) $\frac{a}{5} > \frac{b}{5}$

Решение.

Попытаемся получить из неравенства $a < b$ каждое из неравенств из вариантов 1), 2), 3), 4).

Так как $-2 < 0$, то из неравенства $a < b$ следует $-2a > -2b$ (свойство (4)). И неравенство из варианта 1) неверно.

Так как $a < b$, то по свойству (2) верно $a - 2 < b - 2$. И неравенство из варианта 2) **верно**.

Так как $a < b$, то $-a + 5 > -b + 5$ (свойства (4) и (2)). И неравенство из варианта 3) неверно.

Так как $\frac{1}{5} > 0$, то из неравенства $a < b$ следует неравенство $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$. И неравенство из варианта 4) неверно.

О т в е т: 2.

Линейные неравенства

Задание 2. Укажите наименьшее целое решение неравенства

$$-x + 0,5(x + 4) < 4.$$

Р е ш е н и е.

Сначала раскроем скобки.

$$-x + 0,5x + 2 < 4.$$

При решении линейных неравенств обычно переносят неизвестные слагаемые в левую часть неравенства, а известные — в правую часть и приводят подобные слагаемые.

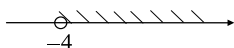
$$-0,5x < 2.$$

Чтобы выразить x , надо разделить обе части неравенства на $(-0,5)$. Знак неравенства меняется на противоположный.

$$-0,5x < 2$$

$$x > -4.$$

Отметим решение неравенства на координатной прямой.



Наименьшим целым решением является число (-3) , а не (-4) .

О т в е т: -3 .

Задание 3. Найдите число целых решений неравенства

$$-3 \leq \frac{x}{4} - 1 < 1.$$

- 1) 14 2) 15 3) 16 4) 17

Решение.

Исходное неравенство называется двойным неравенством. Его можно решать разными способами.

1-й способ (непосредственно)

$$\begin{aligned} -3 &\leq \frac{x}{4} - 1 < 1 \\ -3 + 1 &\leq \frac{x}{4} < 1 + 1 \\ -2 &< \frac{x}{4} < 2 \\ -8 &\leq x < 8 \end{aligned}$$

2-й способ (с помощью системы)

Исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{4} - 1 \geq -3, \\ \frac{x}{4} - 1 < 1. \end{cases}$$

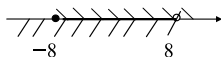
Решим первое неравенство.

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &\geq -3 + 1 \\ \frac{x}{4} &\geq -2 \\ x &\geq -8 \end{aligned}$$

Решим второе неравенство.

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &< 1 + 1 \\ \frac{x}{4} &< 2 \\ x &< 8 \end{aligned}$$

Отметим решения и первого, и второго неравенства на координатной прямой.



Решением системы неравенств будет промежуток $[-8; 8)$.

Количество целых чисел, входящих в промежуток, равно 16.

О т в е т: 3.

Квадратные неравенства

Решение квадратных неравенств

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (< 0, \geq 0, \leq 0)$$

состоит из 5 этапов:

1. Вводим соответствующую функцию $y = ax^2 + bx + c$.
2. Определяем направление ветвей параболы $y = ax^2 + bx + c$ (при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз).
3. Находим нули функции, т.е. решаем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Если уравнение имеет корни, то отмечаем корни на координатной прямой и схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей. Если уравнение не имеет корней, то схематически рисуем параболу в соответствии с направлением ветвей.
5. Находим решение неравенства с учетом смысла знака неравенства.



Решение квадратных неравенств, в зависимости от дискриминанта соответствующего квадратного уравнения, разбивается на 3 случая: 1) $D > 0$; 2) $D = 0$; 3) $D < 0$.

Рассмотрим первый случай: $D > 0$.

Задание 4. Решите неравенство $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$.

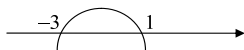
Решение.

1. Пусть $y = -x^2 - 2x + 3$.
2. Так как $a = -1$, то ветви параболы направлены вниз.

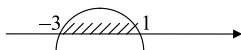
3. Решим уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

Его корни: $x = 1$ и $x = -3$.

4. Отметим числа 1 и (-3) на координатной прямой и построим эскиз графика функции



5. Так как знак неравенства (\geq), то решением его будет отрезок $[-3; 1]$.



О т в е т: $[-3; 1]$.

Рассмотрим случай, когда $D = 0$.

Задание 5. Решите неравенство: $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

Р е ш е н и е.

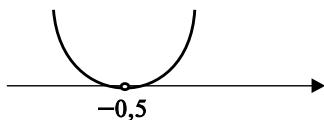
В соответствии со схемой решения квадратного неравенства получаем:

1. Пусть $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

2. $a = 4 > 0$, значит, ветви параболы $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ направлены вверх.

3. Уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ имеет совпавшие корни $x_1 = x_2 = -0,5$. Парабола касается оси абсцисс.

4.



5. Так как знак неравенства ($>$), то решением его являются все числа, кроме $x = -0,5$.

О т в е т: $(-\infty; -0,5) \cup (-0,5; +\infty)$.

Замечание: Решением неравенства $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$. Решением неравенства $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ является только число $-0,5$. Неравенство $4x^2 + 4x + 1 < 0$ решений не имеет.

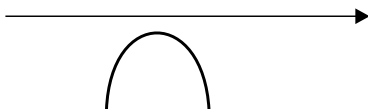
Рассмотрим случай, когда $D < 0$.

Задание 6. Решите неравенство $-x^2 - 6x - 10 < 0$.

Решение.

Имеем:

- 1) $f(x) = -x^2 - 6x - 10$;
- 2) ветви параболы направлены вниз (почему?);
- 3) уравнение $-x^2 - 6x - 10 = 0$ решений не имеет. Парабола не пересекает ось абсцисс и не касается ее.
- 4)



Так как знак неравенства ($<$), то решением его являются все числа.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Замечание: неравенство $-x^2 - 6x - 10 > 0$ решений не имеет.

Область определения выражения



Значения переменной, при которых выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменной. Множество всех допустимых значений переменной называют **областью определения выражения**.

Задание 7. При каких значениях x имеет смысл следующее выражение:

- 1) $\sqrt{-x+6}$;
- 2) $\frac{1}{-x+6}$;
- 3) $\frac{\sqrt{-x+6}}{x-1}$.

Решение.

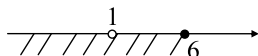
1) Так как выражение \sqrt{a} имеет смысл при $a \geq 0$ (арифметический квадратный корень определен только для неотрицательных чисел), то решим неравенство $-x + 6 \geq 0$. Областью определения исходного выражения будет промежуток $(-\infty; 6]$.

2) Так как выражение $\frac{1}{a}$ имеет смысл при $a \neq 0$, то $-x + 6 \neq 0$ и $x \neq 6$. Областью определения исходного выражения будет объединение промежутков $(-\infty; 6)$ и $(6; +\infty)$.

3) Решим систему

$$\begin{cases} -x + 6 \geq 0, & \begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Отметим решения системы на координатной прямой.



Областью определения исходного выражения будет объединение промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; 6]$.

Ответ: 1) $(-\infty; 6]$; 2) $(-\infty; 6)$ и $(6; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1)$ и $(1; 6]$.

Метод интервалов

При решении более сложных неравенств используют метод интервалов. Поясним его на примерах.

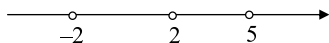
Задание 8. Решите неравенство $\frac{-4}{(-x+5)(x^2-4)} > 0$.

Решение.

Так как числитель дробного выражения отрицателен, то решение исходного неравенства сводится к решению неравенства $(-x+5)(x^2-4) < 0$. Решим неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x) = (-x+5)(x^2-4)$. Найдем нули функции, т.е. решим уравнение $(-x+5)(x^2-4) = 0$. Числа 5; -2; 2 являются нулями функции.

Отметим нули функции на координатной прямой.

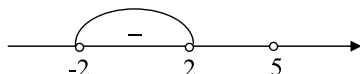


В каждом из промежутков, на которые область определения функции разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль функции, т.е. через точки -2, 2, 5, ее знак меняется.

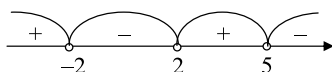
Определим знак функции в каком-нибудь из четырех промежутков. Например, рассмотрим

$$f(0) = (-0 + 5)(0^2 - 4) = 5 \cdot (-4) = -20 < 0,$$

значит, в промежутке $(-2; 2)$ значения функции отрицательны.



Далее происходит чередование знаков.



Итак, мы решаем методом интервалов неравенство $(-x + 5)(x^2 - 4) < 0$. Решением неравенства будет объединение промежутков $(-2; 2)$ и $(5; +\infty)$.

О т в е т: $(-2; 2)$ и $(5; +\infty)$.

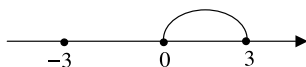
Задание 9. Решите неравенство $x^4 - 9x^2 \geq 0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - 9x^2$. Ее нули 0; -3; 3. Отметим эти числа на координатной прямой и определим знак функции, например, на промежутке $(0; 3)$.

Найдем значение функции в точке 1, $1 \in (0; 3)$.

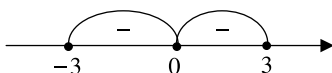
$$f(1) = 1 - 9 < 0.$$



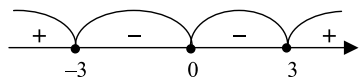
Так как

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(x^2 - 9) = x \cdot x \cdot (x - 3)(x + 3) = \\ &= (x - 0) \cdot (x - 0) \cdot (x - 3)(x + 3), \end{aligned}$$

то число 0 является нулем двойной кратности. При переходе через него знак функции не меняется.



У исходной функции только 0 является нулем двойной кратности, поэтому и при переходе через точку 3 и при переходе через точку (-3) знак функции меняется.



Решением исходного неравенства является не только объединение промежутков $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$, но и точка 0.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [3; +\infty)$.

Замечание: решением неравенства $x^4 - 9x^2 > 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Решением неравенства $x^4 - 9x^2 < 0$ является объединение промежутков $(-3; 0) \cup (0; 3)$.

Решением неравенства $x^4 - 9x^2 \leq 0$ является отрезок $[-3; 3]$.

Неравенства с параметром

Задание 10. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} -5x < 10, \\ x + a \geq 2x \end{cases}$$

1) не имеет решений; 2) имеет ровно два целых решения?

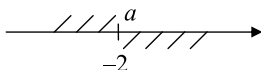
Решение.

1) Решим первое неравенство и приведем подобные слагаемые во втором неравенстве.

$$\begin{cases} x > -2, \\ x \leq a. \end{cases}$$

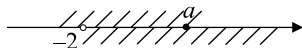
Сравним взаимное расположение точек (-2) и a на координатной прямой и рассмотрим три случая: $a = -2$; $a < -2$; $a > -2$.

При $a = -2$ имеем



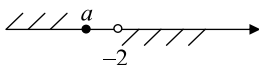
При $a = -2$ система решений не имеет.

При $a > -2$ имеем



При $a > -2$ решением системы является промежуток $(-2; a]$.

При $a < -2$ имеем



При $a < -2$ система решений не имеет.

Получаем, что при $a \leq -2$ система решений не имеет.

2) Система может иметь решения только при $a > -2$. Чтобы система имела ровно два целых решения, необходимо, чтобы в промежутке $(-2; a]$ (см. рисунок ко второму случаю) лежало только два целых числа: -1 и 0 . Это выполняется, если $0 \leq a < 1$.

О т в е т: 1) при $a \leq -2$; 2) при $0 \leq a < 1$.

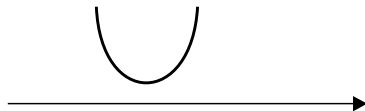
Задание 11. При каких значениях a неравенство $ax^2 + x - 1 > 0$ выполняется при всех значениях x ?

Решение.

Данное неравенство **не при любых** значениях параметра a будет квадратным.

При $a = 0$ имеем: $0 \cdot x^2 + x - 1 > 0$. Получаем линейное неравенство $x - 1 > 0$, которое выполняется не при всех значениях x (например, при $x = -2$: $-2 - 1 < 0$).

При $a \neq 0$ исходное неравенство будем квадратным. Графиком функции $f(x) = ax^2 + x - 1$ является парабола. Для того чтобы неравенство выполнялось при всех значениях x , нужно, чтобы парабола была расположена выше оси абсцисс.



Запишем условия, соответствующие данному положению параболы:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$D = 1^2 + 4 \cdot a.$$

Решением неравенства $D < 0$ является промежуток $(-\infty; -0,25)$.

$$\begin{cases} a > 0, \\ a < -0,25. \end{cases}$$

Система решений не имеет.

Ответ: таких значений a не существует.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Сколько целых чисел входит в промежуток $(-1; 5]$?

- 1) 6 2) 7 3) 5 4) 4

2. Число 5 является решением неравенства

- 1) $(2x - 10)^2 < x^2 - 26$ 3) $x^2 < 2x - 10$
2) $(2x - 10)^2 < x^2 + 25$ 4) $x^2 - 50 > (x - 5)^2$

3. Решите неравенство $7x + 5 < 4x - 7$.

Ответ: _____.

4. Решите неравенство $\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} \leq 1$.

Ответ: _____.

5. Для любых значений x верно неравенство:

- 1) $(x - 2)^2 < 0$ 3) $x^2 < 2$
2) $(x + 3)^2 > 0$ 4) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$

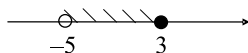
6. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение $\frac{3}{2\sqrt{x}}$?

- 1) $x \geq 0$ 3) $x > 0$
2) $x < 0$ 4) x — любое действительное число

7. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение $\frac{2\sqrt{x}}{5}$?

- 1) $x \geq 0$ 3) $x \neq 0$
 2) $x \leq 0$ 4) x — любое действительное число

8. На рисунке изображен промежуток



- 1) $[-5; 3]$ 2) $(-5; 3]$ 3) $(-5; 3)$ 4) $[-5; 3)$

9. Если $a < b$, то для любых a и b верно неравенство:

- 1) $-5b > -5a$; 3) $2 - a < 2 - b$;
 2) $a^2 < b^2$; 4) $a + 4 < b + 4$.

10. Если $a > t$, то для любых a и t верно неравенство:

- 1) $-3a > -3t$ 3) $3 - a < 3 - t$;
 2) $\frac{a}{t} > 1$; 4) $a - 3 < t - 3$.

11. Если $2 < x < 5$, $4,5 < y < 6$, то значение выражения $x + y$ принадлежит промежутку:

- 1) $(7; 10,5)$ 2) $(6,5; 11)$ 3) $(9; 30)$ 4) $[7; 10,5]$

12. Решите двойное неравенство $-30 \leq 3 - 11y \leq -8$.

Ответ: _____.

13. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5x - 2 \geq -12, \\ 0,5x \leq 4. \end{cases}$$

Ответ: _____.

14. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + 2 \geq 0, \\ x - 1 > 2x. \end{cases}$$

Ответ: _____.

15. Решите неравенство $(x+5)^2 \leq 25 - x^2$.

О т в е т: _____.

16. Решите неравенство $8x - 3x^2 + 3 \geq 0$.

О т в е т: _____.

17. Решите неравенство $x^2 - 10x + 25 > 0$.

О т в е т: _____.

18. Решите неравенство $x^2 - 10x + 25 \leq 0$.

О т в е т: _____.

19. Решите неравенство $x^2 - 10x + 26 < 0$.

О т в е т: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

20. Найдите наибольшее целое значение n , при котором разность $(3 - 2n) - (8 - 1,5n)$ положительна.

21. При каких значениях t выражение $3 - 2t$ принимает положительные значения, меньшие 2.

22. Укажите наименьшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{4} > 3, \\ -x - 2 < -3. \end{cases}$$

23. Укажите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} 5x - 4(2x - 1) > 3(x + 2), \\ 9 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

24. Найдите корень уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$, удовлетворяющий неравенству $-(x - 1) < -(5x + 3)$.

25. Решите неравенство:

$$(m - 1)^2 + (m + 1)^2 \geq 2(m - 1)(m + 1).$$

26. Найдите область определения выражения $\sqrt{1 - x^2}$.

27. Найдите область определения выражения $\frac{\sqrt{1-x}}{x+5}$.
28. Найдите корень уравнения $\frac{x^2-3x+2}{x^2-9} = 0$, удовлетворяющий неравенству $-(5-2x) > -(6,5-3x)$.
29. При каком значении a решением неравенства $ax < 5$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$?
30. Укажите число целых решений неравенства $(2x-1)^2 - 3(2x-1) < 0$.

Задания на 3 балла

31. Решите неравенство $\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} - 2\right)(6x+12) \geq 0$.
32. Найдите целые решения системы неравенств
- $$\begin{cases} 6 - \sqrt{3}x < 0, \\ 16 - \sqrt{8}x \geq 0. \end{cases}$$
33. Решите неравенство $\frac{-2}{(-x-7)(x^2-x)} < 0$.
34. Решите неравенство $(\sqrt{x-4})^2 < 7$.
35. Решите неравенство $(\sqrt{x+4})^2 < \frac{x}{2}$.
36. Найдите область определения выражения $\frac{\sqrt{-x^2+36}}{x^2-4}$.
37. Сколько целых чисел входит в область определения выражения $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{x+1}$?

Задания на 4 балла

38. Решите неравенство $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$.
39. Решите неравенство $x^4 - 10x^2 \geq 0$.
40. Решите неравенство $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$.
41. Найдите наибольшее натуральное решение неравенства $(\sqrt{2}-1)x \leq 1 + \sqrt{2}$.

42. Решите неравенство $x - 5\sqrt{x} + 4 > 0$.

43. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} 4x - 12 < 0, \\ -x + a \leq 0 \end{cases}$$

имеет решения?

44. При каких значениях $a < 0$ система неравенств

$$\begin{cases} 4x - 12 < 0, \\ -x + a \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно пять целых решений?

45. Укажите наименьшее целое значение a , при котором неравенство $-x^2 - 4x + 3 - a < 0$ выполняется при любых значениях x .

Тема 5. Прямоугольная система координат на плоскости

5.1. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПАРАБОЛЫ И ГИПЕРБОЛЫ

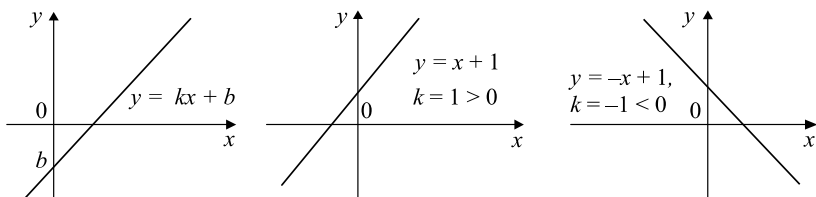
В первой части работы чаще всего представлены задания, требующие установить соответствие между графиком функции и ее аналитическим заданием, т.е. формулой, задающей функцию. Среди графиков функций встречаются прямые, параболы и гиперболы.

Для выполнения заданий по этой теме из любой части работы полезно:

- знать уравнения прямых, парабол и гипербол;
- знать геометрический смысл коэффициентов k и b для уравнения прямой $y = kx + b$ и коэффициентов a и c уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$;
- уметь находить координаты вершины параболы, точки пересечения прямых или прямой и параболы, точки пересечения параболы с осями;
- уметь проверять принадлежность некоторой точки прямой или параболы.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Графиком линейной функции является **прямая**. Уравнение $y = kx + b$ является уравнением прямой, пересекающей ось Oy в точке, ордината которой равна b . Коэффициент k называется угловым коэффициентом прямой.



Две прямые $y_1 = k_1 x + b_1$ и $y_2 = k_2 x + b_2$ являются **параллельными**, если их угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны и $b_1 \neq b_2$. Например, прямые $y = 5x - 3$ и $y = 5x - 4$ параллельны.

Две прямые $y_1 = k_1 x + b_1$ и $y_2 = k_2 x + b_2$ являются **пересекающимися**, если $k_1 \neq k_2$. Например, прямые $y = 4x - 3$ и $y = 5x - 4$ пересекаются. Две пересекающиеся прямые имеют одну общую точку, координаты которой удовлетворяют каждому из уравнений прямых.

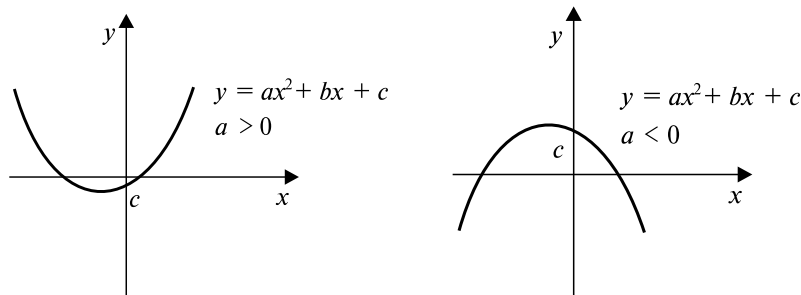
Точка лежит на прямой, если ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Например, точка $M(2; 7)$ лежит на прямой $y = 5x - 3$, так как координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $7 = 5 \cdot 2 - 3$.

Если точка лежит на *оси абсцисс* (Ox), то ее ордината равна нулю ($y = 0$).

Если точка лежит на *оси ординат* (Oy), то ее абсцисса равна нулю ($x = 0$).

Для построения прямой достаточно знать координаты двух точек.

График квадратичной функции называется **параболой**. Уравнение $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — действительные числа и $a \neq 0$, является уравнением параболы, пересекающей ось Oy в точке, ордината которой равна c . Коэффициент a называется старшим коэффициентом. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.



Координаты вершины параболы $(x_в; y_в)$ находят с помощью формул:

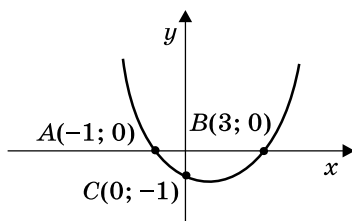
$$x_в = -\frac{b}{2a}, \quad y_в = ax_в^2 + bx_в + c.$$

Координаты точек пересечения параболы с осями находят с помощью следующих рассуждений.

Абсцисса точки пересечения параболы с **осью Oy** равна нулю, а **ордината** точки пересечения равна c (т.к. $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c, y = c$).

Ордината точки пересечения параболы с **осью Ox** равна нулю, а абсциссу точки пересечения можно найти, решив уравнение $0 = ax^2 + bx + c$.

На рисунке парабола пересекает ось OY в точке $C(0; -1)$, а ось OX в точках $A(-1; 0)$ и $B(3; 0)$.

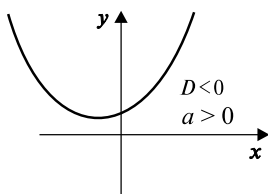
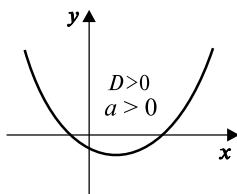
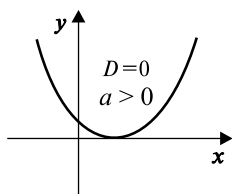


Парабола может иметь одну точку пересечения с осью Ox , может иметь две точки, а может не иметь таких точек. Определить количество точек пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью Ox можно с помощью исследования дискриминанта квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

– если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ равен нулю, то точка пересечения одна;

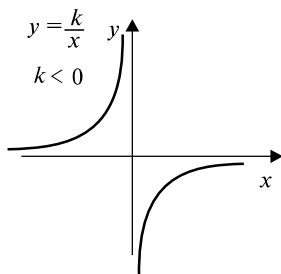
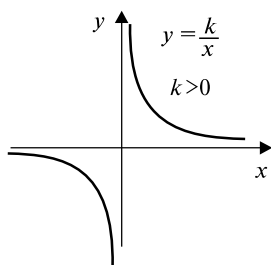
– если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ больше нуля, то точек пересечения две;

– если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ меньше нуля, то точек пересечения нет.



Для нахождения координат точек пересечения (или касания) прямой и параболы нужно решить в системе уравнения прямой и параболы (см., например, решение задания № 10).

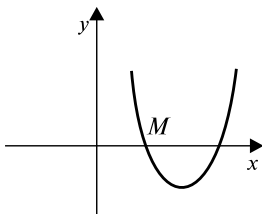
График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ называется **гиперболой**. Число k — коэффициент, $k \neq 0$. В зависимости от знака коэффициента k гипербола будет располагаться либо в I и III квадранте, либо во II и IV квадранте.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Задание 1. На рисунке изображен график функции $y = 4x^2 - 19x + 12$. Укажите координату точки M .

- 1) (0,75; 0)
- 2) (4; 0)
- 3) (0; 4)
- 4) (0; 0,75)



Решение.

Точка M , координаты которой нужно найти, является точкой пересечения параболы с осью абсцисс. Ордината точки M равна 0, так как точка лежит на оси абсцисс. Абсциссу точки M можно найти из уравнения: $4x^2 - 19x + 12 = 0$, $x = 0,75$ или $x = 4$.

Так как точка M расположена на оси Ox левее другой точки пересечения параболы с осью, то абсцисса точки M меньше абсциссы другой точки пересечения: $x = 0,75$. Точка M имеет координаты $(0,75; 0)$.

О т в е т: 1.

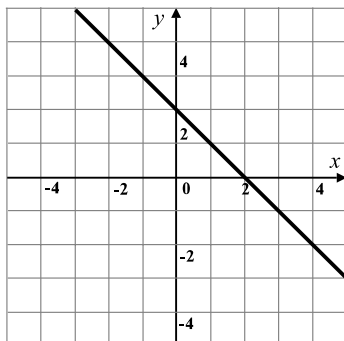
Задание 2. График какой функции изображен на рисунке?

1) $y = -x - 2$

2) $y = 2 - x$

3) $y = x - 2$

4) $y = x + 2$.



Решение.

1-й способ. Прямая, являющаяся графиком функции, проходит через точки с координатами $(2; 0)$ и $(0; 2)$. Подставим эти координаты в общее уравнение прямой $y = kx + b$:

$$\begin{cases} 0 = 2k + b, \\ 2 = b; \end{cases} \quad \begin{cases} k = -1, \\ b = 2. \end{cases}$$

Получим уравнение прямой $y = -x + 2$.

2-й способ. Точки лежат на прямой, значит, их координаты $(2; 0)$ и $(0; 2)$ удовлетворяют уравнению этой прямой. Можно проверить принадлежность этих точек каждой из четырех прямых.

3-й способ. Прямая, изображенная на графике, получена сдвигом прямой $y = -x$ на две единицы вверх. Поэтому на графике — прямая $y = -x + 2$.

О т в е т: 2.

Задание 3. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке $(3; 0)$, а ось Oy в точке $(0; 9)$. Запишите уравнение этой прямой. Проходит ли эта прямая через точку $(-1; 11)$?

Р е ш е н и е.

Если задана точка, лежащая на оси Oy , то коэффициент b известен и равен ординате точки, т.е. $b = 9$. Для того чтобы найти коэффициент k , нужно подставить координаты точки $(3; 0)$ в уравнение $y = kx + 9$, $k = -3$.

Уравнение прямой можно найти и другим способом. Прямая проходит через две точки, поэтому их координаты $(3; 0)$ и $(0; 9)$ удовлетворяют уравнению прямой:

$$\begin{cases} 0 = 3k + b, \\ 9 = b; \end{cases} \quad \begin{cases} k = -3, \\ b = 9. \end{cases}$$

Уравнение прямой $y = -3x + 9$.

Прямая $y = -3x + 9$ не проходит через точку $(-1; 11)$, так как ее координаты не удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, $11 \neq -3(-1) + 9$.

О т в е т: $y = -3x + 9$. Прямая не проходит через точку $(-1; 11)$.

Задание 4. Парабола с вершиной в точке $(-1; 2)$ проходит через точку с координатами $(1; 8)$. В каких точках парабола пересекает ось абсцисс?

Р е ш е н и е.

Уравнению параболы удовлетворяют координаты двух заданных в условии точек:

$$\begin{cases} 2 = (-1)^2 a + b(-1) + c, \\ 8 = a + b + c; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = a - b + c, \\ 8 = a + b + c; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2 = a - b + c, \\ 6 = 2b; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3, \\ a + c = 5. \end{cases}$$

Точка $(-1; 2)$ является вершиной параболы, значит, по формуле координат вершины параболы

$$x_b = -\frac{b}{2a}, \quad -1 = -\frac{b}{2a}, \quad b = 2a.$$

Получили, что $b = 2a = 3$, значит $a = 1,5$.

Имеем $b = 3$, $a = 1,5$, коэффициент c найдем из второго уравнения системы $c = 3,5$. Уравнение параболы имеет вид $y = 1,5x^2 + 3x + 3,5$.

Для того чтобы определить, в каких точках парабола пересекает ось абсцисс, нужно решить уравнение

$$1,5x^2 + 3x + 3,5 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения меньше нуля, поэтому уравнение корней не имеет, следовательно, парабола не пересекает ось абсцисс.

Ответ: $y = 1,5x^2 + 3x + 3,5$; пересечений с осью Ox нет.

Задание 5. При каком значении параметра k парабола $y = 4x^2 + 12x + k$ касается оси абсцисс?

Решение.

1-й способ. Найдем абсциссу точки касания. Так как касание возможно только в вершине, то найдем абсциссу вершины: $x_a = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$.

Вершина параболы лежит на оси абсцисс, поэтому ордината вершины равна нулю:

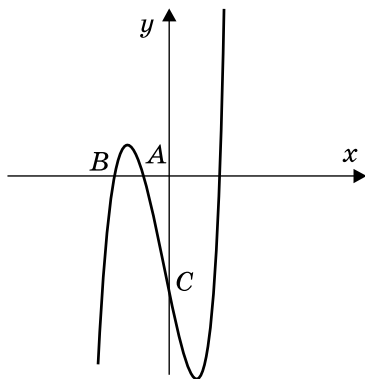
$$0 = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 12 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + k.$$

Отсюда найдем k ; $k = 9$.

2-й способ. По условию парабола с осью абсцисс имеет только одну общую точку. Это возможно только в том случае, если дискриминант квадратного уравнения $4x^2 + 12x + k = 0$ равен нулю. Так как $D = 144 - 16k = 0$, то $k = 9$.

Ответ: 9.

Задание 6. На рисунке изображен график функции $y = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Найдите координаты точек A , B , и C .



Решение.

Точки A и B являются точками пересечения графика функции с осью Ox . Для того чтобы найти их координаты, решим уравнение:

$$x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0, \quad x^2(x+1) - 5(x+1) = 0, \\ (x^2 - 5)(x+1) = 0.$$

Решениями уравнения являются числа $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ и -1 . Все эти числа являются абсциссами точек пересечения графика функции с осью Ox . Так как $-\sqrt{5} < -1$, то точка B имеет координаты $(-\sqrt{5}; 0)$, точка A имеет координаты $(-1; 0)$.

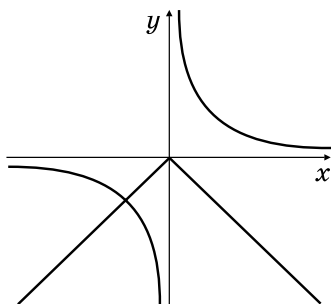
Координаты точки C найти проще: абсцисса равна нулю, а ордината равна $y(0) = -5$.

Ответ: $A(-1; 0)$, $B(-\sqrt{5}; 0)$, $C(0; -5)$.

Задание 7. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(|x| + y)(xy - 2) = 0$.

Решение.

Решением уравнения $(|x| + y)(xy - 2) = 0$ является решение уравнения $y = -|x|$ или уравнения $y = \frac{2}{x}$. Точки, координаты которых удовлетворяют уравнению:



$$(|x| + y)(xy - 2) = 0,$$

лежат на гиперболе $y = \frac{2}{x}$, на луче $y = x$, $x \in (-\infty; 0]$ и на луче $y = -x$, $x \in [0; \infty)$.

Ответ: графиком является объединение гиперболы $y = \frac{2}{x}$ и графика функции $y = -|x|$.

Задание 8. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $A(-5; 9)$. Определите знаки коэффициентов a , b , c , если $a + b + c > 0$.

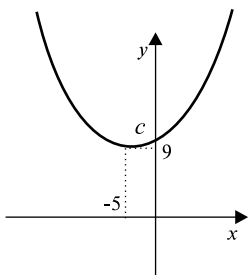
Решение.

Запишем все условия. Так как вершина параболы имеет координаты $(-5; 9)$, то верно, что $-5 = -\frac{b}{2a}$, $10a = b$, т.е. коэффициенты a и b имеют один и тот же знак. Имеем следующие условия:

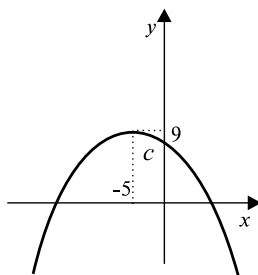
1) a и b одного знака, т.е. возможны только два случая $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$;

2) $a + b + c > 0$.

Изобразим схематически графики.



1) $a > 0$ и $b > 0$



2) $a < 0$ и $b < 0$

1) Для первого случая $y \geq 9$, значит $c \geq 9$, значит коэффициент $c > 0$.

2) Во втором случае, так как $y \leq 9$, значит и $c \leq 9$, значит коэффициент c может быть или отрицательным, или положительным.

Если $c < 0$, то неравенство $a + b + c > 0$ неверное, значит $c > 0$.

Получаем, что $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

О т в е т: возможны два случая: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ или $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

Замечание. Если заметить, что для любых чисел a , b , c , являющихся коэффициентами квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a + b + c = f(1)$, то задание № 8 можно решить проще. Так как по условию $a + b + c > 0$, то $f(1) > 0$. Это означает, что точка графика с координатами $(1; f(1))$ лежит в первой четверти, поэтому $c > 0$.

Задание 9. Прямая $x = 2$ — ось симметрии параболы $y = ax^2 + (a^2 + 4)x - 4$, ветви которой направлены вниз. Найдите координаты вершины параболы.

Решение.

Так как, по условию, ветви параболы направлены вниз, то старший коэффициент $a < 0$. Так как прямая $x = 2$ — ось симметрии параболы, то абсцисса вершины равна 2. Найдем ординату вершины, для этого подставим в уравнение параболы $x = 2$.

Получим $y = 4a + (a^2 + 4)2 - 4$, $y = 2a^2 + 4a + 4$.

Ордината выражена через параметр a . Найдем его. Известна формула, связывающая абсциссу вершины параболы и коэффициенты квадратного трехчлена:

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}, \quad 2 = -\frac{a^2 + 4}{2a}, \quad 4a = -a^2 - 4, \\ a^2 + 4a + 4 = 0, \quad a = -2.$$

Подставим найденное значение параметра в выражение для ординаты вершины, получим $y = 8 - 8 + 4$, $y = 4$.

Получаем, что вершина параболы имеет координаты $(2; 4)$.

О т в е т: $(2; 4)$.

Задание 10. Прямая, параллельная прямой $y = -4x$, касается параболы $y = x^2 - 2$. Вычислите координаты точки касания.

Решение.

С помощью условия параллельности прямой $y = -4x$ и касательной к параболе получим, что уравнение касательной имеет вид $y = -4x + b$.

Касательная к параболе и парабола имеют одну общую точку, следовательно, система уравнений должна иметь единственное решение:

$$\begin{cases} y = -4x + b, \\ y = x^2 - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x + b, \\ x^2 - 2 = -4x + b; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x + b, \\ x^2 + 4x - (b + 2) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет единственное решение, когда его дискриминант равен нулю $24 + 4b = 0$, $b = -6$.

Уравнение касательной к параболе имеет вид

$$y = -4x - 6.$$

Найдем координаты точки касания:

$$\begin{cases} y = -4x - 6, \\ y = x^2 - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x - 6, \\ x^2 - 2 = -4x - 6; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x - 6, \\ x^2 + 4x + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 2)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Установите соответствие между функциями и их графиками. Функции заданы формулами:

а) $y = \frac{-4}{x}$; б) $y = -4x^2 - x$; в) $y = -4x - 1$.

1) парабола; 2) гипербола; 3) прямая.

Ответ: _____.

2. Графику функции $y = -\frac{5}{x}$ принадлежит точка

1) (0; 1) 3) (-10; 0,2)

2) (10; -2) 4) $(25; -\frac{1}{5})$

3. Графику функции $y = \frac{3}{x}$ принадлежит точка

1) (0; 3) 3) (-10; -0,3)

2) (-10; 0,3) 4) $(18; \frac{1}{9})$

4. Графику функции $y = -\frac{7}{x}$ принадлежит точка

1) (0; -7) 3) (-10; 0,7)

2) $(49; \frac{1}{7})$ 4) (14; 2)

5. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если ему принадлежит точка (-2; -5)?

1) III 2) I и III 3) I и II 4) III и IV

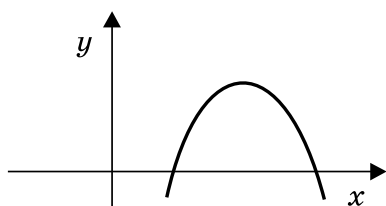
6. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если ему принадлежит точка (-5; 2)?

1) III 2) II и III 3) II и IV 4) I и IV

7. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если ему принадлежит точка (2; -5)?

1) I 2) I и IV 3) II и IV 4) III и IV

8. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a и c .



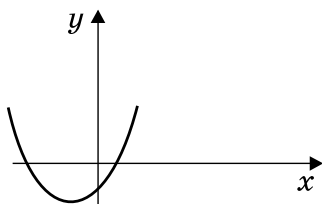
1) $a < 0$ и $c < 0$

2) $a < 0$ и $c > 0$

3) $a > 0$ и $c < 0$

4) $a > 0$ и $c > 0$

9. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a и c .



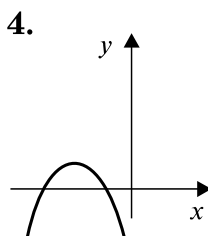
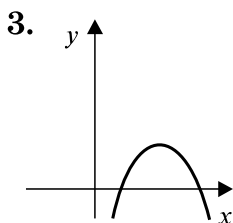
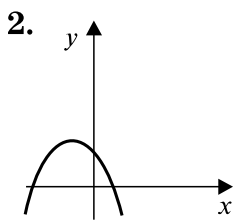
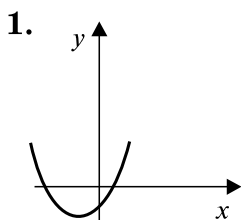
1) $a < 0$ и $c < 0$

2) $a < 0$ и $c > 0$

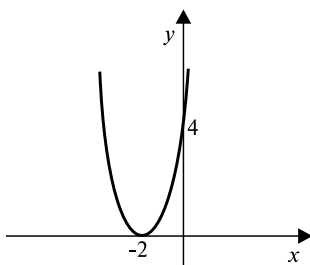
3) $a > 0$ и $c < 0$

4) $a > 0$ и $c > 0$

10. На каком из рисунков изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если известно, что $a < 0$ и квадратный трехчлен имеет корни разных знаков?



11. На рисунке изображена парабола. Графиком какой из функций она является?



1) $y = (x + 2)^2$

2) $y = x^2 - 2$

3) $y = (x - 2)^2$

4) $y = (x + 2)^2 + 2$

12. Установите соответствие между функциями и их графиками.

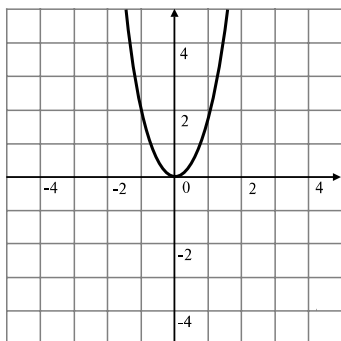
1) $y = \frac{2}{x}$

2) $y = 2x^2$

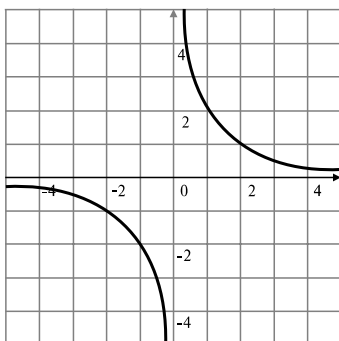
3) $y = x - 2$

4) $y = 2x$

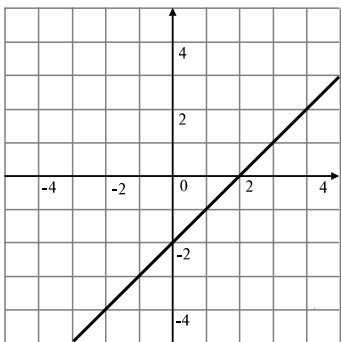
А.



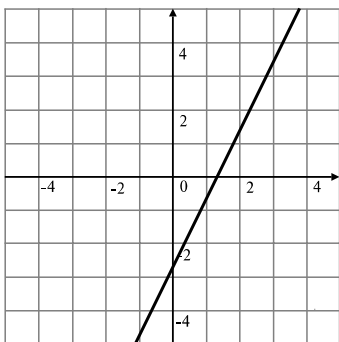
Б.



В.

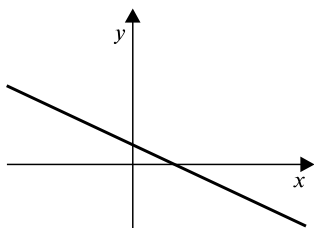


Г.



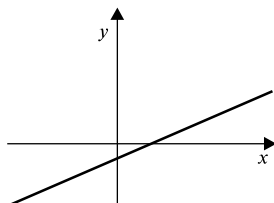
Ответ: _____.

13. По графику линейной функции $y = kx + b$ определите знаки коэффициентов k и b .



- 1) $k < 0$ и $b < 0$
- 2) $k < 0$ и $b > 0$
- 3) $k > 0$ и $b < 0$
- 4) $k > 0$ и $b > 0$

14. По графику линейной функции $y = kx + b$ определите знаки коэффициентов k и b .



- 1) $k < 0$ и $b < 0$
- 2) $k < 0$ и $b > 0$
- 3) $k > 0$ и $b < 0$
- 4) $k > 0$ и $b > 0$

15. При каком значении параметра a прямая $y = a - 4 - (a + 2)x$ проходит через начало координат?

- 1) -2
- 2) 4
- 3) -6
- 4) 0

16. При каком значении параметра a прямая $y = a + 6 - (a + 1)x$ проходит через начало координат?

- 1) -1
- 2) -5
- 3) -6
- 4) 0

17. Графики функций $y = 5x - 7$ и $y = 2x - 1$ пересекаются в точке

- 1) $(2; 3)$
- 2) $(-2; 3)$
- 3) $(3; -2)$
- 4) $(-3; -2)$

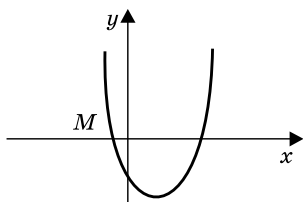
18. Графики функций $y = 12x - 5$ и $y = 3x + 4$ пересекаются в точке

- 1) $(-7; 1)$
- 2) $(7; -1)$
- 3) $(1; 7)$
- 4) $(7; 1)$

19. На рисунке изображен график функции

$$y = x^2 - 3x - 4.$$

Укажите координату точки M .



1) $(0; -1)$

2) $(0; 1)$

3) $(1; 0)$

4) $(-1; 0)$

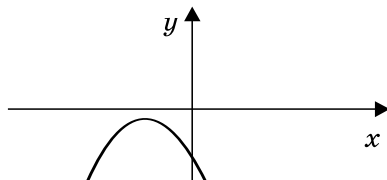
ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

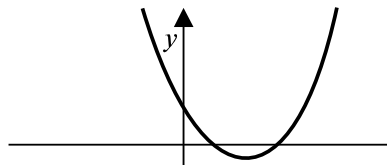
20. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке $(-2; 0)$, а ось Oy в точке $(0; 6)$. Запишите уравнение этой прямой. Проходит ли эта прямая через точку $(1; 9)$?

21. Прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке $(4; 0)$, а ось Oy в точке с ординатой -1 . Запишите уравнение этой прямой. В какой координатной четверти нет точек этой прямой?

22. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a , b , c .



23. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a , b , c .



24. При каком значении k парабола $y = 2x^2 + 3x + k$ касается оси абсцисс?

25. При каком значении m парабола $y = 2x^2 - 4x + m$ касается оси абсцисс?

26. При каком значении k парабола $y = -5x^2 + 4x + k$ касается оси абсцисс? Найдите точку касания.

27. Прямая $y = -9x$ пересекает параболу $y = x^2 - 10$ в двух точках. Выясните координаты точки B , если известно, что она лежит ниже оси абсцисс.

28. Проходят ли через одну точку прямые $y = 8 - 2x$, $y = 2x$, $y = 3x - 2$.

Задания на 3 балла

29. Найдите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 3x$ и проходящей через точку $A(2; -2)$.

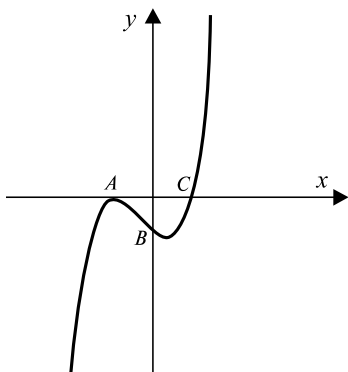
30. Найдите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 2x$ и проходящей через точку $A(-2; 5)$.

31. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $(-3; -2)$ и $(1; 2)$. Запишите уравнение этой прямой. В каких точках прямая пересекает оси координат?

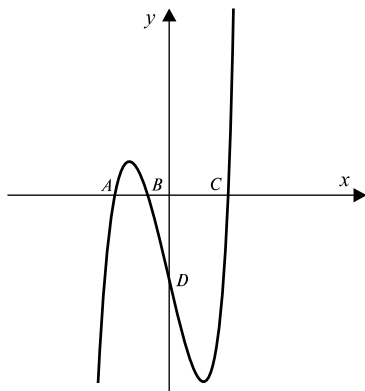
32. Парабола с вершиной в точке $(1; 2)$ проходит через точку с координатами $(-2; -1)$. В каких точках парабола пересекает ось абсцисс?

33. Парабола с вершиной в точке $(3; 2)$ проходит через точку с координатами $(6; -1)$. В каких точках парабола пересекает ось абсцисс?

34. На рисунке изображен график функции $y = x^3 + x^2 - x - 1$. Найдите координаты точек A , B , и C .



35. На рисунке изображен график функции $y = x^3 + x^2 - 3x - 3$. Найдите координаты точек A , B , C и D .



Задания на 4 балла

36. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $A(3; -7)$. Определите знаки коэффициентов a , b , c , если $y(0) > 0$.

37. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $A(2; 8)$. Определите знаки коэффициентов a , b , c , если $a - b + c > 0$.

38. Прямая, параллельная прямой $y = 4x$, касается параболы $y = x^2 + 3$. Вычислите координаты точки касания.

39. Прямая, параллельная прямой $y = -6x$, касается параболы $y = -x^2 + 2$. Вычислите координаты точки касания.

40. Прямая $x = 1$ — ось симметрии параболы

$$y = ax^2 + (a^2 - 8)x + 2,$$

ветви которой направлены вверх. Найдите координаты вершины параболы.

41. Прямая $x = 2$ — ось симметрии параболы

$$y = ax^2 + (a^2 + 4)x + 2,$$

ветви которой направлены вниз. Найдите координаты вершины параболы.

42. Прямая $x = -1$ — ось симметрии параболы

$$y = ax^2 + (a^2 - 8)x + 2,$$

ветви которой направлены вниз. Найдите координаты вершины параболы.

43. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(2x + y)(xy - 2) = 0.$$

44. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{xy-1}{1-x^2} = 0.$$

45. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0.$$

46. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2 + y^2 - 6)^2 = 4$.

5.2. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение окружности с центром в начале координат $O(0; 0)$ и радиусом R имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности с центром в точке $A(a; b)$ и радиусом R имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Задание 1. Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 8$. Укажите радиус этой окружности.

1) 8

2) 4

3) 2

4) $2\sqrt{2}$

Решение.

По условию задано уравнение окружности, с центром в начале координат. В соответствии с общим видом уравнения такой окружности получаем, что $R^2 = 8$. Так как значение радиуса окружности всегда положительно, то $R = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: 4.

Задание 2. Уравнение окружности имеет вид

$$(x + 9)^2 + (y - 2)^2 = 16.$$

Определите координаты центра окружности.

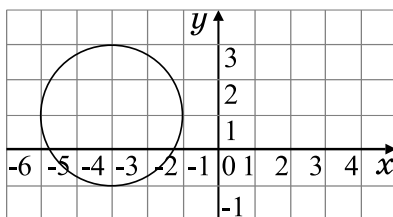
- 1) (9; -2) 2) (-9; 2) 3) (9; 4) 4) (3; 2)

Решение.

Сравним уравнение окружности с центром в точке $A(a; b)$ и радиусом R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ с уравнением, заданным по условию $(x + 9)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Получим, что $a = -9$, $b = 2$, тогда координаты центра окружности $(-9; 2)$.

Ответ: 2.

Задание 3. На рисунке изображена окружность. Запишите ее уравнение.



Решение.

Для того чтобы записать уравнение окружности, нужно знать координаты центра окружности $A(a; b)$ и радиус окружности R . Из чертежа центр окружности имеет координаты $(-3; 1)$, а $R = 2$. Теперь подставим найденные значения в уравнение окружности: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Получим $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

О т в е т: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Задание 4. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

Решение.

Преобразуем данное уравнение, выделив в каждой скобке полный квадрат:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 8y) - 8 = 0,$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 8y + 16) - 8 - 1 - 16 = 0.$$

Получим $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Из последнего уравнения находим радиус окружности: $R^2 = 25$, $R = 5$. Центр окружности — точка $(-1; 4)$.

Ответ: центр окружности — точка $(-1; 4)$, радиус $R = 5$.

Задание 5. Запишите уравнение окружности, проходящей через три точки с координатами $(6; 4)$, $(5; 5)$ и $(7; 1)$.

Решение.

Для того чтобы записать уравнение окружности, нужно знать координаты центра окружности и радиус окружности.

1) Найдем координаты центра окружности. Подставим координаты точек в общее уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} (6 - a)^2 + (4 - b)^2 = R^2, \\ (5 - a)^2 + (5 - b)^2 = R^2, \\ (7 - a)^2 + (1 - b)^2 = R^2. \end{cases}$$

Приравняем левые части двух первых уравнений системы:

$$36 - 12a + a^2 + 16 - 8b + b^2 = 25 - 10a + a^2 + 25 - 10b + b^2,$$

$$2a = 2 + 2b,$$

$$a = b + 1$$

Полученное выражение a через b подставим в первое и третье уравнения и приравняем их левые части:

$$(5 - b)^2 + (4 - b)^2 = (6 - b)^2 + (1 - b)^2.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем b .

Получим $b = 1$, поэтому $a = b + 1 = 2$. Центр окружности в точке с координатами $(2; 1)$.

2) Найдем радиус окружности, подставив координаты центра в любое из уравнений системы, например в первое, получим $(6 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = R^2$, $4^2 + 3^2 = R^2$, $R^2 = 25$.
 $R = 5$.

Подставим найденные значения $a=2$, $b=1$ и $R=5$ в общее уравнение окружности. Получим

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

Ответ: уравнение окружности, проходящей через точки с координатами $(6; 4)$, $(5; 5)$ и $(7; 1)$, имеет вид $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЧАСТЬ I

1. Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 16$. Определите координаты центра окружности.

Ответ: _____.

2. Уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 4$. Определите радиус окружности.

- 1) 8 2) 2 3) 4 4) 16

3. Уравнение окружности имеет вид

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

Определите координаты центра окружности.

- 1) $(-1; 3)$ 3) $(-1; -3)$

- 2) $(1; 3)$ 4) $(1; -3)$

4. Уравнение окружности имеет вид

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

Определите координаты центра окружности.

- 1) $(-1; 3)$ 3) $(-1; -3)$

- 2) $(3; 1)$ 4) $(1; -3)$

5. Уравнение окружности имеет вид

$$(x + 4)^2 + (y - 9)^2 = 1.$$

Определите координаты центра окружности.

- 1) $(-4; 9)$ 2) $(2; -3)$ 3) $(-2; 3)$ 4) $(9; 1)$

6. Уравнение окружности имеет вид

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 12.$$

Определите радиус окружности.

- 1) 12 2) 6 3) $4\sqrt{3}$ 4) $2\sqrt{3}$

7. Уравнение окружности имеет вид

$$(x - 9)^2 + (y - 4)^2 = 1.$$

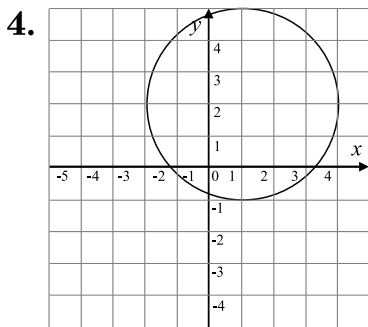
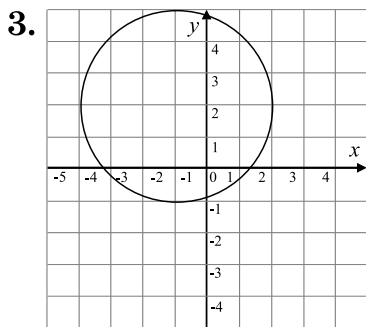
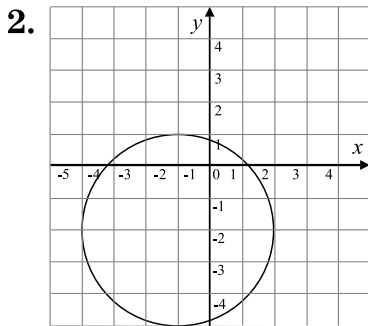
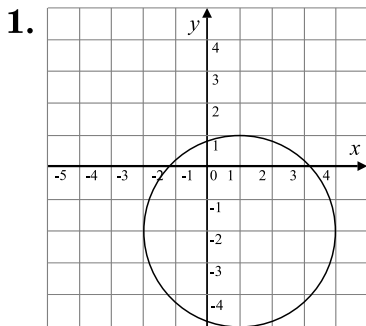
Определите радиус окружности.

- 1) 3 2) 2 3) 1 4) 0,5

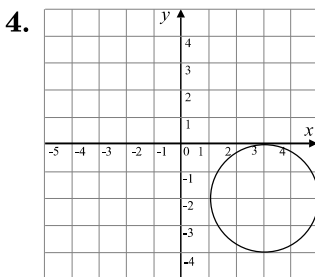
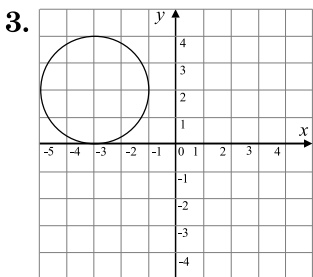
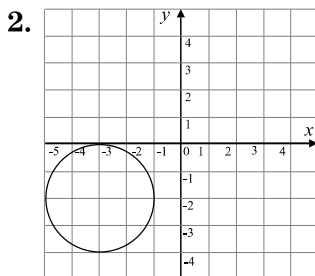
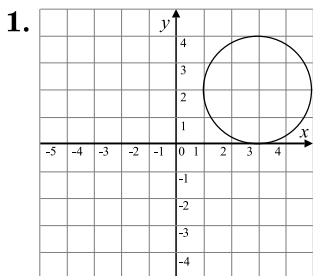
8. Уравнение окружности имеет вид

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

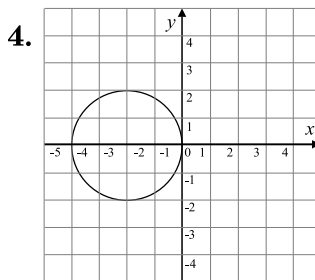
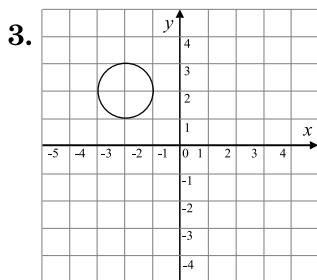
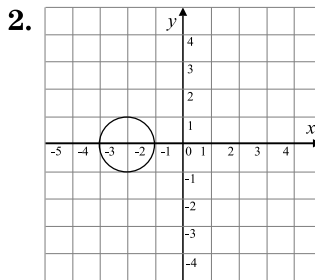
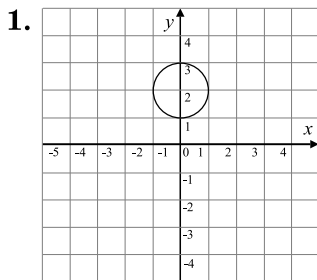
Укажите рисунок, на котором изображена эта окружность.



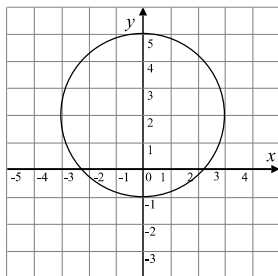
9. Уравнение окружности имеет вид $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
Укажите рисунок, на котором изображена эта окружность.



10. Уравнение окружности имеет вид $(x + 2)^2 + y^2 = 1$.
Укажите рисунок, на котором изображена эта окружность.

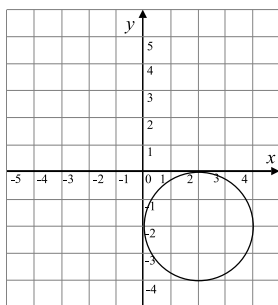


11. На рисунке изображена окружность. Запишите уравнение этой окружности.



Ответ: _____.

12. На рисунке изображена окружность. Запишите уравнение этой окружности.



Ответ: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

13. Постройте окружность, заданную уравнением

$$121 - x^2 - y^2 = 0.$$

14. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

15. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

16. Окружность задана уравнением

$$x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0.$$

Найдите центр окружности и ее радиус.

Задания на 4 балла

17. Используя графики, определите число решений системы

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

18. Используя графики, определите число решений системы

$$\begin{cases} |x| + |y| = 4, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

19. Используя графики, определите число решений системы

$$\begin{cases} |x| + |y| = 8, \\ x^2 + y^2 = 49. \end{cases}$$

20. Используя графики, определите число решений системы

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

21. Используя графики, определите число решений системы

$$\begin{cases} x = y^2 - 12y + 36, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

22. Используя графики, определите число решений системы

$$\begin{cases} x = 4y^2 - 16, \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$$

23. Запишите уравнение окружности, проходящей через три точки с координатами $(-1; 1)$, $(3; 1)$ и $(1; 3)$.

24. Запишите уравнение окружности, проходящей через три точки с координатами $(4; 4)$, $(5; 1)$ и $(3; 5)$.

Задания на 6 баллов

25. Окружность, радиус которой 1, проходит через точки с координатами (2; 3) и (4; 1). Запишите уравнение этой окружности.

26. Окружность, радиус которой 5, проходит через точки с координатами (−1; 5) и (2; 4). Запишите уравнение этой окружности.

27. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2 - 5)^2 = 16.$$

28. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2 - 5)^3 = 64.$$

29. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2 - 6y + 5)(y - x - 5) = 0.$$

30. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2 + y^2 - 6y + 5}{y - x - 5} = 0.$$

Тема 6. Функции

В первой части экзаменационной работы чаще всего представлены задания, проверяющие:

а) умение «считывать» свойства функции по ее графику;
б) умение анализировать графики, которые описывают зависимость между величинами, например между расстоянием и временем, между объемом выполненной работы и временем и т.д., умение установить соответствие между графиком функции и ее аналитическим заданием.

Во второй части работы практически во всех заданиях по этой теме требуется сначала построить график функции, а затем ответить на дополнительные вопросы.

Чаще всего в заданиях встречаются квадратичные, линейные или кусочно-заданные функции.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

$D(y)$ — область определения функции y — множество, на котором задается функция. При графическом способе задания функции ее область определения может считываться по графику. Для нахождения области определения надо спроектировать все точки графика функции на ось Ox . Если функция задана аналитически (формулой) и ее область определения не указана, то это означает, что функция задается на естественной области определения.

$E(y)$ — множество значений (область значений) функции y , которые она принимает при всех значениях аргумента из ее области определения. Проще всего находить множество значений функции, если задан ее график. В этом случае надо спроектировать все точки графика функции на ось Oy . Получившееся множество точек будет множеством значений функции. Это множество может задаваться конечным числом точек, состоять из одного или нескольких промежутков.

Нули функции. Для функции $f(x)$, заданной графически, — это абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось абсцисс или касается ее. Чтобы найти нули функции, заданной аналитически, надо решить уравнение $f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ возрастает на множестве X , если для любых x_1 и x_2 из множества X , таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Иными словами, функция называется *возрастающей* на множестве X , если для любых двух значений аргумента из этого множества большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция $f(x)$ убывает на множестве X , если для любых x_1 и x_2 из множества X , таких что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Иными словами, функция называется *убывающей* на множестве X , если для любых двух значений аргумента из этого множества большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Свойство графика четной функции — симметричность относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Свойство графика нечетной функции — симметричность относительно начала координат.

Свойства линейной функции $y = kx + b, k \in R, b \in R$

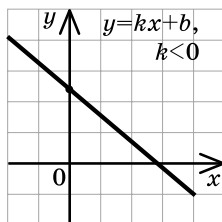
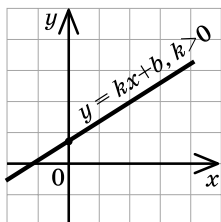
1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Область значений: $E(y) = (-\infty; +\infty)$, если $k \neq 0$.
 $E(y) = \{b\}$, если $k = 0$.

3) Монотонность:

– если $k > 0$, то функция y возрастает на всей области определения;

– если $k < 0$, то функция y убывает на всей области определения.



Свойства обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}, k \neq 0$

1) Область определения: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

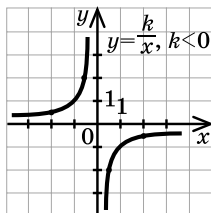
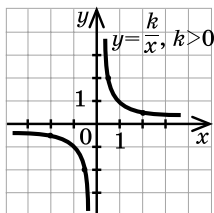
2) Область значений: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3) Монотонность:

– если $k > 0$, то функция y убывает на промежутке $(0; +\infty)$ и на промежутке $(-\infty; 0)$;

– если $k < 0$, то функция y возрастает на промежутке $(0; +\infty)$ и на промежутке $(-\infty; 0)$.

4) Функция является нечетной.

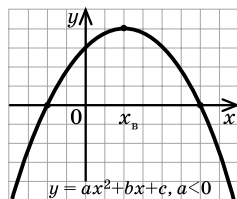
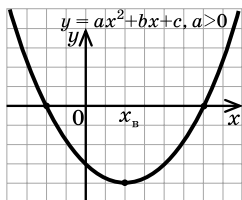


Свойства дробно-рациональной функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$,
где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x

- 1) Область определения $D(y)$ — любые действительные x , не обращающие знаменатель $Q(x)$ в нуль.
- 2) Множество значений $E(y)$ зависит от конкретной функции.

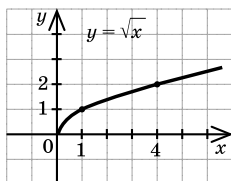
Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$
 $a \in R, b \in R, c \in R$ — коэффициенты, $a \neq 0$

- 1) Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) График квадратного трехчлена — парабола с вершиной в точке с абсциссой $x_в = -\frac{b}{2a}$,
направленная ветвями вверх, если $a > 0$;
направленная ветвями вниз, если $a < 0$.
- 3) Множество значений: $E(y) = [y_в; +\infty)$, если $a > 0$;
 $E(y) = (-\infty; y_в]$, если $a < 0$, $y_в$ — ордината вершины параболы.



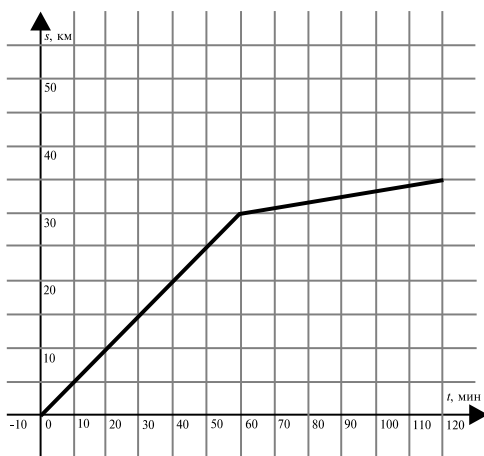
Свойства функции $y = \sqrt{x}$

- 1) Область определения $D(y) = [0; +\infty)$.
- 2) Множество значений $E(y) = [0; +\infty)$.
- 3) Монотонность: функция y возрастает на всей области определения.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Задание 1. График описывает движение парусной яхты, которая первую часть пути прошла под парусом. Спустив парус, она продолжила движение.



1) Найдите скорость яхты «под парусом» и «без паруса» (выразив ее в км/ч).

2) На каком расстоянии от начала движения находилась яхта через 50 минут, через 2 часа?

3) Сколько времени потребуется яхте на обратный путь, если она будет двигаться с той же скоростью, что и на первом участке «под парусом»?

Решение.

1) Под парусом яхта прошла 30 км за 60 мин, т.е. за 1 ч, значит ее скорость была $v = \frac{s}{t} = 30$ км/ч. Без паруса яхта прошла 5 км за 60 мин, значит ее скорость была 5 км/ч.

Ответ: скорость яхты «под парусом» 30 км/ч, скорость яхты «без паруса» 5 км/ч.

2) На графике найдем точку с абсциссой, равной 50. Найдем ординату этой точки. Она равна 25. Получили, что за 50 мин яхта пройдет 25 км. Аналогично, за 120 мин — 35 км.

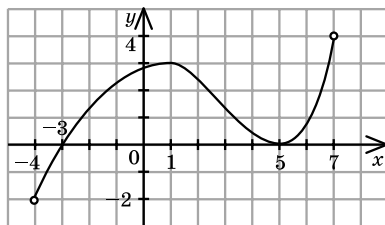
Ответ: 25 км, 35 км.

3) Обратный путь составляет 35 км. Скорость яхты 30 км/ч.

Найдем время обратного пути: $t = \frac{s}{v} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$ ч, что составляет 1 час 10 минут.

О т в е т: 1 ч 10 мин.

Задание 2. Функция задана графиком.



Укажите:

- а) область определения функции;
- б) область значений функции;
- в) промежутки, на которых функция принимает только положительные значения;
- г) нули функции;
- д) промежутки возрастания функции.

Решение.

а) Для того чтобы найти область определения функции, заданной графически, надо спроектировать все точки графика на ось Ox . Полученный промежуток и будет областью определения функции $D(y)=(-4; 7)$.

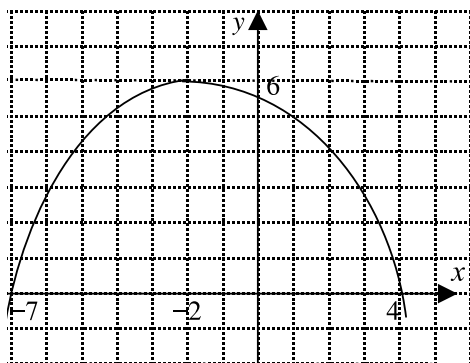
б) Для того чтобы найти множество значений функции, заданной графически, надо спроектировать все точки графика на ось Oy . Полученный промежуток и будет множеством значений функции $E(y)=(-2; 4)$.

в) Надо найти те промежутки оси Ox , на которых график функции расположен выше оси Ox . Положительные значения функция принимает на промежутке $(-3; 5)$ и на промежутке $(5; 7)$. В точке $x = 5$ функция обращается в нуль.

г) Надо найти те точки, в которых график функции пересекает ось Ox или касается ее. Нулями функции будут 5 и -3 .

д) Для определения промежутков возрастания функции можно воспользоваться определением, но для того, чтобы прочесть график, достаточно знать графическую интерпретацию возрастания функции на промежутке: график функции «поднимается вверх». Получаем, что функция возрастает на промежутке $(-4; 1]$ и на промежутке $[5; 7)$.

Задание 3. Используя график функции $y = f(x)$, определите, какое утверждение верно.



- 1) Нулями функции являются числа $-7; -2; 4$.
- 2) Функция убывает на промежутке $[-2; +\infty)$.
- 3) $f(x) < 0$ при $-7 < x < 0$.
4. $f(0) = 4$.

Решение.

Нулями функции являются числа -7 и 4 .

$f(-2) = 6 \neq 0$, поэтому $x = -2$ не является нулем функции. $f(0) > 0$.

Функция принимает положительные значения ($f(x) > 0$), т.е. график функции расположен выше оси абсцисс, при $-7 < x < 4$.

Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$. Функция убывает на промежутке $[-2; +\infty)$.

Ответ: 2.

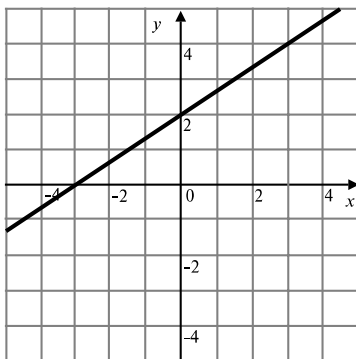
Задание 4. Постройте график функции $y = \frac{2}{3}x + 2$.

- а) При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?
- б) Какова область ее значений?
- в) Какие значения принимает функция, если $-3 \leq x \leq 1,5$?
- г) Найдите координаты точки пересечения графика с осями.

Решение.

Построим график функции и с помощью его ответим на вопросы. Графиком линейной функции является прямая. Для построения прямой достаточно знать координаты любых двух точек, принадлежащих этой прямой. Найдем их.

x	-3	3
y	0	4



Ответим на вопросы:

а) Функция принимает положительные значения ($y > 0$). Графически это можно определить следующим образом:

— выше оси абсцисс находится та часть прямой, ординаты точек которой больше нуля;

— найдем абсциссы этих точек: $(-3; +\infty)$.

Ответ: $(-3; +\infty)$.

б) Функция может принимать любые значения, поэтому область значений $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

в) $y(-3) = 0$, $y(1,5) = 3$.

Если $-3 \leq x \leq 1,5$, то $0 \leq y \leq 3$.

Ответ: $[0; 3]$.

г) Точка пересечения с осью абсцисс уже найдена: $(-3; 0)$. Точку пересечения с осью ординат найдем по графику: $(0; 2)$.

Ответ: $(-3; 0)$ — точка пересечения с осью абсцисс и $(0; 2)$ — точка пересечения с осью ординат.

Задание 5. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 5$.

а) При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

б) Укажите наименьшее значение функции.

в) Какова область ее значений?

г) Найдите координаты точек пересечения графика с осью Ox .

д) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

е) Какие значения принимает функция, если $0 \leq x \leq 4$?

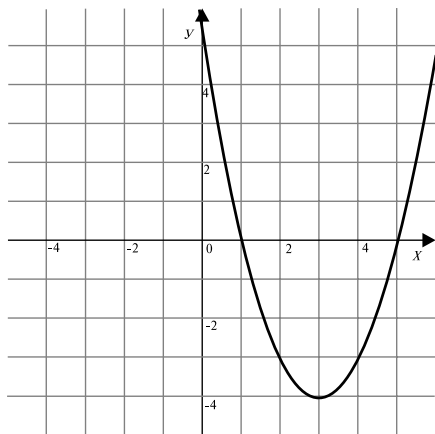
Решение.

Построим график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Графиком квадратичной функции является парабола. Для ее построения найдем координаты вершины параболы и точки пересечения с осями координат.

$x_v = -\frac{b}{2a} = 3$, $y_v = y(3) = -4$. Ветви параболы направлены вверх, координаты вершины $(3; -4)$.

Найдем точки пересечения с осями координат:

x	0	1	5
y	5	0	0



а) Выше оси абсцисс ($y > 0$) находятся точки графика с абсциссами больше 5 или меньше 1.

Ответ: $(-\infty; 1)$ и $(5; +\infty)$;

б) Наименьшее значение функции $y = -4$ функция принимает в своей вершине.

О т в е т: -4 — наименьшее значение функции;

в) Функция может принимать все значения, большие, чем значение в своей вершине.

О т в е т: $[-4; +\infty)$.

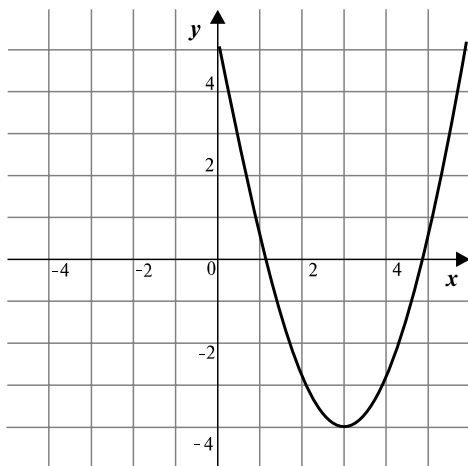
г) Точек пересечения с осью Ox две. Их координаты $(1; 0)$ и $(5; 0)$.

О т в е т: $(1; 0)$ и $(5; 0)$.

д) Правее абсциссы вершины функция возрастает, а левее — убывает.

О т в е т: промежуток возрастания функции $[3; +\infty)$, промежуток убывания функции $(-\infty; 3]$.

е) Изобразим график функции $y = x^2 - 6x + 5$, если $0 \leq x \leq 4$.



Для того чтобы найти значения функции, можно найти ординаты всех точек получившегося графика. Спроектируем точки графика на ось ординат, получим отрезок $[-4; 5]$.

О т в е т: $[-4; 5]$.

Замечание. Обратите внимание на то, что для нахождения области значений *недостаточно* было найти значения

функции на концах промежутка $[0; 4]$: $y(0) = 5$, $y(4) = -3$. Функция убывает на промежутке $[0; 3]$ и возрастает на промежутке $[3; 4]$, поэтому на промежутке $[2; 4]$ принимает значения меньше -3 .

Задание 6. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 9}{9 - 3x}$. Найдите ее область значений.

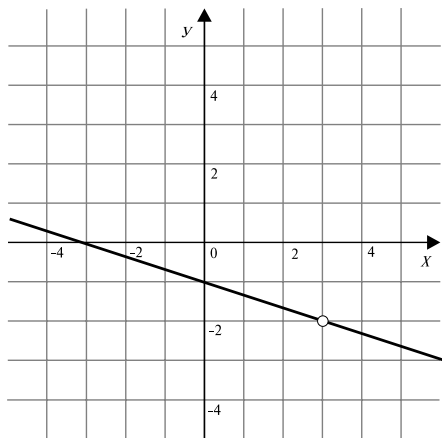
Решение.

После преобразований получим
$$\begin{cases} y = -\frac{x}{3} - 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Построим график линейной функции с выколотой точкой. Графиком линейной функции является прямая. Для ее построения найдем координаты двух точек, принадлежащих прямой.

x	0	-3
y	-1	0

Построим прямую и «выколем» точку, которая не принадлежит прямой. Координаты этой точки $(3; -2)$.



Областью значений функции являются два промежутка $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$.

О т в е т: область значений — множество всех чисел, кроме -2 .

Задание 7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 15, & |x| \leq 3, \\ -x + 3, & x > 3, \\ -4x - 24, & x < -3. \end{cases}$$

а) При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

б) Какова область ее значений? Найдите значение функции при $x = 5$.

в) При каких значениях x выполняется неравенство

$$y \leq -12?$$

г) Найдите координаты точек пересечения графика с осью Ox и осью Oy .

д) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

Решение.

Построим график кусочно заданной функции. Для этого на каждом из трех заданных интервалов построим заданную на нем функцию.

1) На интервале $-3 \leq x \leq 3$ построим график функции $y = x^2 + 2x - 15$. Графиком этой функции является парабола.

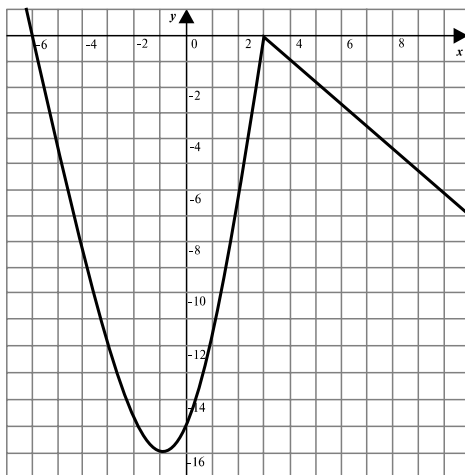
Найдем ее вершину. $x_0 = -1$, $y_0 = -16$. Одна точка пересечения графика с осью Ox (3; 0) принадлежит интервалу, другая — (−5; 0) не принадлежит ему.

2) На интервале $x > 3$ построим график функции $y = -x + 3$. Для построения прямой, являющейся графиком этой функции, достаточно знать координаты двух точек.

x	4	5
y	−1	−2

3) На интервале $x < -3$ построим график функции $y = -4x - 24$. Для построения прямой, являющейся графиком этой функции, достаточно знать координаты двух точек.

x	−4	−6
y	−8	0



По графику ответим на дополнительные вопросы.

а) Функция принимает положительные значения при $x < -6$.

б) Функция может принимать любые значения. Область значений функции $(-\infty; +\infty)$. $Y(5) = -2$.

в) $y \leq -12$ при $-3 \leq x \leq 1$, а также ординаты точек прямой $y = -x + 3$ могут быть меньше или равны -12 . Найдем абсциссы этих точек: $-x + 3 \leq -12$, $x \geq 15$.

Ответ: на двух промежутках $[-3; 1]$ и $[15; +\infty)$.

г) Точки пересечения графика функции с осью Ox : $(-6; 0)$, $(3; 0)$.

Точка пересечения графика функции с осью Oy : $(0; -15)$.

д) Функция возрастает при $-1 \leq x \leq 3$. Функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$ и на промежутке $[3; +\infty)$.

Задание 8. Постройте график функции $y = |x^2 + 4x|$. Сколько общих точек может иметь с этим графиком прямая $y = m$?

Решение.

Для построения графика функции «раскроем» модуль. Преобразуем выражение под знаком модуля

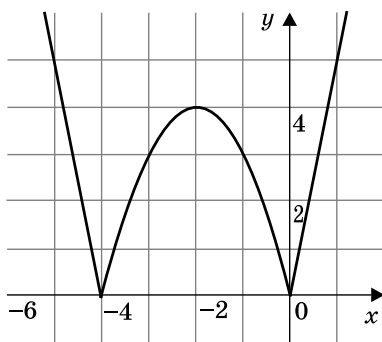
$$|x^2 + 4x| = |x(x + 4)|.$$

$$x(x + 4) > 0, \text{ если } x < -4 \text{ или } x > 0;$$

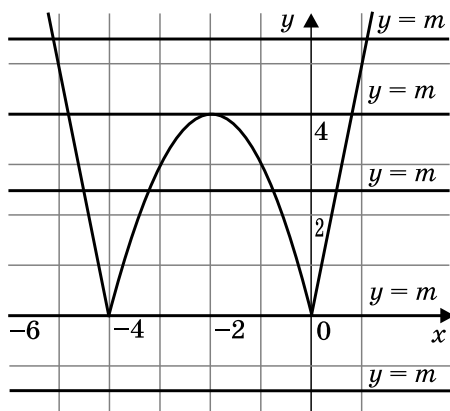
$$x(x + 4) \leq 0, \text{ если } -4 \leq x \leq 0.$$

$$y = |x^2 + 4x| = \begin{cases} -x^2 - 4x, & \text{если } -4 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 4x, & \text{если } x > 0 \text{ или } x < -4. \end{cases}$$

Построим каждую из парабол на заданной области определения.

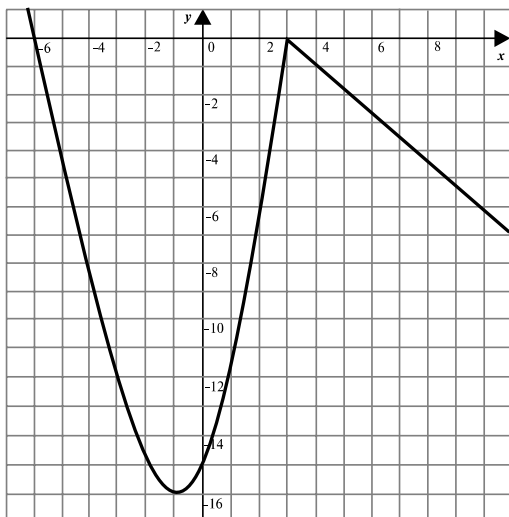


Прямая $y = t$ может иметь с графиком этой функции две, три или четыре общих точки, но может их и не иметь. Все будет зависеть от расположения прямой. Для того чтобы определить значения параметра t в каждом случае, надо перемещать прямую $y = t$ вдоль оси Oy и замечать количество пересечений графика функции и прямой.



Ответ: при $m = 0$ и $m > 4$ прямая $y = m$ может иметь с графиком функции две общие точки. При $m = 4$, прямая $y = m$ может иметь с графиком функции три общие точки. При $0 < m < 4$ прямая $y = m$ может иметь с графиком функции четыре общие точки. При $m < 0$ прямая $y = m$ не имеет с графиком функции общих точек.

Задание 9. Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.



Решение.

График заданной кусочной функции состоит из трех прямых, заданных на своих интервалах. Зададим аналитически каждую из прямых.

1) На интервале $-4 \leq x < 0$ прямая проходит через точки с координатами $(-4; 4)$ и $(-2; 0)$. Уравнение прямой $y = kx + b$. Найдем коэффициенты k и b , решив систему уравнений

$$\begin{cases} 4 = -4k + b, \\ 0 = -2k + b \end{cases} \quad \begin{cases} k = -2, \\ b = -4. \end{cases}$$

Уравнение прямой на этом интервале имеет вид

$$y = -2x - 4.$$

2) На интервале $0 \leq x < 8$ прямая проходит через точки с координатами $(0; -4)$ и $(4; -1)$. Аналогично первому интервалу, получим $y = 0,75x - 4$.

3) На интервале $x \geq 8$ прямая проходит через точки с координатами $(8; 2)$ и $(9; 2)$. Уравнение прямой имеет вид $y = 2$.

Зададим функцию, изображенную на рисунке:

$$y = \begin{cases} -2x - 4, & -4 \leq x < 0, \\ 0,75x - 4, & 0 \leq x < 8. \\ 2, & x \geq 8. \end{cases}$$

Замечание. Если задана кусочная функция, то концы областей определения включаются только в один из интервалов, причем не имеет значения в какой.

Задание 10. Найдите область определения следующих функций, заданных аналитически:

а) $y = \sqrt{6x - x^2 - 8}$; б) $y = \frac{x-3}{x^2-9}$.

Решение.

а) Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является промежуток $[0; +\infty)$, поэтому область определения функции $y = \sqrt{6x - x^2 - 8}$ можно найти из неравенства

$$6x - x^2 - 8 \geq 0, \quad x^2 - 6x + 8 \leq 0, \quad 2 \leq x \leq 4.$$

О т в е т: $[2; 4]$.

б) Областью определения дробно-рациональной функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ являются любые действительные x , не обращающие знаменатель $Q(x)$ в нуль. Поэтому областью определения функции $y = \frac{x-3}{x^2-9}$ являются все действительные числа, кроме корней уравнения $x^2 - 9 = 0$: $x = 3$ или $x = -3$.

Обратите внимание на то, что сокращение дроби на общий множитель привело бы к неверному ответу.

О т в е т: $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

Задание 11. Найдите множество значений следующих функций, заданных аналитически:

а) $y = x^2 - 4x + 3$, б) $y = 4x^2 + 8x + 10$.

Решение.

а) Графиком данной функции является парабола. Абсцисса вершины параболы $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$. Ордината вершины $y_v = y(2) = -1$. Ветви параболы направлены вверх, так как старший коэффициент больше нуля ($1 > 0$). Функция может принимать все значения, большие или равные -1 . Множество значений данной функции — промежуток $[-1; +\infty)$.

О т в е т: $[-1; +\infty)$.

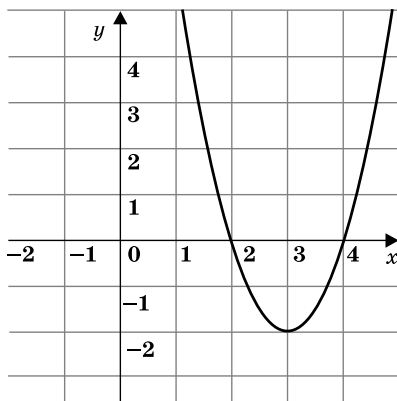
б) Находить множество значений квадратичной функции можно и иначе: преобразовать квадратный трехчлен, выделив полный квадрат: $4x^2 + 8x + 10 = (2x + 2)^2 + 6$. $E((2x + 2)^2) = [0; +\infty)$, $E((2x + 2)^2 + 6) = [6; +\infty)$. Функция $y = 4x^2 + 8x + 10$ принимает все значения из промежутка $[6; +\infty)$.

О т в е т: $[6; +\infty)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Функция задана графиком.



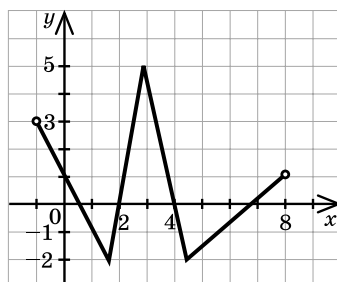
а) Укажите область определения этой функции.

- 1) $(-\infty; +\infty)$ 3) $[-2; +\infty]$
 2) $[2; 4]$ 4) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

б) Укажите область значений этой функции.

- 1) $(-\infty; +\infty)$ 3) $[-2; +\infty]$
 2) $[2; 4]$ 4) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

2. Функция задана графиком.



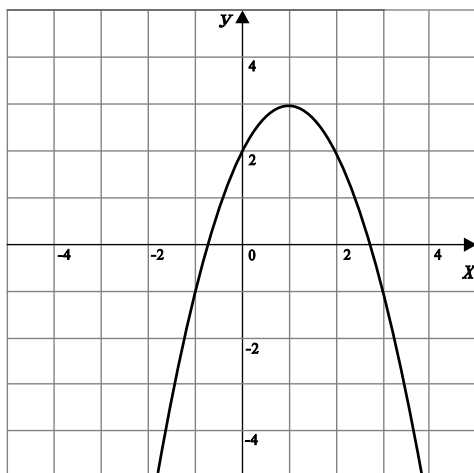
а) Укажите область определения этой функции.

- 1) $[-2; 5]$ 2) $(3; 1)$ 3) $(-1; 8)$ 4) $[0; 8]$

б) Укажите область значений этой функции.

- 1) $[-2; 5]$ 2) $(3; 1)$ 3) $(-1; 8)$ 4) $[0; 8]$

3. Используя график функции $y = f(x)$, определите, какое утверждение верно.



1) $f(3) = -1$.

2) Функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$.3) Наибольшее значение функция принимает при $x = 3$.

4) $f(-1) = 1$.

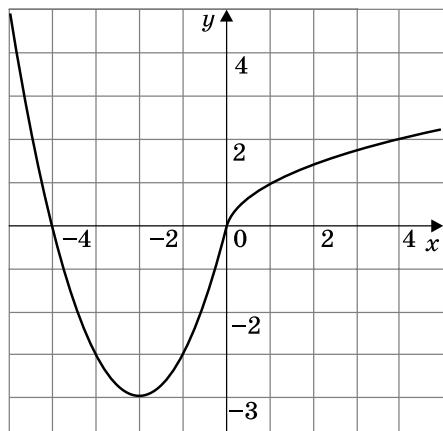
4. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$.
Из приведенных утверждений выберите верное.

1) Наименьшее значение функции $y=f(x)$ равно -2 .

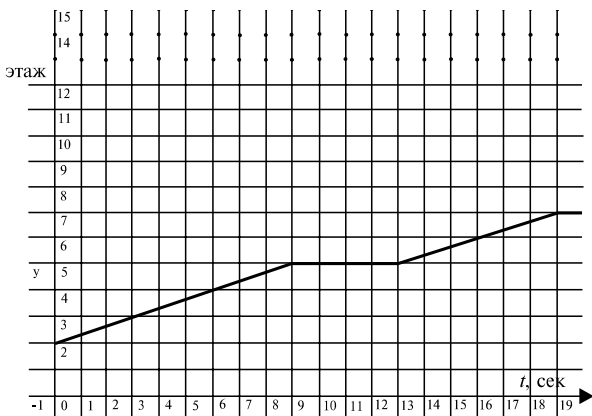
2) Функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$.

3) $f(-1) > f(-4)$.

4) $f(x) < 0$ при $x < 0$.



5. Лифт поднимался со второго этажа и останавливался на требуемых этажах.



1) На высоте какого этажа окажется лифт через 12 секунд от начала движения?

Ответ: _____.

2) На сколько этажей поднялся лифт за все время движения?

Ответ: _____.

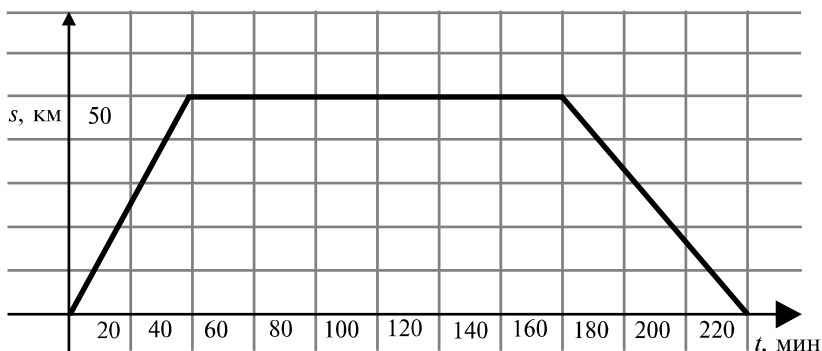
3) Какова скорость лифта, если высота этажа 3 метра?

Ответ: _____.

4) Между какими этажами будет лифт через 14 секунд?

Ответ: _____.

6. Грузовая машина отправилась из магазина на склад и вернулась обратно. На складе под загрузкой она провела 2 часа. График описывает зависимость пройденного машиной пути (s , км/ч) от времени пути (t , мин).



1) Найдите скорость машины при движении из магазина на склад и обратно.

Ответ: _____.

2) На сколько минут больше потребовалось машине на обратную дорогу?

Ответ: _____.

3) Сколько километров прошла машина через 2 ч 40 мин?

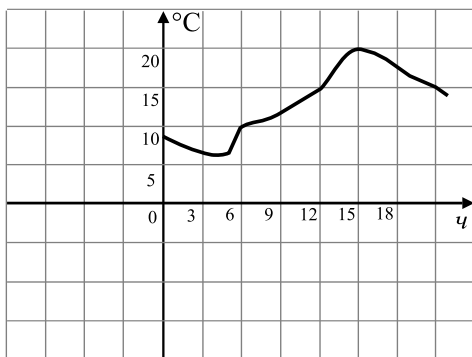
Ответ: _____.

7. На рисунке изображен график изменения температуры в течение дня.

Определите по графику:

1) Максимальное значение температуры в этот день.

Ответ: _____.



2) В какое время наблюдается температурный максимум?

Ответ: _____.

3) В какой промежуток времени температура была выше 15°C ?

Ответ: _____.

4) В какое время температура была 10°C ?

Ответ: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

8. Постройте график функции $y = -\frac{x}{3} + 4$. Какие значения она принимает при $0 \leq x \leq 6$?

9. Постройте график функции $y = -0,2x - 1$. Какие значения она принимает при $2 \leq x \leq 5$?

10. Постройте график функции $y = 2x + 5$. Какие значения она принимает при $-2 \leq x \leq 1$?

11. Постройте график функции $y = \frac{5-x}{2}$. Какие значения она принимает при $-1 \leq x \leq 4$?

12. Постройте график функции $y = (x - 3)^2 - 2$. Укажите ее область значений.

13. Постройте график функции $y = \frac{x^2 + x}{x}$. Укажите ее область значений.

14. Постройте график функции $y = 3x^2 - x + 5$. Какие значения принимает функция, если $1 \leq x \leq 2$?

15. Постройте график функции $y = -4x^2 + 5x - 8$. Какие значения принимает функция, если $2 \leq x \leq 3$?

16. Постройте график функции $y = -x^2 + 6x - 1$. Какие значения принимает функция, если $0 \leq x \leq 4$?

Задания на 3 балла

17. Постройте график функции $f(x) = (x + 1)^2 + (x - 3)^2$. Укажите ее область значений.

18. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$. При каких значениях аргумента функция принимает положительные значения?

19. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$. Найдите область значений функции.

20. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. При каких значениях аргумента выполняется неравенство $y > 3$?

21. Постройте график функции $y = \frac{2x^2 + x - 10}{2x + 5}$. Найдите ее область значений.

22. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2)(x - 4), & x \leq 4, \\ (2 - x)(-4 + x), & x > 4. \end{cases}$$

При каких значениях x значения функции $y = f(x)$ неотрицательны?

23. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 2|x| - 1, & |x| > 1. \end{cases}$

Укажите промежутки возрастания функции $y = f(x)$.

24. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, & |x| \leq 2, \\ x + 7, & x < -2, \\ x - 5, & x > 2. \end{cases}$$

Укажите промежуток, на котором функция $y = f(x)$ убывает.

25. Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \geq 2, \\ -1, & |x| < 2, \\ 2x + 3, & x \leq -2. \end{cases}$

Найдите значение функции $y = f(x)$ при $x = 10$.

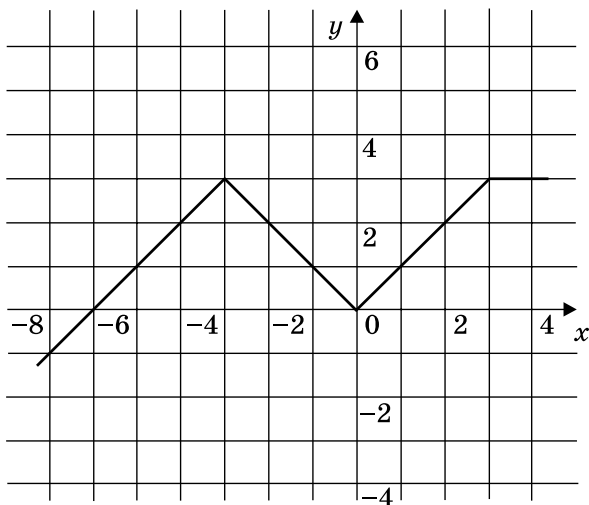
Задания на 4 балла

26. Постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \geq 0, \\ -x^2 - 2x + 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

При каких значениях x выполняется неравенство $y \geq 1$?

27. Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.



28. Задайте аналитически функцию, график которой изображен на рисунке.

29. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$. При каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком этой функции *четыре* общие точки?

30. Постройте график функции $y = x^2 - 8|x|$. Сколько общих точек с графиком функции может иметь прямая $y = m$?

Тема 7. Арифметическая и геометрическая прогрессии

В школьном курсе алгебры изучаются арифметическая и геометрическая прогрессии. В первой части экзаменационной работы обычно представлены задачи, решаемые либо с помощью формулы n -ого члена прогрессии, либо с помощью формулы суммы n первых членов прогрессии. Эти формулы надо знать наизусть.

Во второй части экзаменационной работы предлагаются задания, требующие применения рекуррентных формул, характеристического свойства прогрессий, а также задания, решение которых сводится к решению уравнений и их систем, неравенств и их систем.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	Арифметической прогрессией (a_n) называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d (d — разность прогрессии).	Геометрической прогрессией (b_n) называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q (q — знаменатель прогрессии).

Продолжение табл.

	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Рекуррентная формула	Для любого натурального n $a_{n+1} = a_n + d$ (1)	Для любого натурального n $b_{n+1} = b_n \cdot q, b_n \neq 0$ (6)
Формула n -ого члена	$a_n = a_1 + d(n-1)$ (2)	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, b_n \neq 0$ (7)
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$ $n > 1$ (3)	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, n > 1$ (8)
Сумма n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ (4) $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ (5)	$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1$ (9) $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$ (10)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Формула n -го члена

Арифметическая прогрессия

Задание 1. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = -5$, $a_2 = -7$. Найдите двадцать первый член этой прогрессии.

Решение.

По формуле n -ого члена (2)

$$a_{21} = a_1 + d(21 - 1) = a_1 + 20d.$$

Так как по условию $a_1 = -5$, то $a_{21} = -5 + 20d$. Осталось найти разность прогрессии:

$$d = a_2 - a_1, \text{ т.е. } d = -7 - (-5) = -2.$$

$$a_{21} = -5 + 20 \cdot (-2) = -45.$$

Ответ: $a_{21} = -45$.

Задание 2. Какое число не является членом арифметической прогрессии 4; 7; 10; ...?

- 1) 28 2) 64 3) 95 4) 127

Решение.

Запишем формулу n -ого члена: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.
В исходной прогрессии $a_1 = 4$, $d = 7 - 4 = 3$, поэтому $a_n = 4 + 3(n - 1) = 3n + 1$.

Проверим: является ли число 28 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $28 = 3n + 1$. Получаем, что $n = 9$, т.е. 28 — девятый член прогрессии ($a_9 = 28$).

Проверим: является ли число 64 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $64 = 3n + 1$. Получаем, что $n = 21$, т.е. 64 — двадцать первый член прогрессии ($a_{21} = 64$).

Проверим: является ли число 95 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $95 = 3n + 1$. Получаем, что $n = \frac{94}{3} = 31\frac{1}{3}$, т.е. n — не натуральное число и число 95 не является членом прогрессии.

Проверим: является ли число 127 членом исходной прогрессии. Для этого решим уравнение $127 = 3n + 1$. Получаем, что $n = 42$, т.е. 127 — сорок второй член прогрессии ($a_{42} = 127$).

Итак, только число 95 не является членом исходной прогрессии.

Ответ: 3.

Задание 3. Бригада в январе изготовила 8 деталей, а в каждый следующий месяц изготавливала на 7 деталей больше, чем в предыдущий. Сколько деталей бригада изготовит в сентябре?

Решение.

Так как бригада каждый следующий месяц изготавливала на 7 деталей больше, чем в предыдущий, то мы имеем арифметическую прогрессию с разностью 7. Первый член прогрессии равен 8. Формула n -ого члена для данной прогрессии будет иметь вид: $a_n = 8 + 7(n - 1)$, т.е. $a_n = 7n + 1$. Так как $n = 9$, то $a_9 = 7 \cdot 9 + 1 = 64$.

Ответ: 64.

Задание 4. Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия (a_n) : $-18; -17,3; \dots$?

Решение.

Что требуется найти? Сколько членов прогрессии отрицательны, т.е. требуется найти число n .

Запишем формулу n -ого члена для данной прогрессии $a_n = -18 + d(n - 1)$. Как найти разность прогрессии?

$$d = a_2 - a_1 = -17,3 - (-18) = 0,7.$$

Подставим значение d в формулу n -ого члена: $a_n = -18 + 0,7(n - 1)$. При каких n члены прогрессии отрицательны?

Решим неравенство $a_n < 0$.

$$-18 + 0,7(n - 1) < 0$$

$$-18,7 + 0,7n < 0$$

$$7n < 187$$

$$n < 26\frac{5}{7}$$

Значит, двадцать шестой член прогрессии — последний отрицательный член прогрессии, а двадцать седьмой — первый положительный член прогрессии.

В этом можно убедиться, используя формулу n -ого члена.

$$a_{26} = -18 + 0,7(26 - 1) = -18 + 0,7 \cdot 25 = -18 + 17,5 = -0,5$$

$$a_{27} = -18 + 0,7(27 - 1) = -18 + 0,7 \cdot 26 = -18 + 18,2 = 0,2$$

Ответ: 26.

Задание 5. Известно, что в арифметической прогрессии (a_n) $a_1 + a_5 = -4$, $a_2 \cdot a_6 = -16$. Найдите разность и первый член прогрессии.

Решение.

По условию известно, что

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = -4, \\ a_2 \cdot a_6 = -16. \end{cases}$$

Чтобы решить систему уравнений, выразим каждый из членов прогрессии через a_1 и d . Используем формулу n -ого члена для a_2 , a_5 , a_6 .

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_1 + 5d$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = -4, \\ (a_1 + d) \cdot (a_1 + 5d) = -16. \end{cases}$$

Решим систему методом подстановки, для этого выразим из первого уравнения a_1 и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} a_1 = -2 - 2d, \\ (-2 - 2d + d)(-2 - 2d + 5d) = -16. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы — квадратное уравнение относительно переменной d .

$$\begin{aligned} (-2 - d)(-2 + 3d) &= -16 \\ 4 + 2d - 6d - 3d^2 &= -16 \\ -3d^2 - 4d + 20 &= 0 \\ 3d^2 + 4d - 20 &= 0 \end{aligned}$$

Его корни: 2 и $-3\frac{1}{3}$.

Система имеет два решения:

$$\begin{cases} d = 2, \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} d = -3\frac{1}{3}, \\ a_1 = 4\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $a_1 = -6, d = 2; a_1 = 4\frac{2}{3}, d = -3\frac{1}{3}$.

Геометрическая прогрессия

Задание 6. Найдите шестой член геометрической прогрессии $-2; 6; \dots$

1) 243 2) 336 3) 486 4) 546

Решение.

1-й способ (с помощью формулы n -го члена)

По формуле n -го члена геометрической прогрессии (7)

$$b_6 = b_1 \cdot q^{6-1} = b_1 \cdot q^5.$$

Так как $b_1 = -2$, а $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{6}{-2} = -3$, то

$$b_6 = -2 \cdot (-3)^5 = 2 \cdot 243 = 486. \text{ В ответе пишем } 3).$$

2-й способ (с помощью рекуррентной формулы)

Так как знаменатель прогрессии равен -3 , то

$$b_3 = 6 \cdot (-3) = -18,$$

$$b_4 = -18 \cdot (-3) = 54,$$

$$b_5 = 54 \cdot (-3) = -162,$$

$$b_6 = -162 \cdot (-3) = 486.$$

О т в е т: 3.

Задание 7. Между числами 2 и 32 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию.

Р е ш е н и е.

Из условия задания имеем $b_1 = 2, b_5 = 32$. Следует найти b_2, b_3, b_4 .

По формуле n -ого члена $b_5 = b_1 \cdot q^4$, т.е. $32 = 2 \cdot q^4$ и $q^4 = 16$. Для знаменателя прогрессии две возможности:

1) $q = 2$; 2) $q = -2$.

В первом случае имеем геометрическую прогрессию 2; 4; 8; 16; 32.

Во втором: 2; -4; 8; -16; 32.

О т в е т: 2; 4; 8; 16; 32 или 2; -4; 8; -16; 32.

Рекуррентная формула

Задание 8. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = 4, b_{n+1} = b_n \cdot 3$. Найдите пятый член прогрессии.

Р е ш е н и е.

1-й способ (с помощью рекуррентной формулы)

По рекуррентной формуле имеем:

$$b_2 = b_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12,$$

$$b_3 = b_2 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36,$$

$$b_4 = b_3 \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108,$$

$$b_5 = b_4 \cdot 3 = 108 \cdot 3 = 324.$$

2-й способ (с помощью формулы n -ого члена)

Необходимо найти b_5 . Так как в геометрической прогрессии $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то $q = 3$. Формула n -ого члена имеет вид

$$b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \text{ и } b_5 = 4 \cdot 3^{5-1} = 4 \cdot 81 = 324.$$

О т в е т: 324.

Характеристическое свойство

Задание 9. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{71}=38$, $a_{73}=-128$. Найдите семьдесят второй член этой прогрессии.

Р е ш е н и е.

Для арифметической прогрессии характеристическое свойство имеет вид $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n > 1$, поэтому

$$a_{72} = \frac{a_{71} + a_{73}}{2}. \text{ Подставим известные данные.}$$

$$a_{72} = \frac{38 + (-128)}{2} = -45.$$

О т в е т: -45.

Задание 10. В геометрической прогрессии (b_n) $b_9=4^{11}$, $b_{11}=4^{13}$. Найдите знаменатель и первый член этой прогрессии.

Р е ш е н и е.

Так как заданы девятый и одиннадцатый члены прогрессии, то можно найти десятый член прогрессии. Воспользуемся характеристическим свойством: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

$$b_{10}^2 = b_9 \cdot b_{11}$$

$$b_{10}^2 = 4^{11} \cdot 4^{13} = 4^{24}$$

$$1) b_{10} = 4^{12} \text{ или } 2) b_{10} = -4^{12}.$$

Тогда знаменатель прогрессии равен

$$1) q = \frac{b_{11}}{b_{10}} = \frac{4^{13}}{4^{12}} = 4 \text{ или } 2) q = \frac{b_{11}}{b_{10}} = \frac{4^{13}}{-4^{12}} = -4.$$

Запишем формулу n -ого члена для десятого члена прогрессии $b_{10} = b_1 \cdot q^9$, т.е.

$$1) 4^{12} = b_1 \cdot 4^9 \text{ и } b_1 = 4^{12} : 4^9 = 4^{12-9} = 4^3 = 64;$$

$$2) -4^{12} = b_1 \cdot (-4)^9 \text{ и } b_1 = -4^{12} : (-4)^9 = 4^{12-9} = 4^3 = 64.$$

О т в е т: знаменатель прогрессии равен 4 или (-4) ; первый член прогрессии равен 64.

Сумма n первых членов

Задание 11. В арифметической прогрессии (a_n) $a_n = 3n - 4$. Найдите сумму шестнадцати первых членов.

Р е ш е н и е.

Для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии используют две формулы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Какую из них в данном случае удобнее применять?

По условию известна формула n -ого члена исходной прогрессии: $a_n = 3n - 4$. Можно найти сразу и a_1 , и a_{16} без нахождения d . Поэтому воспользуемся первой формулой.

$$S_{16} = \frac{a_1 + a_{16}}{2} \cdot 16,$$

$$\text{где } a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1, \text{ а } a_{16} = 3 \cdot 16 - 4 = 44.$$

$$S_{16} = \frac{-1 + 44}{2} \cdot 16 = 43 \cdot 8 = 344.$$

О т в е т: 344.

Задание 12. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 170.

Р е ш е н и е.

Число a называют *кратным* числу b , если число a делится на число b .

Первое число, кратное 4, — это само число 4. Найдем число, кратное 4 и не превосходящее 170. Это число 168.

Итак, мы имеем арифметическую прогрессию (a_n) , в которой $a_1 = 4$, $a_n = 168$ и $d = 4$. Чтобы найти сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 170, найдем значение n .

По формуле n -ого члена

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = 4 + 4(n - 1).$$

С другой стороны, $a_n = 168$.

Решим уравнение

$$\begin{aligned} 168 &= 4 + 4(n - 1), \\ 4n &= 168, \\ n &= 42. \end{aligned}$$

Значит, в искомой прогрессии сорок два члена.

$$S_{42} = \frac{4+168}{2} \cdot 42 = 172 \cdot 21 = 3612.$$

О т в е т: 3612.

Комбинированные задачи

Задание 13. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если из этих чисел вычесть соответственно 1, 2, 11, 44, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие арифметическую прогрессию.

Р е ш е н и е.

Подобные задания являются одними из самых сложных заданий на прогрессии, так как приходится применять формулы и арифметической и геометрической прогрессий.

Пусть члены геометрической прогрессии имеют вид $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3$. По условию задания числа $b_1 - 1, b_1q - 2, b_1q^2 - 11, b_1q^3 - 44$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Применим характеристическое свойство арифметической прогрессии, связывающее каждый член прогрессии (кроме первого) с двумя «соседними» членами.

$$b_1q - 2 = \frac{b_1 - 1 + b_1q^2 - 11}{2} \quad (1)$$

$$\text{и } b_1q^2 - 11 = \frac{b_1q - 2 + b_1q^3 - 44}{2} \quad (2).$$

Упростим первое выражение (1).

$$2b_1q - 4 = b_1 - 1 + b_1q^2 - 11, \quad (1')$$

$$b_1q^2 - 2b_1q + b_1 = 8,$$

$$b_1(q^2 - 2q + 1) = 8,$$

$$b_1(q - 1)^2 = 8.$$

Упростим второе выражение (2).

$$2b_1q^2 - 22 = b_1q - 2 + b_1q^3 - 44, \quad (2')$$

$$b_1q^3 - 2b_1q^2 + b_1q = 24,$$

$$b_1q(q^2 - 2q + 1) = 24.$$

Из (1') и (2') имеем: $q = 3$.

Тогда, например, из (1'), $b_1(3 - 1)^2 = 8$, $b_1 = 2$.

Четыре числа, образующих геометрическую прогрессию: 2; 6; 18; 54.

Четыре числа, образующих арифметическую прогрессию: 1; 4; 7; 10.

О т в е т: 1; 4; 7; 10.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЧАСТЬ I

1. Найдите девятый член арифметической прогрессии 3; 7; ...

1) 33 2) 34 3) 35 4) 36

2. Найдите восьмой член арифметической прогрессии $a_n = 5 - 0,5n$.

О т в е т: _____.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = -1$, $a_2 = -3$. Найдите двенадцатый член этой прогрессии.

О т в е т: _____.

4. Какое число не является членом арифметической прогрессии: 5; 8; 11;...?

1) 53 2) 62 3) 82 4) 95

5. Найдите шестой член геометрической прогрессии 128; 64; ...

- 1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

6. Найдите пятый член геометрической прогрессии $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Ответ: _____.

7. Найдите четвертый член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_3 + a_5 = 24$.

- 1) 9 2) 10 3) 15 4) 21

8. Найдите сумму девяти первых членов арифметической прогрессии 4; 11; ...

- 1) 286 2) 288 3) 290 4) 292

9. Каждой последовательности, заданной формулой n -ного члена, поставьте в соответствие верное утверждение.

- А. $a_n = 3n^2$ Б. $b_n = 3n$ В. $c_n = 3^n$

- 1) последовательность — арифметическая прогрессия;
2) последовательность — геометрическая прогрессия;
3) последовательность не является прогрессией.

10. Ракета за первую секунду пролетела 300 м. За каждую следующую секунду ракета пролетала на 200 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние (в километрах) пролетела ракета за шестую секунду?

Ответ: _____.

11. Ракета за первую секунду пролетела 300 м. За каждую следующую секунду ракета пролетала на 200 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние (в метрах) пролетела ракета за шесть секунд?

Ответ: _____.

12. Поезд за первую минуту прошел 200 м. За каждую следующую минуту поезд проходил на 100 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние (в метрах) прошел поезд за n -ю минуту?

- 1) $100n + 200$ 3) $200n + 100$
2) $100n + 100$ 4) $200n + 200$

13. Найти шестой член последовательности, заданной рекуррентным способом $b_1=1, b_2=1, b_{n+1}=b_{n-1} + b_n (n > 2)$.

- 1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

14. Последовательность a_n задана формулой

$$a_n = n^2 - 2n - 1.$$

Найдите номер члена последовательности, равного 7.

О т в е т: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

15. Длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию ($AB < AC < BC$). Периметр треугольника ABC равен 36 см. Найдите длину стороны AC .

16. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_3 = 3, a_5 = 4$. Найдите сумму семи первых членов прогрессии.

17. В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = 8, b_3 = 24$. Найдите b_5 .

18. В арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_{12} = 4, a_{14} = 16$. Найдите тринадцатый член прогрессии.

19. Сколько отрицательных членов содержит арифметическая прогрессия (a_n) : $-16; -15,6 \dots$?

20. Дана арифметическая прогрессия: $3,3; 2,9 \dots$ Сколько положительных членов она содержит?

21. Найти шестой член арифметической прогрессии: $a_1; a_2; 9,4; a_4; 11,6 \dots$

22. Между числами 3 и 48 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию. В ответе запишите найденные три числа.

23. В геометрической прогрессии (b_n) $b_7=5^{11}, b_8=5^{12}$. Найдите первый член этой прогрессии.

Задания на 3 балла

24. Между числами 3 и 48 вставьте такие три числа, которые вместе с данными числами образуют геометрическую прогрессию

25. Сумма второго, восьмого и одиннадцатого члена арифметической прогрессии равна 69. Найдите седьмой член этой прогрессии.

26. Дана арифметическая прогрессия: $-2,8; -2,5 \dots$ Укажите наименьший по абсолютной величине член арифметической прогрессии.

27. Дана арифметическая прогрессия: $-2,8; -2,5 \dots$ Укажите наименьший положительный член арифметической прогрессии.

28. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $S_6 = 84$, $q = -0,5$. Найдите b_1 .

29. Известно, что в арифметической прогрессии (a_n) $a_1 + a_3 = -4$, $a_4 \cdot a_5 = 8$. Найдите первый член прогрессии.

30. Найдите сумму отрицательных членов арифметической прогрессии: $-10; -9,8 \dots$?

31. На одной стороне угла от вершины отложены шесть равных отрезков и через их концы (кроме вершины угла) проведены параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла. Найдите сумму длин всех параллельных отрезков, заключенных между сторонами угла, если длина наименьшего из них равна 10 см.

32. Первый член геометрической прогрессии равен 4. Разность между третьим и вторым ее членами равна 8. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что прогрессия не содержит равных членов.

33. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, третий член которой равен 3, а пятый равен 27.

34. В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_{12} = 4$, $b_{14} = 16$. Найдите шестнадцатый член прогрессии.

35. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{34} = 54$, $a_{36} = 80$. Найдите разность прогрессии.

36. В возрастающей геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_1 + b_4 = 27$, $b_2 \cdot b_3 = 72$. Найдите четвертый член прогрессии.

37. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 110.

38. Найдите сумму членов арифметической прогрессии с двадцатого по двадцать восьмой включительно, если $a_n = 4n + 3$.

39. Какое наибольшее число последовательных четных чисел, начиная с 2, можно сложить, чтобы получившаяся сумма осталась меньше 110?

Задания на 4 балла

40. Представьте в виде степени с натуральным показателем

$$\frac{x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \dots \cdot x^{17}}{x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \dots \cdot x^{17}}.$$

41. Вычислите:

$$\frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{13}}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^6}.$$

42. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить соответственно 2, 5, 7 и 7, то получим четыре числа, образующих арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

43. Сумма утроенного второго и четвертого членов арифметической прогрессии равна 12. При каком значении разности прогрессии произведение третьего и пятого членов прогрессии будет наименьшим?

44. Вычислите сумму

$$43^2 - 42^2 + 41^2 - 40^2 + \dots + 1^2 - 0^2.$$

45. Найдите сумму первых десяти совпадающих членов арифметических прогрессий 3; 5; 7 ... и 8; 15; 22 ...

46. Сколько существует натуральных двузначных чисел, которые делятся только на одно из чисел 3 или 4?

47. Найдите сумму всех четных двузначных чисел, кратных 3, но не кратных 7.

48. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, которые при делении на 4 дают остаток 1.

49. Произведение пяти последовательных членов геометрической прогрессии равно 243. Найдите третий член этой прогрессии.

Тема 8. Текстовые задачи

Среди задач, предлагаемых в первой части работы, могут быть задачи на движение, на работу, на проценты, на части, задачи геометрического содержания. В этих задачах может требоваться решить задачу или выбрать среди предложенных уравнений (или выражений) то, которое является математической моделью задачи. Те задачи, которые требуется решить, могут решаться с помощью составления уравнения (системы уравнений) или арифметически.

Во второй части работы предложены более сложные задачи, например задачи на движение по окружности, на концентрацию и т.д.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Задачи на проценты

Процентом числа называется его сотая часть, например, 1% — это одна сотая числа, 1% от числа 500 — это число 5, 3% — это три сотых числа, 3% от числа 500 — это число 15.

Отсюда легко получаются соотношения, которые полезно помнить:

50% числа x — это его половина ($0,5 x$);

25% числа x — это его четверть ($0,25 x$ или $\frac{1}{4} x$);

20% числа x — это его пятая часть ($0,2 x$ или $\frac{1}{5} x$);

75% числа x — это его три четверти ($0,75 x$ или $\frac{3}{4} x$);

100% числа x — это все число (x).

Решение любых задач на проценты сводится к основным **трем действиям** с процентами:

– **нахождение процентов от числа (или части от числа)**

Пример. Найти 15% от числа 60.

$$0,15 \cdot 60 = 9.$$

О т в е т: 9.

– **нахождение числа по его процентам (или числа по его части)**

Пример. Найти число, 12% которого равны 30.

12% искомого числа нам известны — это 30. Какое же это число? Это число (x) принимаем за 100% и находим его:

$$\begin{array}{rcl} 12\% & \text{—} & 30 \\ 100\% & \text{—} & x \\ \frac{12}{100} = \frac{30}{x}, & x = & \frac{30 \cdot 100}{12} = 250. \end{array}$$

О т в е т: 250.

– **нахождение процентного отношения чисел**

Пример. Сколько процентов составляет 120 от 600?

$$\frac{120}{600} \cdot 100\% = 20\%.$$

О т в е т: 20%.

Среди задач на проценты, предлагающихся на экзамене, можно выделить несколько типов.

Задание 1. Спрос на товар увеличился в 5 раз. На сколько процентов увеличился спрос?

- 1) 500% 2) 100% 3) 200% 4) 400%

Р е ш е н и е.

Первоначальный спрос на товар (a) составлял 100%. Спрос увеличился и стал $5a$. Произошло увеличение на $4a$. Увеличение составило 400%.

О т в е т: 4.

Задание 2. Объем товаров увеличился на 200%. Во сколько раз произошло увеличение?

- | | |
|---------------|-------------------|
| 1) В 2 раза | 3) В четыре раза |
| 2) В три раза | 4) В полтора раза |

Решение.

Первоначальный объем товаров (a) составлял 100%. Он увеличился и стал $a + 2a = 3a$. Произошло увеличение в три раза, по сравнению с первоначальным объемом.

О т в е т: 2.

Задание 3. Квартплата составляла 2000 р. Какой стала квартплата после ее увеличения на 20%?

Решение. 2000 р. составляют 100%,
 x р. составляет 120%.

Найдем, какой стала квартплата после увеличения:
 $x = (2000 \cdot 120) : 100 = 2400$.

О т в е т: 2400 р.

Задание 4. Магазин в первый день продал 40% имеющихся овощей. За второй день он продал 80% овощей, проданных в первый день. В третий день — оставшиеся 28 кг. Сколько килограммов овощей было в магазине первоначально?

Решение.

Обозначим за x (кг) — вес имевшихся в магазине овощей. Тогда в первый день магазин продал $0,4 \cdot x$ (кг), а за второй день — $0,8 \cdot (0,4 \cdot x)$ кг. Зная, что в третий день было продано 28 кг овощей, составляем уравнение:

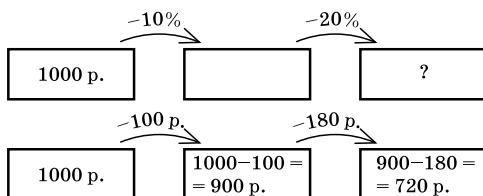
$$\begin{aligned}0,4 \cdot x + 0,8 \cdot (0,4 \cdot x) + 28 &= x, \\0,28 x &= 28, \\x &= 100.\end{aligned}$$

О т в е т: 100 кг.

Задание 5. Цена изделия составляла 1000 р. и была снижена сначала на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена товара?

Решение.

Подобные задачи, на наш взгляд, удобно решать с помощью такой схемы рассуждений:



Первое снижение цены товара было на $0,1 \cdot 1000 = 100 \text{ p.}$ После первого снижения цена товара составила $1000 - 100 = 900 \text{ p.}$ Второе снижение цены товара было на $0,2 \cdot 900 = 180 \text{ p.}$ После второго снижения цена товара составила $900 - 180 = 720 \text{ p.}$

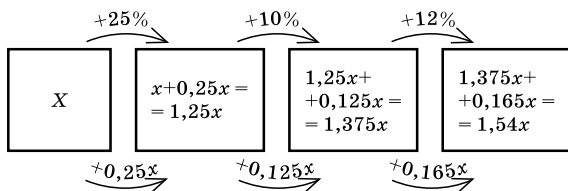
Ответ: 720 p.

Задание 6. Цену товара повысили на 25% , затем новую цену повысили еще на 10% и, наконец, после перерасчета произвели повышение цены еще на 12% . На сколько процентов повысили первоначальную цену товара?

Решение.

Обозначим первоначальную цену товара за $x \text{ (p.)}$, тогда после первого повышения цена товара стала $1,25x$. Второе повышение цены было на $0,1 \cdot 1,25x$. После него цена товара стала $1,25x + 0,1 \cdot 1,25x = 1,375x$. Третье повышение цены на 12% производилось от цены, полученной после второго повышения, и составило $0,12 \cdot 1,375x = 0,165x$. После последнего повышения цена товара составила $1,375x + 0,165x = 1,54x$.

Схема рассуждений была следующей:



Осталось выяснить процент повышения первоначальной цены. Цена была повышена на $1,54x - x = 0,54x$ р., что составляет 54% от первоначальной цены.

О т в е т: 54%.

Задание 7. Сберегательный банк в конце года начисляет 3% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 1000 рублей через 2 года?

Р е ш е н и е.

Эта задача на так называемые «сложные проценты». Так говорят, когда в задаче идет речь о поэтапном изменении некоторой величины. В данном случае рассмотрим два этапа — на первом начисляется процент на сумму, находившуюся на счету первый год, а на втором этапе производится начисление процентов на сумму, получившуюся после первого этапа, т.е. на сумму с уже начисленными процентами после первого года.

1000 р. — первоначальная сумма вклада. Начисленные проценты после первого года составят $0,03 \cdot 1000$. По окончании первого года на счету окажется $1000 + 0,03 \times 1000 = 1030$. По окончании второго года проценты составят $0,03 \cdot 1030 = 30,9$. Таким образом, после двух лет сумма вклада составит $1030 + 30,9 = 1060,9$. Первоначальный вклад был увеличен на 60,9 р.

О т в е т: 60,9 р.

Задание 8. После истечения двух лет сумма банковского вклада, положенного под 3% годовых, выросла на 304,5 р. Найдите первоначальную сумму вклада.

Р е ш е н и е.

Пусть A рублей — первоначальная сумма вклада. Тогда через год сумма вклада составила

$$A + 0,03A = A \cdot (1 + 0,03) = 1,03 \cdot A \text{ р.}$$

За второй год проценты составили $0,03 \cdot (1,03 \cdot A)$. Через два года сумма вклада станет равной

$$1,03 \cdot A + 0,03 \cdot (1,03 \cdot A) = 1,03 \cdot 1,03 \cdot A.$$

Получаем уравнение:

$$1,03 \cdot 1,03 \cdot A = A + 304,5,$$

$$0,0609 \cdot A = 304,5,$$

$$A = 5000.$$

О т в е т: 5000 р.

Задачи на «концентрацию», на «смеси и сплавы»

В таких задачах часто встречаются понятия «процентное содержание» или «концентрация». Например, если в задаче идет речь о девятипроцентном растворе уксуса, то можно понять, что в этом растворе 9% чистого уксуса, а остальные 91% приходится на воду, с которой смешивался чистый уксус. Также можно сказать, что 0,09 части составляет в этом растворе чистый уксус, а 0,91 части приходится на воду. Понятно, что объем всего раствора принимается за 100% (или за 1).

В задачах этого типа обычно присутствуют три величины, соотношение между которыми позволяет составлять уравнение:

- концентрация (доля чистого вещества в смеси);
- количество чистого вещества в смеси (или сплаве);
- масса смеси (сплава).

Соотношение между этими величинами следующее:

$$\text{Масса смеси} \times \text{концентрация} = \text{количество чистого вещества}.$$

Задание 9. Сколько литров воды надо добавить к 20 л пятипроцентного раствора соли, чтобы получить четырехпроцентный раствор?

Р е ш е н и е.

Соль содержится в каждом из растворов. В 20 л. пятипроцентного раствора соли содержится $20 \times 0,05 = 1$ (ед) соли. Ее количество не меняется. Доливается только вода. Узнаем, каково ее количество.

Обозначим x (л) — количество добавленной воды. Из условия задачи получаем, что 4-% концентрацию раствора

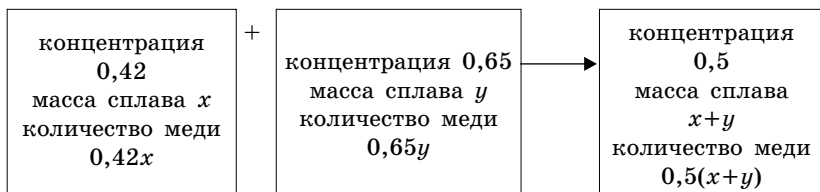
характеризует уравнение $\frac{1}{20+x} = 0,04$. Решением уравнения является $x = 5$.

О т в е т: 5 л.

Задание 10. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 42% и 65% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив, получить сплав, содержащий 50% меди?

Р е ш е н и е.

Изобразим схематически условие задачи:



Количество меди в каждом сплаве найдено с помощью соотношения между величинами. Можем составить уравнение: $0,42x + 0,65y = 0,5(x+y)$.

В этом уравнении две неизвестных, а в задаче требуется найти их отношение $\frac{x}{y}$. Решая уравнение, получим

$$42x + 65y = 50(x + y), \quad 15y = 8x, \quad x : y = 15 : 2.$$

О т в е т: нужно взять первый и второй сплавы в отношении 15 к 2.

Задачи на «движение»

Действие движения характеризуется тремя компонентами: пройденный путь, скорость и время. Известно соотношение между ними:

$$\text{Путь} = \text{скорость} \times \text{время}.$$

Задание 11. Скорость велосипедиста от поселка до станции была на 1 км/ч больше, чем на обратном пути. На обратный путь он затратил на 2 мин больше. Расстояние ме-

жду пунктами 7 км. Найдите первоначальную скорость велосипедиста.

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста от поселка до станции. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

$$1) \frac{7}{x+1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$$

$$3) \frac{7}{x-1} + \frac{7}{x} = 2$$

$$2) \frac{7}{x-1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$$

$$4) \frac{7}{x - \frac{1}{30}} - \frac{7}{x} = 1$$

Решение.

Если x км/ч — скорость велосипедиста от поселка до станции, то $(x - 1)$ км/ч — скорость велосипедиста на обратном пути. Время велосипедиста от поселка до станции $\frac{7}{x}$, а время обратного движения $\frac{7}{x-1}$. Так как время обратного движения на 2 мин (т.е. на $\frac{1}{30}$ ч) больше, составим уравнение: $\frac{7}{x-1} - \frac{7}{x} = \frac{1}{30}$.

Ответ: 2.

Задание 12. Катер прошел 20 км по течению реки и такой же путь обратно, затратив на весь путь 1 ч 45 мин. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

Пусть x (км/ч) — собственная скорость катера. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

$$1) \frac{20}{x+2} = 1,45$$

$$3) \frac{20}{x-2} + \frac{20}{x+2} = \frac{7}{4}$$

$$2) \frac{20}{x-2} - \frac{20}{x+2} = 1,45$$

$$4) \frac{20}{2-x} + \frac{20}{2+x} = \frac{7}{4}$$

Решение.

Скорость катера по течению $(x+2)$ км/ч, а против течения $(x - 2)$ км/ч. Время движения катера по течению $\frac{20}{x+2}$, а против течения $\frac{20}{x-2}$. На весь путь катер

потратил $\frac{20}{x-2} + \frac{20}{x+2}$ или 1 ч 45 мин. Переведем 1 ч 45 мин в часы: $1 \text{ ч } 45 \text{ мин} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \text{ (ч)}$.

Уравнение из варианта 3 соответствует условию задачи.
 Ответ: 3.

Задание 13. Два тела, движущиеся в разные стороны по окружности длиной 500 м с постоянными скоростями, встречаются каждые 12,5 с. При движении в одну сторону первое догоняет второе каждые 125 с. Найдите скорости каждого тела.

Решение.

При движении в одном направлении время, через которое одно тело догонит второе, можно найти по формуле: $\frac{S}{v_2 - v_1}$. Пусть скорости тел равны x и y (м/с), тогда получим первое уравнение: $\frac{500}{y - x} = 125$.

При движении навстречу друг другу время, через которое тела встретятся, можно найти по формуле: $\frac{S}{v_2 + v_1}$. Получим второе уравнение: $\frac{500}{y + x} = 12,5$.

Решением системы $\begin{cases} \frac{500}{y-x} = 125, \\ \frac{500}{y+x} = 12,5 \end{cases}$ является пара $x = 18$

(м/с) и $y = 22$ (м/с).

Ответ: скорость первого тела — 18 м/с, скорость второго — 22 м/с.

Задачи «на работу»

Работу характеризуют три компонента действия:

- время работы,
- объем работы,
- производительность (количество произведенной работы в единицу времени).

Существует следующее соотношение между этими компонентами:

Объем работы = время работы \times производительность.

Задание 14. Две копировальные машины печатают рукопись. Если всю рукопись будет печатать первая машина, то работа будет выполнена на 4 мин позже, чем две машины, работая вместе. Если печатать всю рукопись будет вторая машина, то она напечатает на 25 мин позже, чем обе машины, работая вместе. За сколько минут может напечатать эту рукопись вторая машина?

Решение.

1-й способ. Примем за единицу работу по печати всей рукописи. Пусть время печати всей рукописи первой машиной — x (мин), а второй — y (мин). Тогда производительность первой машины $\frac{1}{x}$, производительность второй машины $\frac{1}{y}$, общая их производительность $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$. Получаем время их общей работы: $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. Можем составить два уравне-

ния относительно времени работы:

$$\begin{cases} x - 4 = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}, \\ y - 25 = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4 = y - 25, \\ y + 25 = \frac{y \cdot (y - 21)}{2y - 21}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 15 \text{ или } y = 35, \\ x = -6 \text{ или } x = 14. \end{cases}$$

В соответствии с условиями задачи решение $(-6; 15)$ является посторонним. Вторая машина может напечатать рукопись за 35 мин.

2-й способ. Пусть время печати всей рукописи первой машиной — x (мин), а второй — y (мин). Тогда время совместной работы двух машин можно найти двумя способами: $x - 4$ и $y - 25$. Поэтому получим первое уравнение:

$$x - 4 = y - 25.$$

Примем за единицу работу по печати всей рукописи. Производительность первой машины — $\frac{1}{x}$, производительность второй машины — $\frac{1}{y}$, общая их производительность — $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$. Зная совместное время работы $(x - 4)$, можно составить второе уравнение $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x - 4) = 1$. Решая систему

$$\begin{cases} x - 4 = y - 25, \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x - 4) = 1, \end{cases}$$

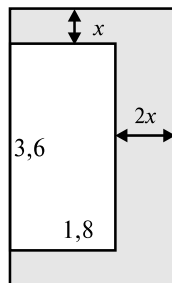
получим, что вторая машина может напечатать рукопись за 35 мин.

Ответ: вторая машина может напечатать рукопись за 35 мин.

Задачи геометрического содержания

Задание 15. Балкон имеет форму прямоугольника. С двух меньших сторон он утеплен одним слоем утеплителя, а с третьей стороны — двумя слоями. Площадь всего балкона 8 м^2 . После утепления балкон имеет размеры $3,6 \text{ м} \times 1,8 \text{ м}$. Какую толщину имеет слой утеплителя? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

- 1) $8 = (2x + 3,6)(1,8 + x)$
- 2) $8 = (x + 3,6)(x + 1,8)$
- 3) $8 = 3,6x + 1,8x$
- 4) $8 = (2x + 3,6)(2x + 1,8)$



Решение.

Для нахождения площади прямоугольника нужно найти произведение его длины и ширины. Если x (м) толщина уте-

плителя, то длина прямоугольника $2x + 3,6$, а его ширина $2x + 1,8$. Можно составить уравнение: $8 = (2x + 3,6) \times (2x + 1,8)$.

О т в е т: 4.

Другие задачи

(на составление уравнения, системы, отношения)

Задание 16. Из 42 поездов, приходящих на станцию, отношение пассажирских к скорым поездам составляет 4:3. Сколько скорых поездов приходит на станцию?

- 1) 7 поездов
- 2) 14 поездов
- 3) 24 поезда
- 4) 18 поездов

Р е ш е н и е.

Из всех поездов 4 части составляют пассажирские поезда, а 3 части — скорые. Получаем, что из 7 частей складывается число поездов, приходящих на станцию. На одну часть приходится $42 : 7 = 6$ поездов. Так как скорых — 3 части, то их $3 \times 6 = 18$ поездов.

О т в е т: 4.

Задание 17. Два карандаша и три ластика были куплены за 45 р., а три карандаша и четыре ластика — за 65 р. Сколько стоит один карандаш и один ластик?

Р е ш е н и е. *1-й способ — арифметический.* 2 карандаша и 3 ластика стоят 45 р., поэтому 6 карандашей и 9 ластика стоят в три раза дороже: $45 \times 3 = 135$ р.

Так как 3 карандаша и 4 ластика стоят 65 р., то 6 карандашей и 8 ластика стоят $65 \times 2 = 130$ р.

6 карандашей и 9 ластика стоят 135 р.

6 карандашей и 8 ластика стоят 130 р.

1 ластик стоит 5 р.

Получаем, что карандаш стоит $\frac{45-15}{2} = 15$ р., а вместе они стоят 20 р.

2-й способ — алгебраический. Пусть один карандаш стоит x р., а один ластик y рублей, тогда составим систему уравнений по условию задачи:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 45, \\ 3x + 4y = 65; \end{cases} \begin{cases} 6x + 9y = 135, \\ 6x + 8y = 130; \end{cases} \begin{cases} y = 5, \\ x = 15. \end{cases}$$

Один карандаш и один ластик стоят $x + y = 15 + 5 = 20$ (р.)

О т в е т: 20 р.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Цену товара повысили на 100%, а затем снизили на 50%. Как изменится цена товара?

- 1) Не изменится
- 2) Возрастет в 2 раза
- 3) Возрастет вполтину
- 4) Возрастет в полтора раза

2. Цену товара повысили на 50%, а затем снизили на 50%. Как изменится цена товара?

- 1) Не изменится
- 2) Снизится на четверть
- 3) Возрастет на треть
- 4) Снизится на треть

3. Некоторое число уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить результат, чтобы получить первоначальное число?

- | | |
|-----------|------------|
| 1) На 20% | 3) На 50% |
| 2) На 25% | 4) На 120% |

4. Вкладчик положил в сбербанк 10 000 р. из расчета 1% годовых. Каким будет его вклад через один год?

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) 10 001 | 3) 10 100 |
| 2) 10 010 | 4) 11 000 |

5. Сбербанк в конце года начисляет 4% годовых к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 2500 р. через один год?

- 1) 2504 2) 2550 3) 2580 4) 2600

6. На три полки поставили 278 книг. На первую из них поставили на 14 книг больше, чем на вторую. На третью полку — в 2 раза больше, чем на вторую. Сколько книг поставили на первую полку?

- 1) 68 2) 80 3) 132 4) 70

7. На склад привезли 126 т яблок, груш и слив. Яблок оказалось в 4 раза больше, чем груш. Слив на 18 т меньше, чем груш. Сколько тонн яблок привезли на склад?

- 1) 6 2) 24 3) 82 4) 96

8. Скорость пешехода от поселка до станции, расстояние между которыми 4 км, была на 1 км/ч больше, чем на обратном пути. Время его обратного пути на 12 мин больше. Чему равна скорость пешехода?

Пусть x км/ч — скорость пешехода от поселка до станции. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{4}{x+1} - \frac{4}{x} = \frac{1}{5}$

3) $\frac{4}{x} - \frac{4}{x-1} = 12$

2) $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x} = \frac{1}{5}$

4) $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x} = 12$

9. Скорость машины от поселка до станции была на 20 км/ч меньше, чем на обратном пути. Расстояние между пунктами 40 км, а время ее обратного пути на 10 мин меньше.

Пусть x км/ч — скорость машины от поселка до станции. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}$

3) $\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = 10$

2) $\frac{40}{x+20} - \frac{40}{x} = \frac{1}{6}$

4) $\frac{40}{x+20} - \frac{40}{x} = 10$

10. Моторная лодка прошла по течению реки 15 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 40 минут больше. Скорость течения реки 3 км/ч.

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{15}{x-3} - \frac{15}{x+3} = \frac{2}{3}$

3) $\frac{15}{x+3} - \frac{15}{x-3} = \frac{2}{3}$

2) $\frac{15}{x-3} - \frac{15}{x+3} = 40$

4) $\frac{15}{x+3} + \frac{15}{x-3} = 40$

11. Катер прошел 3 км по течению реки на 30 мин быстрее, чем 8 км против течения реки. Собственная скорость катера 15 км/ч.

Пусть x км/ч — скорость течения реки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{3}{15-x} - \frac{8}{15+x} = 0,5$

3) $\frac{8}{x-15} - \frac{3}{x+15} = 0,5$

2) $\frac{8}{15-x} - \frac{3}{15+x} = 0,5$

4) $\frac{8}{15-x} + \frac{3}{15+x} = 30$

12. Найдите периметр прямоугольного участка площадью 192 м², одна из сторон которого больше другой на 4 м.

Ответ: _____.

13. Цена килограмма яблок y рублей. Сколько рублей надо заплатить за 600 г этих яблок?

1. $\frac{y}{600}$ (р)

3) $0,6y$ (р)

2) $600y$ (р)

4) $\frac{5}{3}y$ (р)

Ответ: _____.

14. Найдите периметр прямоугольного участка площадью 252 м², одна из сторон которого больше другой на 4 м.

Ответ: _____.

15. На одном и том же расстоянии от стен комнаты прямоугольной формы площадью 24 м² находится ковер размерами 3 м × 2 м. Каково расстояние от ковра до стен комнаты? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

16. Численности рабочих, работающих в двух цехах завода, относятся как 3 : 4. Сколько человек работает в меньшем цехе, если всего на заводе работает 4900 рабочих?

Ответ: _____.

17. Один за другим с интервалом в 20 мин из города выехали в одном направлении два велосипедиста и встретились на расстоянии 15 км от города. Скорость движения второго велосипедиста была на 1 км/ч больше скорости первого.

Пусть x км/ч — скорость движения первого велосипедиста. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+1} = 20$

3) $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+1} = \frac{1}{3}$

2) $\frac{15}{x+1} - \frac{15}{x} = 20$

4) $\frac{15}{x+1} - \frac{15}{x} = \frac{1}{3}$

18. Две байдарки начали свое движение по озеру из одного пункта с интервалом в 10 мин и встретились через 2 км. Скорость движения второй байдарки была на 4 км/ч больше, чем скорость первой. Найдите скорости байдарок.

Пусть x км/ч — скорость движения второй байдарки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{2}{x} - \frac{2}{x-4} = \frac{1}{6}$

3) $\frac{2}{x-4} - \frac{2}{x} = \frac{1}{6}$

2) $\frac{2}{x-4} - \frac{2}{x} = 10$

4) $\frac{2}{x} - \frac{2}{x-4} = 10$

19. Две машины, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу за 5 дней. Первая машина может справиться с этой работой на 24 дня быстрее второй. Какой объем работы выполнит первая машина?

Пусть x дней — время работы первой машины. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+24} = \frac{1}{5}$

3) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+24} = \frac{1}{5}$

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-24} = \frac{1}{5}$

4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-24} = \frac{1}{5}$

20. Две машины, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу за 8 мин. Вторая машина может справиться с этой работой на 30 мин быстрее первой. Найдите время работы второй машины.

Пусть x минут — время работы второй машины. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-30} = \frac{1}{8}$

3) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+30} = \frac{1}{8}$

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+30} = \frac{1}{8}$

4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-30} = \frac{1}{8}$

21. Две машинистки, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу за 6 ч. Вторая машинистка может справиться с этой работой на 16 ч быстрее первой. Найдите время работы первой машинистки.

Пусть x ч — время работы первой машинистки. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16} = \frac{1}{6}$

3) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+16} = \frac{1}{6}$

2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-16} = \frac{1}{6}$

4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-16} = \frac{1}{6}$

22. Сберегательный банк в конце года начисляет 2% к сумме, находившейся на счету. На сколько рублей увеличится первоначальный вклад в 5000 р. через 3 года?

О т в е т : _____.

23. Сберегательный банк в конце года начисляет 5% к сумме, находившейся на счету. На сколько процентов увеличится первоначальный вклад в 2000 р. через 2 года?

О т в е т : _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

24. Изделие, цена которого 500 р., сначала подорожало на 10%, а затем еще на 20%. Какова окончательная цена изделия?

25. Цену на некоторый товар сначала снизили на 30%, а затем повысили на 20%. На сколько процентов изменилась первоначальная цена товара?

26. Цену некоторого товара снизили на 15%, а потом еще на 20%. Найдите общий процент снижения цены.

27. Найдите первоначальную сумму вклада (в рублях), если после истечения трех лет она выросла на 765,1 р. при 2% годовых.

28. За январь выпуск продукции обувной фабрики составил 30% квартального плана. За февраль — 120% продукции, выпущенной в январе. Чтобы выполнить квартальный план, в марте фабрика изготовила 680 пар обуви. Каков квартальный план фабрики?

29. За апрель выпуск продукции завода составил 40% плана за II квартал, за май — 130% продукции, выпущенной в апреле. Чтобы выполнить план за II квартал, завод в июне изготовил 240 машин. Каков квартальный план завода?

30. В первый день со склада было отпущено 20% имевшихся яблок. Во второй день — 180% от того количества яблок, которое было отпущено в первый день. В третий день — оставшиеся 88 кг яблок. Сколько килограммов яблок было на складе первоначально?

31. Моторная лодка прошла 10 км по озеру и 4 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

32. Катер прошел 15 км по течению реки и 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

33. Два пешехода отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 50 км, и встречаются через 5 ч. Определите скорость каждого пешехода, если скорость у одного из них на 2 км/ч больше, чем у другого.

34. Два мотоциклиста отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 200 км, и встречаются через 4 ч. Опреде-

лите скорость каждого мотоциклиста, если скорость одного из них была на 10 км/ч больше, чем у другого.

35. Два туриста отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 44 км, и встречаются через 4 ч. Определите скорость каждого туриста, если скорость одного из них на 1 км/ч больше, чем у другого.

36. Расстояние между морскими пристанями 300 км. Два катера начали свое движение с одной и той же пристани с интервалом в 5 ч, а в конечный пункт прибыли одновременно. Определите время движения каждого катера, если скорость движения одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

37. Расстояние между двумя городами 90 км. Два велосипедиста одновременно выезжают из одного города и направляются в другой. Найдите скорости велосипедистов, если первый делает в час на 1 км больше другого и прибывает в конечный пункт на 1 час раньше.

38. Два велосипедиста отправляются навстречу друг другу одновременно из двух пунктов, расстояние между которыми равно 54 км, и встречаются через 2 ч. Определите скорость каждого велосипедиста, если скорость у одного из них на 3 км/ч больше, чем у другого.

Задания на 3 балла

39. Для распечатки 302 страниц были использованы две копировальные машины. Первая машина работала 8 мин, вторая — 10 мин. Сколько страниц в минуту печатает первая машина, если первая печатает в минуту на 4 страницы больше, чем вторая?

40. Двое рабочих изготавливают по одинаковому количеству деталей. Первый выполнил эту работу за 6 ч, второй за 4 ч, так как изготавливал в час на 14 деталей больше первого. Сколько деталей изготовил второй рабочий?

41. На строительстве стены первый каменщик работал 5 дней один. Затем к нему присоединился второй, и они вместе закончили работу через 4 дня. Известно, что пер-

вому каменщику потребовалось бы на выполнение этой работы на 5 дней больше, чем второму. За сколько дней может построить эту стену первый каменщик, работая один?

42. За определенное время на заводе собирают 90 автомобилей. Первые три часа на заводе выполняли установленную норму, а затем стали собирать на один автомобиль в час больше. Поэтому за час до срока уже было собрано 95 автомобилей. Сколько автомобилей в час должны были собирать на заводе?

43. На швейной фабрике израсходовали 204 м ткани на 24 пальто и 45 костюмов. На 24 пальто и 30 костюмов израсходовали 162 м. Сколько ткани расходуется на пошив одного пальто?

44. Две бригады, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу за 6 дней. За какое время каждая машина может выполнить эту работу, если известно, что вторая может справиться с этой работой на 9 дней быстрее первой?

45. Два тела, двигаясь по окружности в одном направлении, встречаются через каждые 112 мин, а двигаясь в противоположных направлениях — через каждые 16 мин. Во втором случае расстояние между ними уменьшилось с 40 м до 26 м за 12 с. Сколько метров в минуту проходит каждое тело?

46. К 40%-ному раствору соляной кислоты добавили 50 г чистой кислоты, после чего концентрация раствора стала равной 60%. Найдите первоначальный вес раствора.

47. Какое количество воды нужно добавить в 1 литр 9%-ного раствора уксуса, чтобы получить 3%-ный раствор?

48. Сплавляли два слитка, содержание цинка в которых было 64% и 84% соответственно. Получился сплав, содержащий 76% цинка. Его вес 50 г. Сколько весил каждый из сплавленных слитков?

49. Имеются два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 30% и 55% соответственно. В ка-

ком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив, получить сплав, содержащий 40% меди?

50. Какое количество воды надо добавить к 2 л 18%-ного раствора соли, чтобы получить 16%-ный раствор?

51. При повышении цены билета на 25% число зрителей в кинотеатре уменьшилось на 22%. На сколько процентов изменилась выручка театра?

52. Цена первого товара повысилась на 30%, а потом еще на 5%. Цена второго товара повысилась на 25%. После повышения цены товаров сравнялись. Найдите, на сколько процентов первоначальная цена одного товара больше первоначальной цены другого товара.

53. Зарплата была повышена два раза за один год на один и тот же процент. При таком повышении вместо 100 р. за один день рабочий стал получать 125,44 р. Определите, на сколько процентов повысилась зарплата.

Задания на 4 балла

54. Швея Ольга может сшить за 3 ч 15 фартуков, швея Нина за 2 ч — 12 фартуков, а швея Тамара за 30 мин — 4 фартука. Как должны распределить швеи между собой работу, чтобы закончить ее одновременно, если им осталось сшить 57 фартуков?

55. На фабрике в коробки упаковывают елочные игрушки. Первый упаковщик может упаковать 15 коробок за 0,5 ч, второй упаковщик — 40 коробок за час, третий — 20 коробок за 40 мин. Осталось упаковать 90 коробок. Как упаковщики должны распределить между собой оставшуюся работу, чтобы закончить ее одновременно?

56. Две бригады выполняют некоторую работу. Если всю работу будет делать первая бригада, то она затратит на 9 дней больше, чем две бригады вместе. Если эту работу будет делать вторая бригада, то она затратит на 4 дня больше, чем обе бригады вместе. За сколько дней выполнит эту работу первая бригада?

57. Мастер и его ученик выполняют некоторую работу. Если всю работу будет делать мастер, то он затратит на 9 ч больше, чем мастер и ученик вместе. Если эту работу будет делать ученик, то он затратит на 25 ч больше, чем мастер и ученик вместе. За сколько часов выполнит эту работу ученик?

58. Два крана разгружают баржу. Если всю работу будет выполнять первый кран, то работа будет выполнена на 16 ч позже, чем два крана, работая вместе. Если разгружать баржу будет второй кран, то работа будет выполнена на 9 ч позже, чем оба крана, работая вместе. За сколько часов может разгрузить эту баржу первый кран?

59. Один сплав содержит два металла в отношении 2 : 3, другой сплав содержит те же металлы в отношении 3 : 4. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы получить третий сплав, содержащий эти металлы в отношении 15 : 22?

Тема 9. Элементы теории вероятностей

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Встречаясь с различными случайными событиями, мы часто даем оценку степени их достоверности. Долю успеха того или иного события **A** математики выражают числом и называют вероятностью этого события **P(A)**. Для вычисления вероятности события, которое может закончиться конечным числом равновозможных элементарных исходов, можно воспользоваться классическим определением вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов, при которых событие A происходит, n — число всех равновозможных элементарных исходов.

Например, для вычисления вероятности наступления события «выпало два очка» при одном бросании играль-

ной кости, найдем число всех равновозможных элементарных исходов бросания игральной кости — их шесть; из них число исходов, благоприятствующих наступлению события «выпало два очка» — только одно. Используя определение получаем, что вероятность события «выпало два очка» при одном бросании игральной кости равна $\frac{1}{6}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Задание 1. Найдите вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3.

Решение.

В результате одного бросания игральной кости может наступить одним из шести равновозможных элементарных исходов: выпало «одно очко», «два очка», «три очка», «четыре очка», «пять очков», «шесть очков».

При этом числа, кратные 3, выпадают в *двух случаях*: выпало «три очка» и выпало «шесть очков».

Поэтому вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3, равна $\frac{2}{6}$,

т.е. $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задание 2. Малыш, не умеющий читать, играет с тремя карточками разрезной азбуки «и», «м», «р». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «мир»?

Решение.

Подсчитаем, сколько всех равновозможных элементарных исходов, не обязательно осмысленных, может получиться: «имр», «ирм», «мир», «мри», «рим», «рми», т.е. шесть равновозможных исходов. Только в одном из них получится слово «мир», поэтому вероятность выложить слово

«мир» равна $\frac{1}{6}$. Кстати, вероятность выложить слово «рим»

тоже равна $\frac{1}{6}$.

О т в е т: $\frac{1}{6}$.

Задание 3. В ящике лежат 10 одинаковых на ощупь шаров: 2 — зеленых, 3 — красных, 5 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) зеленый; 2) не зеленый.

Решение.

1) Пусть событие A состоит в том, что вынутый шар — зеленый. Число всех равновозможных элементарных исходов опыта равно 10. Число элементарных исходов, при которых событие A происходит, равно двум. Получаем, что вероятность взять зеленый шар равна $P(A) = \frac{2}{10} = 0,2$.

2) Пусть событие A состоит в том, что вынутый шар — не зеленый, т.е. он или красный или синий. Число всех равновозможных элементарных исходов опыта равно 10. Число всех исходов, благоприятствующих наступлению события A , равно 8 (три красных или пять синих). Получаем, что вероятность взять не зеленый шар равна $P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$.

О т в е т: 1) 0,2; 2) 0,8.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЧАСТЬ I

1. Найдите вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 2.

2. Малыш, не умеющий читать, играет с тремя карточками разрезной азбуки «о», «с», «к». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «сок»?

3. Малыш, не умеющий читать, играет с тремя карточками разрезной азбуки «о», «к», «к». Найдите вероят-

ность того, что, используя все карточки, он выложит слово «кок»?

4. Малыш, не умеющий читать, играет с четырьмя карточками разрезной азбуки «а», «м», «м», «а». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «мама»?

5. Малыш, не умеющий читать, играет с четырьмя карточками разрезной азбуки «т», «с», «о», «л». Найдите вероятность того, что, используя все карточки, он выложит слово «стол»?

6. В ящике лежат 10 одинаковых на ощупь шаров: 1 — зеленый, 3 — красных, 6 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) красный; 2) не красный.

7. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 — зеленых, 3 — красных, 5 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар: 1) синий; 2) не синий.

8. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 — зеленых, 3 — красных, 5 — синих. Из ящика вынули наудачу один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар красный или синий?

9. В барабане лежат одинаковые на ощупь шары лотереи с номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что номер вынутого наудачу шара делится: 1) на 3; 2) на 4?

10. В барабане лежат одинаковые на ощупь шары лотереи с номерами от 1 до 36. Какова вероятность того, что номер вынутого наудачу шара окажется: 1) простым числом; 2) составным числом; 3) квадратом какого-либо натурального числа?

11. На карте необитаемого острова отмечено 10 мест, в двух из них зарыты клады. Бывший пират выбирает наудачу одно из отмеченных мест и начинает копать. Какова вероятность того, что пират наткнется на клад?

12. На карте необитаемого острова отмечено 10 мест, в двух из них зарыты клады. Бывший пират выбирает наудачу одно из отмеченных мест и начинает копать. Убедившись, что в выбранном месте клада нет, он случайным образом выбирает одно из оставшихся мест. Какова вероятность того, что пират наткнется на клад?

Тема 10. Элементы статистики

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Статистические данные позволяют принимать правильные управленческие решения, выявлять закономерности, описывать явления повседневной жизни.

Сравнивать между собой несколько совокупностей статистических данных, можно, используя различные их **числовые характеристики**.

Размахом набора чисел называется разность между наибольшим и наименьшим числом.

Средним арифметическим (средним значением) нескольких чисел называется число, равное отношению суммы этих чисел к их количеству.

Мода — это число, которое встречается в числовом ряду чаще всего.

Числовой ряд может иметь одну моду или несколько, но может и не иметь моды.

Медиана — это число, которое делит упорядоченный ряд чисел на две равные по количеству элементов части. Если число чисел ряда *нечетно*, то медиана — это число, находящееся в середине упорядоченного ряда чисел.

Если количество чисел в ряде *четно*, то медиана равна полусумме чисел, стоящих на средних местах.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Задание 1. Найдите размах, среднее арифметическое, моду, медиану числового ряда 5, 5, 6, 5, 9.

Решение.

9 — наибольшее число ряда, 5 — наименьшее. Размах числового ряда равен $9 - 5 = 4$.

Для нахождения среднего арифметического, найдем сумму чисел ряда $5 + 5 + 6 + 5 + 9 = 30$ и их количество — 5 штук. Среднее арифметическое равно

$$\frac{5 + 5 + 6 + 5 + 9}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Чаще всего в числовом ряду встречается число 5, значит мода ряда равна 5.

Упорядочим ряд чисел по возрастанию и найдем срединное число ряда:

5, 5, 5, 6, 9.

Медиана ряда равна 5.

О т в е т. Размах ряда равен 4, среднее ряда равно 6, мода равна 5, медиана равна 5.

Задание 2. Найдите размах, среднее арифметическое, моду, медиану числового ряда 35, 30, 25, 50, 45, 40.

Р е ш е н и е.

50 — наибольшее число ряда, 25 — наименьшее. Размах числового ряда равен $50 - 25 = 25$.

Для нахождения среднего арифметического, найдем сумму чисел ряда $35 + 30 + 25 + 50 + 45 + 40 = 225$ и их количество — 6 штук. Среднее арифметическое равно

$$\frac{35 + 30 + 25 + 50 + 45 + 40}{6} = \frac{225}{6} = 37,5.$$

Данный ряд моды не имеет, так как каждое из чисел встречается только один раз.

Упорядочим ряд чисел по возрастанию и найдем срединное число ряда:

25, 30, 35, 40, 45, 50.

В данном ряде 6 чисел, поэтому медиану ряда найдем, как среднее арифметическое чисел 35 и 40. Медиана ряда равна 37,5.

О т в е т: Размах ряда равен 25, среднее ряда и медиана равны 37,5.

Задание 3. Рост Петра равен 154 см, а медиана ростов всех мальчиков его класса равна 152 см. Какое из утверждений верно?

1) В классе есть обязательно мальчик (не Петр) ростом более 152 см.

2) В классе есть обязательно мальчик ростом менее 152 см.

3) В классе есть обязательно мальчик ниже Петра.

4) В классе есть обязательно мальчик выше Петра.

Решение.

Медиана — это срединное число упорядоченного ряда. Анализ условия показывает, что в классе есть две группы мальчиков. Рост мальчиков первой группы меньше или равен 152 см, рост мальчиков второй группы выше или равен 152 см. Петр входит во вторую группу, значит один или несколько мальчиков должны быть в первой группе, т.е. их рост должен быть меньше или равен 152 см. Поэтому утверждения 1) и 4) неверны.

Утверждение 2) также неверно. В качестве примера можно взять ряд ростов троих мальчиков: 152, 152, 154.

Так как медиана ростов меньше роста Петра, значит, в классе есть мальчик ростом менее 154 см.

Ответ: 3.

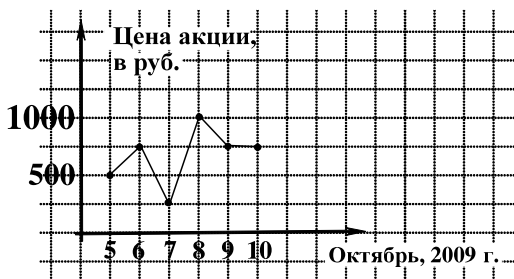
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Рассмотрите ряд чисел: 5; 5; 1; 4; 3. Найдите: а) размах; б) среднее арифметическое; в) медиану; г) моду.

2. Рассмотрите ряд чисел: 4; 9; 5; 2; 2; 5. Найдите: а) размах; б) среднее арифметическое; в) медиану; г) моду.

3. На графике жирными точками показаны цены одной акции автомобильного завода в период с 5 по 10 октября 2009 года (в рублях за акцию). Для наглядности жирные точки на графике соединены линией.



а) Определите по графику разность наибольшей и наименьшей цены в период с 5 по 7 октября 2009 года. Ответ дайте в рублях.

б) Определите среднее значение и моду цены одной акции с 5 по 9 октября 2009 года.

в) Брокер купил 5 октября 70 акций и продал 9 октября. Чему равна прибыль брокера?

г) Брокер купил 6 октября 40 акций и продал их 7 октября. Сколько потерял он денег на этой сделке?

4. Рост Ольги равен 146 см, а средний рост всех девочек из ее класса равен 148 см. Какое из утверждений верно?

1) В классе все девочки, кроме Ольги имеют рост 148 см.

2) В классе обязательно есть девочка ростом 148 см.

3) В классе обязательно есть девочка ростом более 148 см.

4) В классе обязательно есть девочка ростом 150 см.

5. Записан рост 5 учащихся: 142, 142, 136, 138, 144. На сколько отличается медиана этого набора чисел от его среднего арифметического?

6. В ряду данных, состоящих из 10 чисел, наибольшее число увеличили на 8. Как изменится при этом: а) среднее арифметическое; б) размах?

7. В ряду данных, состоящих из 10 чисел, наименьшее число уменьшили на 5. Как изменится при этом: а) среднее арифметическое; б) размах?

8. В ряду чисел 4, 6, __, 12, 10 одно число оказалось стертым. Восстановите его, зная, что среднее арифметическое этих чисел равно 7.

9. В ряду чисел 4, 6, __, 12, 10 одно число оказалось стертым. Восстановите его, зная, что размах ряда равен 10.

10. В фермерском хозяйстве отведено под пшеницу два участка 5 га и 15 га. Средняя урожайность на первом участке составляет 25 ц с 1 га, на втором 15 ц с 1 га. Чему равна средняя урожайность пшеницы в этом хозяйстве?

Тема 11. Уравнения и неравенства с модулем

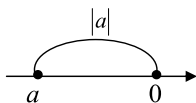
Уравнения и неравенства с модулем встречаются во второй части экзаменационной работы. При решении большинства уравнений и неравенств с модулем приходится использовать определение модуля, реже — свойства модуля и его геометрический смысл.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Определение. Модулем числа a называется само это число a , если $a \geq 0$, и противоположное число $(-a)$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Геометрически модуль числа a означает расстояние на координатной прямой от точки с координатой a до начала координат.



Запись $|x - a|$ можно понимать как расстояние от точки с координатой x до точки с координатой a на координатной прямой.

Свойства модуля

Для любого действительного числа a

$$|a| \geq 0, \quad (2)$$

$$|a| = |-a|, \quad (3)$$

$$|a|^2 = a^2. \quad (4)$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

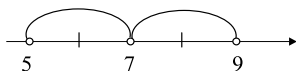
БЛОК 1. Уравнения и неравенства с модулем вида $|f(x)| = b$,
 $|f(x)| < b, |f(x)| \geq b$, где $f(x)$ — некоторая функция,
а b — положительное число ($b > 0$)

Задание 1. Решите уравнение $|x - 7| = 2$.

Решение.

1-й способ

Исходя из геометрического смысла модуля, следует найти на координатной прямой точки, расстояние от которых до точки с координатой 7 равно 2.



Получим $x = 5$ или $x = 9$.

2-й способ

По определению модуля $x - 7 = -2$ или $x - 7 = 2$.

Получим $x = 5$ или $x = 9$.

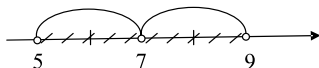
Ответ: 5; 9.

Задание 2. Решите неравенство $|x - 7| < 2$.

Решение.

1-й способ

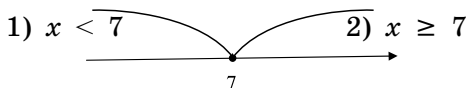
Исходя из геометрического смысла модуля, следует найти точки на координатной прямой, расположенные на расстоянии, меньшем 2 от точки с координатой 7.



Получим промежуток $(5; 9)$.

2-й способ

Найдем нули выражения, стоящего под знаком модуля $x - 7 = 0$, $x = 7$. Отметим число 7 на координатной прямой.



Число 7 разбивает координатную прямую на два промежутка.

Рассмотрим отдельно два случая и объединим результаты.

1) Если $x < 7$, то выражение под знаком модуля принимает отрицательные значения, и по определению модуля имеем систему

$$\begin{cases} x < 7, \\ -(x - 7) < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7, \\ -x < -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7, \\ x > 5. \end{cases}$$

Решение системы — промежуток $(5; 7)$.

2) Если $x \geq 7$, то выражение под знаком модуля принимает неотрицательные значения, и по определению модуля имеем систему

$$\begin{cases} x \geq 7, \\ (x - 7) < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 7, \\ x < 9. \end{cases}$$

Решение системы — промежуток $[7; 9)$.

Объединим решения в пунктах 1) и 2). Получим промежуток $(5; 9)$.

3-й способ

Неравенства вида $|f(x)| < b$, где $f(x)$ — некоторая функция, а число $b > 0$, можно решить с помощью равносильных преобразований. Неравенство $|f(x)| < b$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < b, \\ f(x) > -b. \end{cases}$$

Неравенство $|x - 7| < 2$ равносильно системе

$$\begin{cases} x - 7 < 2, \\ x - 7 > -2. \end{cases}$$

Ее решением является промежуток $(5; 9)$.

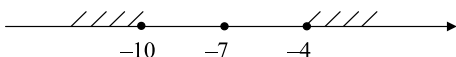
О т в е т: $(5; 9)$.

Задание 3. Решите неравенство $|x + 7| \geq 3$.

Решение.

1-й способ

Исходя из геометрического смысла модуля, требуется найти числа, находящиеся на расстоянии, большем или равном (не меньшим) 3, от точки с координатой (-7) .

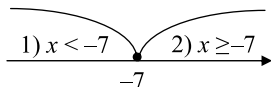


Получаем два промежутка $(-\infty; -10]$ и $[-4; +\infty)$.

2-й способ

Найдем нули выражения, стоящего под знаком модуля:
 $x + 7 = 0$, $x = -7$.

Число (-7) разбивает координатную прямую на два промежутка. Решим исходное неравенство на каждом из промежутков.



1) Если $x < -7$, то выражение под знаком модуля принимает отрицательные значения, и по определению модуля имеем систему

$$\begin{cases} x < -7, \\ -(x + 7) \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -7, \\ -x \geq 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -7, \\ x \leq -10. \end{cases}$$

Решением ее будет промежуток $(-\infty; -10]$.

2) Если $x \geq -7$, то выражение под знаком модуля принимает неотрицательные значения, и по определению модуля имеем систему

$$\begin{cases} x \geq -7, \\ (x + 7) \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -7, \\ x \geq -4. \end{cases}$$

Решение системы — промежуток $[-4; +\infty)$.

Объединяем решения в пунктах 1) и 2). Получаем объединение промежутков $(-\infty; -10] \cup [-4; +\infty)$.

3-й способ

Неравенства вида $|f(x)| \geq b$, где $f(x)$ — некоторая функция, а число $b > 0$, можно решить с помощью равносильных преобразований. Неравенство $|f(x)| \geq b$ равносильно совокупности неравенств: $f(x) \geq b$ или $f(x) \leq -b$.

Неравенство $|x + 7| \geq 3$ равносильно совокупности неравенств: $x + 7 \geq 3$ или $x + 7 \leq -3$. Решением является объединение промежутков $(-\infty; -10] \cup [-4; +\infty)$.

О т в е т: $(-\infty; -10] \cup [-4; +\infty)$.

БЛОК 2. Уравнения и неравенства с модулем вида $|f(x)| = g(x)$,
 $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| \geq g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции

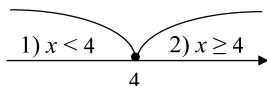
Задание 4. Решите уравнение $|x - 4| = 4x + 1$.

Р е ш е н и е.

1-й способ

Найдем нули выражения, стоящего под знаком модуля: $x - 4 = 0$, $x = 4$.

Число 4 разбивает координатную прямую на два промежутка.



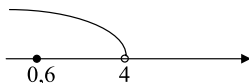
Решим исходное неравенство на каждом из промежутков.

1) Если $x < 4$, то то выражение под знаком модуля принимает отрицательные значения, и по определению модуля имеем систему

$$\begin{cases} x < 4, \\ -(x - 4) = 4x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ -5x = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x = 0,6. \end{cases}$$

Решением системы будет число 0,6, так как

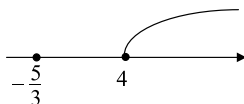
$$0,6 \in (-\infty; 4).$$



2) Если $x \geq 4$, то выражение под знаком модуля принимает неотрицательные значения, и по определению модуля имеем систему

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ (x - 4) = 4x + 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ -3x = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x = -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Система не имеет решений, так как $-\frac{5}{3} \notin [4; +\infty)$.



2-й способ

Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение $|x - 4| = 4x + 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} x - 4 = 4x + 1, \\ x - 4 = -4x - 1, \\ 4x + 1 \geq 0, \end{cases}$$

решением которой является число 0,6.

О т в е т: 0,6.

Задание 5. Решите неравенство $|2x + 4| + x < 2$. В ответе укажите сумму всех его целых решений.

Р е ш е н и е.

1-й способ

Найдем нули выражения, стоящего под знаком модуля:
 $2x + 4 = 0$, $x = -2$.

Число -2 разбивает координатную прямую на два промежутка. Решим исходное неравенство на каждом из промежутков.

1) Если $x < -2$, то имеем систему

$$\begin{cases} x < -2, \\ -(2x + 4) + x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ -x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x > -6. \end{cases}$$

Решением системы неравенств является промежуток $(-6; -2)$.

2) Если $x \geq -2$, то имеем систему

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ 2x + 4 + x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ 3x < -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решением системы неравенств является промежуток $\left[-2; -\frac{2}{3}\right)$.

Объединяем промежутки, являющиеся решением каждой системы в пунктах 1) и 2), получим промежуток $\left(-6; -\frac{2}{3}\right)$.

Целые решения, входящие в этот промежуток: $-5; -4; -3; -2; -1$. Их сумма равна -15 .

2-й способ

Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

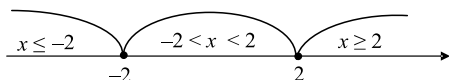
Неравенство $|2x + 4| < 2 - x$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} 2x + 4 < 2 - x, \\ 2x + 4 > x - 2, \end{cases}$ решением которой является промежуток $\left(-6; -\frac{2}{3}\right)$. Осталось выбрать целые числа, входящие в этот промежуток, и найти их сумму.

О т в е т: -15 .

Задание 6. Решите неравенство $|x^2 - 4| \geq 3x$.

Решение.

Найдем нули выражения, стоящего под знаком модуля: $x^2 - 4 = 0$, $x = \pm 2$. Числа -2 и 2 разбивают координатную прямую на три промежутка.



1) Если $x \leq -2$, то имеем систему

$$\begin{cases} x \leq -2, \\ x^2 - 4 \geq 3x. \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы $x^2 - 3x - 4 \geq 0$.



Решением неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Решением системы неравенств является промежуток $(-\infty; -2]$.

2) Если $-2 < x < 2$, то имеем систему

$$\begin{cases} -2 < x < 2, \\ 4 - x^2 \geq 3x; \end{cases} \begin{cases} -2 < x < 2, \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы $-x^2 - 3x + 4 \geq 0$.



Решением неравенства является отрезок $[-4; 1]$.

Решением системы неравенств является промежуток $(-2; 1]$

3) Если $x \geq 2$, то имеем систему

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - 4 \geq 3x. \end{cases}$$

Решением второго неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Решением системы неравенств является промежуток $[4; +\infty)$.

Решением исходного неравенства является объединение решений в пунктах 1), 2), 3): $(-\infty; 1]$ и $[4; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Замечание: неравенство вида $|f(x)| \geq g(x)$ равносильно совокупности неравенств $f(x) \geq g(x)$ или $f(x) \leq -g(x)$. В задании 6 неравенство $|x^2 - 4| \geq 3x$ равносильно совокупности неравенств $x^2 - 4 \geq 3x$ или $x^2 - 4 \leq -3x$.

БЛОК 3. Уравнения и неравенства с модулем вида $|f(x)| = |g(x)|$,
 $|f(x)| < |g(x)|$

Задание 7. Решите уравнение $|2x + 5| = |x - 1|$.

Решение.

Два числа, модули которых равны, либо равны между собой, либо отличаются только знаком, т.е. если $|a| = |b|$, то либо $a = b$, либо $a = -b$. Применим это свойство модулей к решению исходного уравнения.

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= x - 1 \quad \text{или} \quad 2x + 5 = 1 - x \\ x &= -6 \quad \text{или} \quad x = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $-6; -\frac{4}{3}$.

Замечание: уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ можно решать с помощью равносильных преобразований. Так как обе части уравнения неотрицательны, то уравнение равносильно уравнению $f^2(x) = g^2(x)$, тогда $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$.

Например, в задании 7 уравнение $|2x + 5| = |x - 1|$ равносильно уравнению $(2x + 5)^2 = (x - 1)^2$. Далее применяем формулу разности квадратов и условие равенства нулю произведения:

$$(2x + 5 - (x - 1))(2x + 5 + x - 1) = 0.$$

Задание 8. Решите неравенство $|x^2 - 2x| < |x + 4|$. В ответе укажите число целых решений неравенства.

Решение.

Так как обе части неравенства неотрицательны, то возведем обе части неравенства в квадрат. Имеем:

$$(x^2 - 2x)^2 < (x + 4)^2.$$

Перенесем слагаемые в левую часть неравенства и применим формулу разности квадратов.

$$(x^2 - 2x - x - 4)(x^2 - 2x + x + 4) < 0$$

$$(x^2 - 3x - 4)(x^2 - x + 4) < 0$$

Данное неравенство не является ни линейным, ни квадратным. Решим его методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - x + 4)$. Найдем нули функции, для этого решим уравнение

$$(x^2 - 3x - 4)(x^2 - x + 4) = 0.$$

Числа -1 , 4 являются нулями функции.

Отметим нули функции на координатной прямой. Они разбивают координатную прямую на три промежутка.

В каждом из промежутков знак функции сохраняется, а при переходе через нуль функции (т.е. через точки -1 , 4) ее знак меняется.

Определим знак функции в каком-нибудь из трех промежутков. Например, рассмотрим

$$f(0) = (0 - 4)(0 + 4) = -16 < 0,$$

значит, в промежутке $(-1; 4)$ значения функции отрицательны. Далее происходит чередование знаков.



Решением исходного неравенства является промежуток $(-1; 4)$. В этот промежуток входят четыре целых числа: 0 ; 1 ; 2 ; 3 .

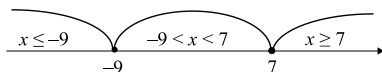
Ответ: 4.

БЛОК 4. Уравнения, содержащие несколько модулей

Задание 9. Решите уравнение $|x - 7| + |9 + x| = 18$.

Решение.

Найдем нули каждого из выражений, стоящих под знаком модуля: $x - 7 = 0$, $x = 7$ и $9 + x = 0$, $x = -9$. Числа -9 и 7 разбивают координатную прямую на три промежутка.



Определим знаки каждого из выражений, стоящих под знаком модуля в каждом из промежутков.

Составим таблицу знаков.

	$x \leq -9$	$-9 < x < 7$	$x \geq 7$
$x - 7$	-	-	+
$x + 9$	-	+	+

1) Если $x \leq -9$, то имеем систему

$$\begin{cases} x \leq -9, \\ -(x - 7) - (x + 9) = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -9, \\ -2x = 20. \end{cases}$$

Решением системы является число -10 ; $-10 \in (-\infty; -9]$.

2) Если $-9 < x < 7$, то имеем систему

$$\begin{cases} -9 < x < 7, \\ -(x - 7) + (x + 9) = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} -9 < x < 7, \\ 16 = 18 \text{ (неверно)}. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

3) Если $x \geq 7$, то имеем систему

$$\begin{cases} x \geq 7, \\ (x - 7) + (x + 9) = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 7, \\ 2x = 16. \end{cases}$$

Решением системы является число $8 \in [7; +\infty)$.

Итак, исходное уравнение имеет два решения: -10 и 8 .

Ответ: -10 ; 8 .

БЛОК 5. Сложный модуль (к этому блоку отнесем такие уравнения и неравенства, в которых под знаком модуля находится выражение, в записи которого содержится один или несколько модулей)

Задание 10. Решите уравнение $|x - 1| - 2 = 3$.

Решение.

Решение можно начать с раскрытия внутреннего модуля.

1) Если $x - 1 \geq 0$, то $|x - 1| = x - 1$. И имеем следующее уравнение $|x - 1 - 2| = 3$, $|x - 3| = 3$, решением которого являются числа 0 и 6.

Так как $x \geq 1$, то число 0 является посторонним корнем уравнения. Значит, при $x - 1 \geq 0$, получаем только один корень 6.

2) Если $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1)$. И имеем следующее уравнение $|-(x - 1) - 2| = 3$, $|-x - 1| = 3$, решением которого являются числа 2 и (-4) . Так как $x < 1$, то число 2 является посторонним корнем уравнения, т.е. при $x - 1 < 0$ получаем только один корень (-4) .

Итак, исходное уравнение имеет два корня (-4) и 6.

Ответ: $-4; 6$.

БЛОК 6. Системы уравнений с модулем

Задание 11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |x - y| = 5. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим второе уравнение системы. Так как $|x - y| = 5$, то $x - y = 5$ или $x - y = -5$

В первом случае имеем систему $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y = 5, \end{cases}$ которую

можно решить методом сложения или методом подстановки. Решением системы является пара чисел $(4; -1)$.

Во втором случае имеем систему $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y = -5, \end{cases}$ которую

тоже можно решить методом сложения или методом подстановки. Решением системы является пара чисел $\left(\frac{2}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$.

О т в е т: $(4; -1), \left(\frac{2}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$.

БЛОК 7. Использование свойств модуля при решении иррациональных уравнений

Задание 12. Решите уравнение $x^2 + \sqrt{x^2} - 12 = 0$.

Р е ш е н и е.

Так как $\sqrt{b^2} = |b|$, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 + |x| - 12 = 0$.

Решим его двумя способами.

1-й способ. Решим уравнение на каждом из двух промежутков $x \geq 0$ и $x < 0$.

1) При $x \geq 0$ получим уравнение $x^2 + x - 12 = 0$. Его корни: -4 и 3 . С учетом условия $x \geq 0$, имеем только один корень 3 .

2) При $x < 0$ получим уравнение $x^2 - x - 12 = 0$. Его корни: 4 и (-3) . С учетом условия $x < 0$, имеем только один корень (-3) .

Исходное уравнение имеет два корня: 3 и (-3) .

2-й способ. Введем новую переменную. Пусть $|x| = a$. Так как $x^2 = |x|^2$, то имеем квадратное уравнение относительно a .

$$a^2 + a - 12 = 0.$$

$$a = -4 \text{ или } a = 3.$$

$$|x| = -4 \text{ или } |x| = 3.$$

Первое уравнение корней не имеет (почему?). Второе уравнение имеет два корня ± 3 .

О т в е т: ± 3 .

Замечание: уравнение $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0$ внешне практически не отличается от уравнения $x^2 + \sqrt{x^2} - 12 = 0$. Тем не менее при решении его используется другое свойство арифметического квадратного корня. А именно: $(\sqrt{b})^2 = b, b \geq 0$.

И его решение будет следующим:

$$\begin{aligned} x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 &= 0, \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 12 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Корни квадратного уравнения: 3 и (-4) . Но $x \geq 0$, поэтому решением уравнения $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0$ будет только число 3.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. Модуль числа (-12) равен...

Ответ: _____.

2. Модуль числа $\sqrt{3} - 2$ равен...

Ответ: _____.

3. Упростите выражение $|x - 6| - 7$ при $x > 14$.

Ответ: _____.

4. Упростите выражение $|x - 6| - 7$ при $x < 2$.

Ответ: _____.

5. Упростите выражение $|x - 6| + |x|$ при $0 < x < 4$.

Ответ: _____.

6. Упростите выражение $|x - 6| + |x|$ при $x < -4$.

Ответ: _____.

7. Упростите выражение $|x - 6| + |x|$ при $x > 15$.

Ответ: _____.

8. Решите уравнение $|x| = 5$.

О т в е т: _____.

9. Решите уравнение $|x| = -5$.

О т в е т: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

10. Решите уравнение $|3x - 2| = 4$.

11. Решите уравнение $|3x - 2| = 4 - \sqrt{17}$.

12. Решите неравенство $|x - 3| < 4$.

13. Решите неравенство $|x + 1| \geq 2$.

14. Укажите число целых решений неравенства $|x + 1| < 7$.

15. Укажите наименьшее натуральное решение неравенства $|x - 2| > 1$.

16. Решите неравенство $|3x - 2| < 4$.

17. Решите неравенство $|3x - 2| \geq 4$.

18. Решите уравнение $|x - 3| = 3x + 2$.

19. Решите уравнение $|x - 5| = 2x + 3$.

20. Решите уравнение $|2x - 3| = x$.

21. Решите неравенство $|x - 5| \leq 0$.

22. Решите неравенство $|x - 5| \geq 0$.

23. Решите неравенство $|x - 5| > 0$.

24. Решите уравнение $|x^2 - 6| = 15$.

25. Решите уравнение $|x^2 - 9| = 8x$.

26. Решите уравнение $|x^2 - 9| = -8x$. В ответе укажите сумму его корней.

Задания на 3 балла

27. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x + 1| < 6, \\ |x - 1| \geq 2. \end{cases}$$

28. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x - 1| < 5, \\ |x + 2| \geq 1. \end{cases}$$

В ответе укажите число целых решений системы.

29. Решите неравенство $|x^2 + 2x| \leq |x + 6|$. В ответе укажите длину промежутка, являющегося решением неравенства.

30. Решите неравенство $|x^2 - x| \geq |2x + 10|$.

31. Решите уравнение $|x^2 - 9| = |8x|$.

32. Решите уравнение $|x + 2007| = 2007 + x$.

33. Решите неравенство $|x + 2007| \geq 2007 + x$.

34. Решите неравенство $|x + 2007| \leq 2007 + x$.

35. Решите неравенство $|x + 2007| < 2007 + x$.

36. Укажите середину промежутка, являющегося множеством решений неравенства $|x + 1| \leq 0,5x + 2$.

37. Решите неравенство $|x - 5|(x - 3) \geq 0$.

38. Решите неравенство $|x + 5|(x - 3) \geq 0$.

Задания на 4 балла

39. Решите уравнение $||x| + 1| = 4$.

40. Решите уравнение $||x| + 2| = 6$.

41. Решите уравнение $|x - 8| + |7 + x| = 16$.

42. Решите уравнение $|x - 5| + |6 + x| = 13$.

43. Решите уравнение $|x - 5| + |6 + x| = 11$.

44. Решите уравнение $x^2 + 3\sqrt{x^2} - 10 = 0$.

45. Решите уравнение $x^2 + 3(\sqrt{x})^2 - 10 = 0$.

46. Решите уравнение $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 7 = 0$.

47. Решите неравенство $x^2 + 6|x| - 7 \geq 0$.

48. Решите уравнение $x^2 + 6(\sqrt{x})^2 - 7 = 0$.

49. При каких натуральных значениях m верна система неравенств

$$\begin{cases} (m-1)^2 + (m+1)^2 \geq 2(m-1)(m+1), \\ |4-2m| < 3. \end{cases}$$

50. Найдите наибольшие и наименьшие целые числа, принадлежащие промежутку, который является множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{7}{8} + \frac{3(x-1)}{4} \leq \frac{x-2}{4} + \frac{13}{4}, \\ |x-1| < 5. \end{cases}$$

51. Решите уравнение $|7-21x| + |9+21x| = 16$.

52. Решите уравнение $|15x-3| + |14x-9| = 6+x$.

53. Решите неравенство

$$|x+1| + |x+2| + |x-1| + |x-2| < 5x-15.$$

54. Решите неравенство

$$|x+3| + |x+2| + |x-2| + |x-3| \leq 6x-18.$$

55. Решите уравнение $(x^2-9x+8)^2 + 5|x-1| = 0$.

56. Решите уравнение $|x^2-4| + |x-2| = 0$.

57. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y=5, \\ |x+y|=3. \end{cases}$$

58. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6x+y=25, \\ |x-y|=3. \end{cases}$$

Тема 12. Уравнения и неравенства с параметром

Уравнения и неравенства с параметром встречаются только в трехбалльных или четырехбалльных заданиях второй части экзаменационной работы.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Решить уравнение (неравенство) с параметром — это значит установить соответствие, позволяющее для любого значения параметра найти соответствующее множество решений уравнения (неравенства).

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ
(С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)****Линейные уравнения и неравенства**

Задание 1. Решите при всех значениях параметра a уравнение $ax = 2x + 5$.

Решение.

Необходимо решить линейное уравнение с параметром. Сначала перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть уравнения и приведем подобные слагаемые. Получим $(a - 2)x = 5$.

Чтобы найти значение x , в данном случае надо разделить уравнение на $(a - 2)$. При всех ли значениях параметра a мы можем уравнение разделить на $(a - 2)$? Нет.

При $a = 2$ выражение $a - 2$ обращается в нуль, поэтому значение параметра $a = 2$ является «особым» — контрольным значением параметра. Рассмотрим это значение отдельно.

При $a = 2$ $(2 - 2)x = 5$; $0x = 5$ — уравнение решений не имеет.

Теперь $a \neq 2$, и, чтобы выразить x , делим обе части уравнения на $(a - 2)$.

При $a \neq 2$ получим $x = \frac{5}{a-2}$.

Ответ: при $a = 2$ решений нет; при $a \neq 2$ $x = \frac{5}{a-2}$.

Задание 2. Решите при всех значениях параметра a неравенство $ax \leq 2x + 5$.

Решение.

Необходимо решить линейное неравенство с параметром. Перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть

неравенства и приведем подобные слагаемые. Получим $(a - 2)x \leq 5$.

Чтобы найти значения x , надо разделить обе части неравенства на $(a - 2)$. При всех ли значениях параметра a мы можем неравенство разделить на $(a - 2)$?

При $a = 2$ выражение $a - 2$ обращается в нуль.

Рассмотрим это значение отдельно.

При $a = 2$ $(2 - 2)x \leq 5$; $0x \leq 5$. Это неравенство верно при любых значениях x , поэтому решением исходного неравенства при $a = 2$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Теперь $a \neq 2$. Для того чтобы выразить x , надо разделить неравенство на $(a - 2)$. Существенным отличием решения линейного неравенства с параметром от решения линейного уравнения с параметром является то, что знак неравенства при делении обеих частей неравенства на выражение с неизвестным может измениться на противоположный или не изменится. Поэтому при делении неравенства на выражение с параметром надо учитывать знак этого выражения.

Если $a - 2 < 0$, то знак неравенства придется изменить; если $a - 2 > 0$, то знак неравенства не меняется.

При $a < 2$ $x \geq \frac{5}{a-2}$ (знак неравенства изменился).

При $a > 2$ $x \leq \frac{5}{a-2}$ (знак неравенства не изменился).

Ответ: при $a = 2$ $x \in (-\infty; +\infty)$; при $a < 2$ $x \geq \frac{5}{a-2}$;
при $a > 2$ $x \leq \frac{5}{a-2}$.

Квадратные уравнения и неравенства



Число корней квадратного уравнения определяют по знаку дискриминанта:

- если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня;
- если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или два совпавших);
- если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Задание 3. При каких значениях параметра a уравнение $4x^2 - 4ax + 1 = 0$: 1) имеет два различных корня; 2) имеет два корня; 3) не имеет корней?

Решение.

Найдем дискриминант исходного уравнения.

$$D = 16a^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16a^2 - 16.$$

1) Так как уравнение имеет два различных корня, то $D = 16a^2 - 16 > 0, a^2 > 1$ (см. решение квадратных неравенств в теме «Неравенства»). Получим

$$a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

2) Так как уравнение имеет два корня, не обязательно различных, то

$$D = 16a^2 - 16 \geq 0, a^2 \geq 1 \text{ и } a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

3) Так как уравнение не имеет корней, то

$$D = 16a^2 - 16 < 0, a^2 < 1 \text{ и } a \in (-1; 1).$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ уравнение имеет два различных корня; при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ уравнение имеет два корня; при $a \in (-1; 1)$ уравнение не имеет корней.

Задание 4. При каких значениях параметра уравнение $(b-1)x^2 + (b+4)x + b+7 = 0$ имеет только один корень?

Решение.

При всех ли значениях параметра данное уравнение будет квадратным? Нет.

При $b = 1$ уравнение становится линейным ($b = 1$ — контрольное значение параметра). Подставим значение $b = 1$ в исходное уравнение.

$(1-1)x^2 + (1+4)x + 1+7 = 0, 5x + 8 = 0$. Это уравнение имеет один корень $-1,6$.

При $b \neq 1$ имеем квадратное уравнение. Так как квадратное уравнение имеет один корень, то $D = 0$.

Находим дискриминант и приравняем его к нулю.

$$D = (b + 4)^2 - 4 \cdot (b - 1)(b + 7) = b^2 + 8b + 16 - 4(b^2 + 6b - 7) = \\ = -3b^2 - 16b + 44 = 0$$

$$3b^2 + 16b - 44 = 0$$

Уравнение имеет корни 2 и $-\frac{22}{3}$.

Ответ: при $b = 1$; $b = 2$; $b = -\frac{22}{3}$ уравнение имеет только один корень.

Задание 5. При каких значениях параметра неравенство

$$ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$$

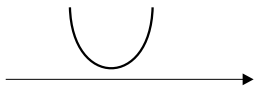
не имеет решений?

Решение.

Данное неравенство не при любых значениях параметра a будет квадратным. Какое значение параметра является в данном случае контрольным?

(I) Пусть $a = 0$. Имеем: $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 5 \leq 0$. Получаем $5 \leq 0$. Это не верно. Значит, при $a = 0$ исходное неравенство решений не имеет.

(II) При $a \neq 0$ исходное неравенство будем квадратным и графиком функции $f(x) = ax^2 + 4ax + 5$ является парабола. Чтобы неравенство $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$ не имело решений, надо, чтобы парабола была расположена выше оси абсцисс.



Запишем условия, соответствующие данному положению параболы.

$$\begin{cases} a > 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

$$D = 16a^2 - 4 \cdot a \cdot 5 = 16a^2 - 20a.$$

Решением неравенства $D < 0$ является промежуток $(0; 1,25)$.

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0 < a < 1,25. \end{cases}$$

Решением системы является промежуток $(0; 1,25)$.

Объединяем полученные решения и получаем ответ.

О т в е т: при $a \in [0; 1,25)$ неравенство не имеет решений.

Применение теоремы Виета



Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, то сумма корней этого уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, т.е. если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \quad (\text{теорема Виета}).$$

Задание 6. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение

$$x^2 - 2bx + b + 6 = 0$$

имеет положительные корни.

Решение.

1-й способ

Чтобы квадратное уравнение имело корни, необходимо, чтобы дискриминант его был неотрицателен ($D \geq 0$).

В каком случае оба корня положительны. Например, если и сумма корней положительна ($x_1 + x_2 > 0$) и произведение корней положительно ($x_1 \cdot x_2 > 0$).

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения, тогда, по теореме Виета: $x_1 + x_2 = 2b$ и $x_1 \cdot x_2 = b + 6$. И имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = b + 6 > 0, \\ D \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b > 0, \\ b > -6, \\ 4b^2 - 4(b + 6) \geq 0. \end{cases}$$

Решим квадратное неравенство:

$$4b^2 - 4b - 24 \geq 0,$$

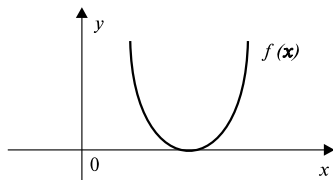
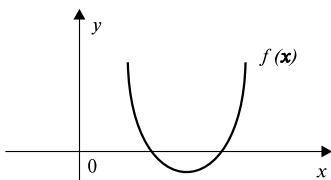
$$b^2 - b - 6 \geq 0.$$



Решением системы неравенств будет промежуток $[3; +\infty)$.

2-й способ

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2bx + b + 6$. Ее графиком является парабола. Изобразим параболы, удовлетво-



ряющие условиям задачи.

Запишем условия, соответствующие этому расположению парабол.

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_{\text{вершины}} > 0. \end{cases}$$

Решим каждое из этих неравенств.

$$f(0) = b + 6, \quad b + 6 > 0, \quad b > -6.$$

$$D = 4b^2 - 4(b + 6) \geq 0, \quad b \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty).$$

$$x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2b}{2} = b > 0.$$

Решим систему
$$\begin{cases} 6 > -6, \\ 6 \leq -2, \quad b \geq 3, \\ b > 0. \end{cases}$$

Отметим решения каждого неравенства на координатной прямой и найдем пересечение решений.

Решением системы неравенств будет промежуток $[3; +\infty)$.

О т в е т: при $b \in [3; +\infty)$ уравнение имеет положительные корни.

Задание 7. Найдите все значения параметра p , при которых разность корней уравнения $x^2 + px + 12 = 0$ равна 1.

Р е ш е н и е.

Пусть x_1 и x_2 корни уравнения ($D = p^2 - 48$, $p^2 - 48 \geq 0$), тогда, по теореме Виета, имеем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = 12, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Выразим корни уравнения из первого и третьего уравнений через параметр p и подставим во второе уравнение.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-p}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = 12, \\ x_2 = \frac{-1-p}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1-p}{2}, \\ \frac{1-p}{2} \cdot \frac{-1-p}{2} = 12, \\ x_2 = \frac{-1-p}{2}. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение относительно параметра p .

$$\begin{aligned} \frac{(1-p)(1+p)}{4} &= -12 \\ 1 - p^2 &= -48 \\ p^2 &= 49 \end{aligned}$$

$D = p^2 - 48$. Так как $p^2 = 49$, то $D > 0$, и уравнение имеет два корня 7 и (-7) .

О т в е т: при $p = \pm 7$ разность корней уравнения равна 1.

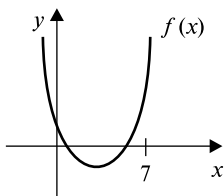
Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

Задание 8. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 - ax + 7 = 0$ меньше 7.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - ax + 7$. Графиком данной функции является парабола. Изобразим параболу с указанными свойствами.

Рассмотрим дискриминант исходного квадратного уравнения:



Запишем условия, соответствующие этому расположению параболы.

$$\begin{cases} f(7) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_{\text{вершины}} < 7. \end{cases}$$

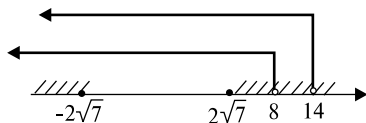
Решим каждое из этих неравенств.

$$f(7) = 49 - 7a + 7 > 0, a < 8.$$

$$D = a^2 - 28 \geq 0, a^2 \geq 28, a \in (-\infty; -2\sqrt{7}] \cup [2\sqrt{7}; +\infty).$$

$$x_{\text{вершины}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-a}{2} = \frac{a}{2}, \frac{a}{2} < 7, a < 14.$$

Отметим решения каждого неравенства на координатной прямой и найдем пересечение решений.



Решением системы неравенств будет объединение промежутков $(-\infty; -2\sqrt{7}] \cup [2\sqrt{7}; 8)$.

О т в е т: при $a \in (-\infty; -2\sqrt{7}] \cup [2\sqrt{7}; 8)$ оба корня уравнения меньше 7.

Задание 9. При каких значениях параметра a число 7 находится между корнями уравнения $x^2 - ax + 7 = 0$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - ax + 7$. Изобразим параболу, удовлетворяющую условиям задачи, и опишем соответствующие условия.

Чтобы число 7 разделяло корни уравнения, достаточно, чтобы $f(7) < 0$.

Решим неравенство $f(7) = 49 - 7a + 7 < 0$, $a > 8$.

О т в е т: при $a > 8$ число 7 находится между корнями уравнения $x^2 - ax + 7 = 0$.

Системы линейных уравнений

Задание 10. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a + y = 0,5a^2x, \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

1) не имеет решений; 2) имеет бесконечно много решений.

Решение.

Графиком каждого из уравнений системы является прямая. Две прямые на плоскости могут быть: 1) параллельными (система не имеет решения); 2) могут пересекаться (система имеет одно решение); 3) совпадать (система имеет бесконечно много решений).



Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ 1) параллельны, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$; 2) пересекаются, если $k_1 \neq k_2$; 3) совпадают, если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

Выразим в каждом уравнении системы переменную y .

$$\begin{cases} a + y = 0,5a^2x, \\ 2x - y + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0,5a^2x - a, \\ y = 2x + 2. \end{cases}$$

Сравним коэффициенты при x . При равенстве коэффициентов при x (угловых коэффициентов) прямые могут либо совпадать, либо быть параллельными.

$$0,5a^2 = 2, \quad a^2 = 4, \quad a = \pm 2.$$

При $a = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} y = 2x - 2, \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

и прямые параллельны (система не имеет решений).

При $a = -2$ имеем систему

$$\begin{cases} y = 2x + 2, \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

и прямые совпадают (система имеет бесконечно много решений).

О т в е т: при $a = 2$ система не имеет решений; при $a = -2$ система имеет бесконечно много решений.

Уравнения с модулем



Уравнения и неравенства с модулем можно решать графически. Для этого выражения, содержащие параметр, переносят в одну часть уравнения (неравенства) и строят графики функций левой и правой частей уравнения (неравенства).

Задание 11. Решите уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$ при $a > 0$.

Р е ш е н и е.

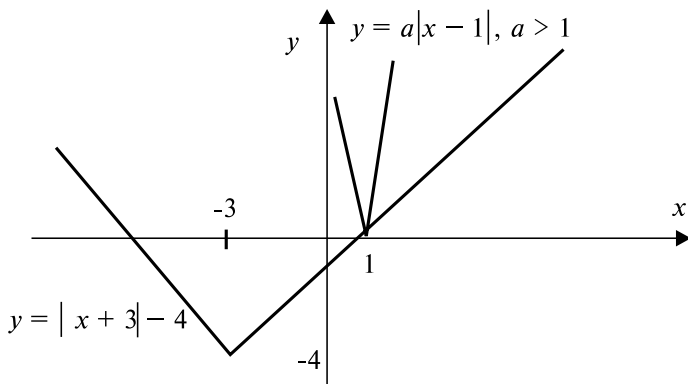
$$|x + 3| - a|x - 1| = 4$$

$$|x + 3| - 4 = a|x - 1|.$$

Будем строить в одной системе координат графики функций $y = |x + 3| - 4$ и $y = a|x - 1|$.

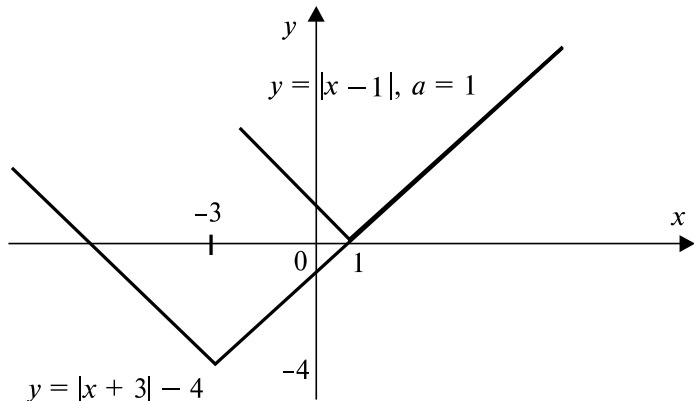
Рассмотрим четыре случая: 1) $a > 1$; 2) $a = 1$; 3) $0 < a < 1$; 4) $a = 0$.

1) При $a > 1$ графики выглядят следующим образом.



Графики пересекаются в одной точке: $(1; 0)$, т.е. при $a > 1$ $x = 1$.

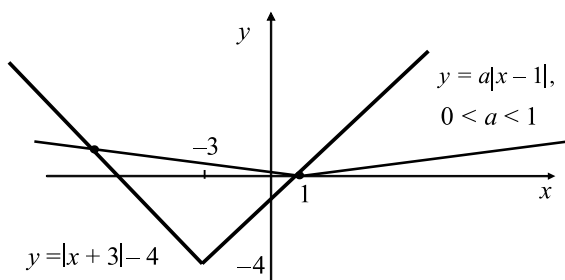
2) При $a = 1$ графики выглядят следующим образом.



При $x > 1$ графики совпадают, т.е. система имеет бесконечно много решений.

При $a = 1$ решением уравнения будет промежуток $[1; +\infty)$.

3) При $0 < a < 1$ графики выглядят следующим образом.



Графики пересекаются в двух точках. Одна точка имеет координаты $(1; 0)$.

Чтобы найти координаты второй точки, надо решить систему

$$\begin{cases} |x + 3| - 4 = a|x - 1|, \\ x < -3. \end{cases}$$

Так как $x < -3$, то модули выражений раскрываются следующим образом:

$$|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3; \quad |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1.$$

Осталось решить уравнение:

$$\begin{aligned} -x - 3 - 4 &= a(-x + 1), \\ ax - x &= a + 7, \\ x(a - 1) &= a + 7. \end{aligned}$$

Так как $0 < a < 1$ (поэтому $a \neq 1$), то $x = \frac{a+7}{a-1}$.

Итак, при $0 < a < 1$ $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$.

4) При $a = 0$ график $y = a|x - 1|$ совпадает с осью абсцисс и уравнение имеет два решения. Решения можно найти из уравнения $|x + 3| - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} |x + 3| &= 4 \\ x + 3 &= 4 \text{ или } x + 3 = -4 \\ x &= 1 \text{ или } x = -7 \end{aligned}$$

При $a = 0$ уравнение имеет два корня: 1 и -7 .

Ответ: при $a > 1$ $x = 1$; при $a = 1$ $x \geq 1$; при $0 < a < 1$ $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$; при $a = 0$ $x = 1$ и $x = -7$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЧАСТЬ I

1. При каком значении параметра a корнем уравнения $x - a = 0$ является число 4?

Ответ: _____.

2. При каком значении параметра a корнем уравнения $5x - a = 0$ является число 4?

Ответ: _____.

3. При каком значении параметра a корнем уравнения $x^2 - 2x - a = 0$ является число 4?

Ответ: _____.

4. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 = a$ не имеет решений?

Ответ: _____.

5. При каком значении параметра a уравнение $0x = a$ имеет бесконечно много решений?

Ответ: _____.

6. При каком значении параметра a уравнение $0x = a$ не имеет решений?

Ответ: _____.

7. При каком значении параметра a сократима дробь $\frac{x-2}{x-a}$?

Ответ: _____.

ЧАСТЬ II

Задания на 2 балла

8. При каком значении параметра a уравнение $ax = 3$ не имеет решений?

9. При каком значении параметра a уравнение $ax = 1 - x$ не имеет решений?

10. При каком значении параметра a уравнение $ax^2 = 0$ имеет бесконечно много решений?

11. При каком значении параметра a уравнение $\frac{x}{x-a} = 0$ не имеет решений?

12. При каких значениях параметра a неравенство $ax > 8$ имеет бесконечно много решений?

13. При каком значении параметра a неравенство $ax > 8$ не имеет решений?

14. При каких значениях параметра a сократима дробь $\frac{x^2-25}{x-a}$?

15. При каких значениях параметра a сократима дробь $\frac{x^2-a}{x-5}$?

16. При каких значениях параметра a сократима дробь $\frac{x^2-x-2}{x-a}$?

17. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 16 = 0$ имеет два различных корня ?

18. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 16 = 0$ имеет два корня?

19. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 16 = 0$ не имеет корней?

Задания на 3 балла

20. При каком значении параметра a уравнение $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6$ имеет бесконечно много решений?

21. При каком значении параметра a уравнение $(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6$ не имеет решений ?

22. При каком значении параметра a неравенство $2ax < 1 - x$ выполняется для любых значений x ?

23. При каком значении параметра a неравенство $x \cdot a^2 < a + x$ не имеет решений?

24. При каком значении параметра a неравенство $x \cdot a^2 < a + x$ выполняется для любых значений x ?

25. При каком значении параметра a уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$ имеет бесконечно много решений?

26. При каком значении параметра a уравнение $2a(a - 2)x = a - 2$ не имеет решений?

27. При каких значениях параметра a неравенство $2a(a - 2)x < a - 2$ не имеет решений?

28. При каких значениях параметра a неравенство $2a(a - 2)x \geq a - 2$ имеет бесконечно много решений?

29. При каких значениях параметра a неравенство $2a(a - 2)x \geq a - 2$ выполняется для любых значений x ?

30. При каких значениях параметра b уравнение $(2b - 5)x^2 - 2(b - 1)x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

31. При каких значениях параметра b уравнение $(2b - 5)x^2 - 2(b - 1)x + 3 = 0$ имеет два различных корня?

32. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 2ax + 1 < 0$ не имеет решений?

33. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $x^2 + 2ax + 1 \leq 0$ является отрезок?

34. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $x^2 + 2ax + 1 \leq 0$ состоит из одной точки?

35. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - (a + 2)x + 8a + 1 > 0$ выполняется при всех значениях x ?

36. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - (a + 2)x + 8a + 1 > 0$ не имеет решений?

37. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет отрицательные корни.

38. Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет корни разных знаков.

39. Найдите все значения параметра p , при которых разность корней уравнения $2x^2 - px + 1 = 0$ равна 1.

40. Найдите все значения параметра p , при которых отношение корней уравнения $x^2 + px + 2 = 0$ равно 2.

41. Найдите все значения параметра a , при которых оба корня уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$ лежат в промежутке $(1; 4)$.

42. Найдите все значения параметра a , при которых 4 разделяет корни уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$.

43. Найдите все значения параметра a , при которых оба корня уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$ больше 4.

44. Найдите все значения параметра a , при которых оба корня уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$ отрицательны.

45. Найдите все значения параметра a , при которых разность корней уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$ равна 4.

46. Найдите все значения параметра a , при которых отношение корней уравнения $x^2 - ax + 4 = 0$ равно 4.

47. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a + y - 0,5a^2x = 0, \\ 8x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

48. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a + y - 0,5a^2x = 0, \\ 8x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений?

49. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a + y - 0,5a^2x = 0, \\ 8x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задания на 4 балла

50. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 4ax - 3 \leq 0$ выполняется при всех значениях x ?

51. При каком значении параметра a неравенство $ax^2 + (2a - 3)x + a \geq 0$ не имеет решений?

52. Найдите все значения параметра a , при которых 2 разделяет корни уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$.

53. При каких значениях параметра a уравнение $|x - 1| + |x - 3| = a$ имеет бесконечно много решений?

54. При каких значениях параметра a уравнение $|x - 1| + |x - 3| = a$ не имеет решений?

55. При каких значениях параметра a уравнение $|x - 1| + |x - 3| = a$ имеет ровно два решения?

56. Укажите число решений уравнения

$$a|x + 3| - 2|x - 1| = 2$$

в зависимости от a при $a > 0$.

Тема 13. Планиметрия

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

a, b, c — стороны треугольника.

α, β, γ — углы треугольника, $\angle A$ — угол, лежащий против стороны a , $\angle B$ — угол, лежащий против стороны b , $\angle C$ — угол, лежащий против стороны c .

h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные из вершин, соответственно на стороны a, b и c .

R — радиус окружности, описанной около треугольника.

r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

P — периметр треугольника, p — полупериметр треугольника.

S — площадь многоугольника или круга

C — длина окружности.

Треугольники

Медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

Каждая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

$$S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{формула Герона})$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (\text{теорема синусов})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{теорема косинусов})$$

Прямоугольный треугольник

(a -катет, b -катет, c -гипотенуза)

В прямоугольном треугольнике $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора).

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы: $R = \frac{c}{2}$.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° .

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы.

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Равнобедренный треугольник

Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

В равнобедренном треугольнике три отрезка — высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, равны.

Четырехугольники

d_1 и d_2 — диагонали четырехугольника.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle(d_1, d_2)$$

Параллелограмм

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.

Противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны.

$S = ah_a$, $S = ab \sin(\angle a, b)$, где a и b — смежные стороны параллелограмма, h_a — высота, проведенная к стороне a .

Прямоугольник

Имеет все свойства параллелограмма.

Диагонали прямоугольника равны.

$S = ab$, где a и b — смежные стороны прямоугольника.

Ромб

Имеет все свойства параллелограмма.

Все стороны ромба равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.

Квадрат

Имеет все свойства прямоугольника.

Стороны квадрата равны.

Диагонали квадрата перпендикулярны и равны.

Трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — основания трапеции,} \\ h \text{ — ее высота.}$$

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Круг и окружность

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2, \text{ где } r \text{ — радиус круга.}$$

$$C = 2\pi r, \text{ где } r \text{ — радиус окружности.}$$

Вписанные углы

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

Вписанный четырехугольник

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° .

Описанный четырехугольник

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Свойства параллельных прямых

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180° .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ (С КОММЕНТАРИЯМИ, РЕШЕНИЯМИ, ОТВЕТАМИ)

Правильный треугольник

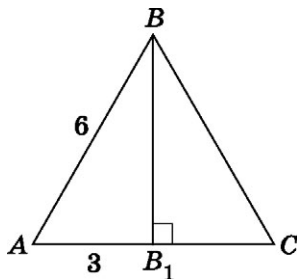
Задание 1. Дан правильный треугольник со стороной 6. Найдите:

1) периметр; 2) высоту; 3) площадь; 4) радиус вписанной окружности; 5) длину вписанной окружности; 6) площадь вписанного круга; 7) радиус вписанной окружности; 8) длину вписанной окружности; 9) площадь вписанного круга; 10) площадь четырехугольника OA_1CB_1 .

Решение.

1) Периметр треугольника равен сумме всех его сторон:
 $P = 6 + 6 + 6 = 18$.

2) Все высоты в равностороннем треугольнике равны.
Найдем, например, высоту BB_1 из треугольника ABB_1 .



По теореме Пифагора:

$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = 6^2 - 3^2 = 27.$$

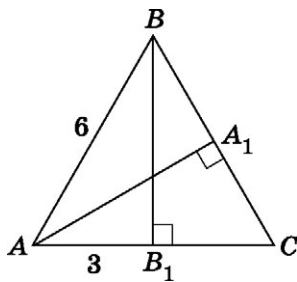
$$BB_1 = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}.$$

3) Найдем площадь треугольника, зная длину стороны AC , и проведенную к ней высоту BB_1 :

$$S_{ABC} = 0,5 \cdot AC \cdot BB_1 = 0,5 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

4) В равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают. Центром окружностей является точка пересечения медиан, биссектрис и высот. Радиусом вписанной окружности является

$$OB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$



5) Длина вписанной окружности C равна $2\pi r$, где $r = OB_1 = \sqrt{3}$. $C = 2\sqrt{3}\pi$.

6) Площадь вписанного круга S равна πr^2 , где $r = OB_1 = \sqrt{3}$. $S = \pi (\sqrt{3})^2 = 3\pi$.

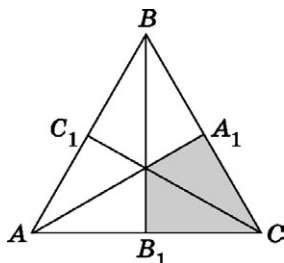
7) В равностороннем треугольнике центр описанной окружности — это точка пересечения медиан, биссектрис и высот, поэтому радиусом описанной окружности является $OB = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

8) Длина описанной окружности C равна $2\pi R$, где $R = OB = 2\sqrt{3}$. $C = 4\sqrt{3}\pi$.

9) Площадь описанного круга равна πR^2 , поэтому $S = \pi (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$.

10) Медианы треугольника, пересекаясь, образуют шесть треугольников равных по площади, поэтому

$$S_{OBC_1} = \frac{1}{6} S_{ABC}.$$



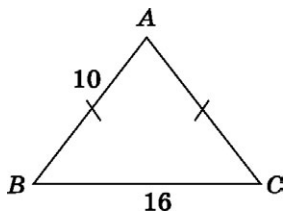
Найдем площадь четырехугольника OA_1CB_1 :

$$S_{OA_1CB_1} = 2S_{OBC_1} = 2 \cdot \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{2}{6} \cdot 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Равнобедренный треугольник

Задание 2. Дан равнобедренный треугольник с основанием 16 и боковой стороной 10. Найдите:

- 1) площадь;
- 2) радиус описанной окружности;
- 3) радиус вписанной окружности;
- 4) определите вид угла A ;
- 5) высоту, проведенную к боковой стороне;
- 6) медиану, проведенную к боковой стороне.

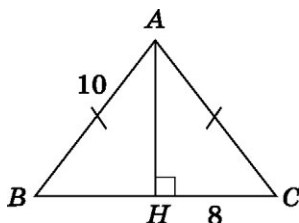


Решение.

1) Проведем высоту AH к основанию BC . Найдем AH по теореме Пифагора из треугольника AHC :

$$AH = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 16 = 48.$$



Площадь треугольника можно найти и по формуле Герона. Периметр треугольника равен $P = 10 + 10 + 16 = 36$, поэтому полупериметр равен 18.

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \sqrt{18 \cdot (18 - 10) \cdot (18 - 10) \cdot (18 - 16)} = \\ &= \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} = 6 \cdot 8 = 48. \end{aligned}$$

2) Радиус описанной окружности R найдем, используя

формулу для площади треугольника $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$.

$$\text{Получим: } R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{10 \cdot 16 \cdot 10}{4 \cdot 48} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

3) Радиус вписанной окружности r найдем, используя формулу для площади треугольника $S_{ABC} = p \cdot r$, где

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 16 + 10}{2} = 18 \text{ и } S = 48. \text{ Имеем:}$$

$$r = \frac{48}{18} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

4) Найдем вид угла A . По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A,$$

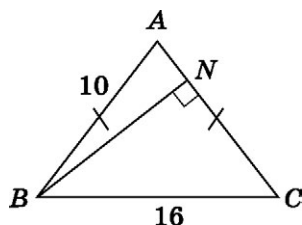
$$16^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \angle A,$$

$$\cos \angle A = \frac{200 - 256}{200} = -0,28.$$

Получили, что $\cos \angle A < 0$, значит $\angle A$ — тупой.

5) Для нахождения высоты, проведенной к боковой стороне, воспользуемся следующей формулой для площади треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BN \cdot BN = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 48}{10} = 9,6.$$



6) Найдем длину медианы BM , проведенной к стороне AC . Найдем $\cos \angle ACB$ из треугольника ACH : $\cos \angle ACB = 0,8$.

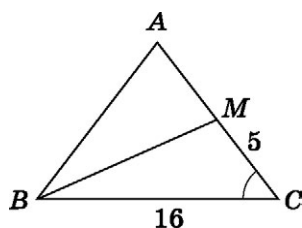
По теореме косинусов

$$BM^2 = BC^2 + MC^2 - 2BC \cdot MC \cdot \cos \angle ACB,$$

$$BM^2 = 16^2 + 5^2 - 2 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 0,8,$$

$$BM^2 = 153,$$

$$BM = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}.$$

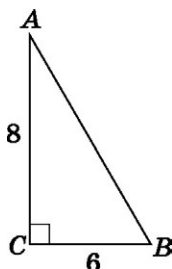


Прямоугольный треугольник

Задание 3. Дан прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите:

- 1) периметр;
- 2) площадь;
- 3) радиус описанного круга;
- 4) радиус вписанной окружности;

- 5) тригонометрические функции меньшего угла;
- 6) высоту, проведенную к гипотенузе;
- 7) медиану, проведенную к гипотенузе;
- 8) биссектрису большего угла.



Решение.

1) Найдем третью сторону (гипотенузу). По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100. \quad AB = 10.$$

Найдем периметр треугольника $P = 6 + 8 + 10 = 24$.

2) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, т.е.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24.$$

3) Центр описанной окружности около прямоугольного треугольника является серединой гипотенузы, поэтому радиус описанной окружности равен половине гипотенузы:

$$R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

4) Радиус вписанной окружности r найдем, используя формулу для площади треугольника $S_{ABC} = p \cdot r$, где

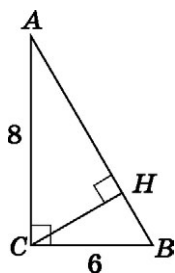
$$p = \frac{AB + BC + AC}{2}. \quad \text{Получим, } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{24}{12} = 2.$$

5) В исходном треугольнике меньшей стороной является катет BC , поэтому меньшим углом треугольника является угол A .

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10}, \quad \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10},$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} \angle A = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

6) Для нахождения высоты, проведенной к гипотенузе, выразим площадь треугольника через гипотенузу и высоту CH : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH$. Зная площадь, найдем CH :



$$CH = \frac{2S_{ABC}}{AB}, \quad CH = \frac{2 \cdot 24}{10} = 2,8.$$

7) Так как в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, то $CM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.

8) Для нахождения длины биссектрисы CL прямого угла C , используем свойство биссектрисы угла треугольника:

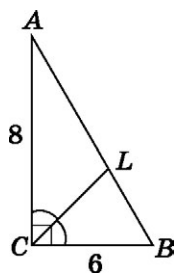
$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$3AL = 4LB.$$

С другой стороны, $AL + LB = 10$.

Решим систему

$$\begin{cases} 3AL = 4LB, \\ AL = 10 - LB; \end{cases} \quad \begin{cases} 3(10 - LB) = 4LB, \\ AL = 10 - LB; \end{cases} \quad \begin{cases} 7LB = 30, \\ AL = 10 - LB. \end{cases}$$



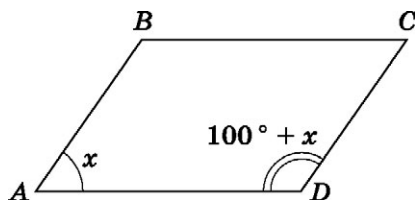
Получим $AL = \frac{40}{7}$, а $BL = \frac{30}{7}$.

По теореме синусов из треугольника CLB :

$$\frac{CL}{\sin \angle B} = \frac{LB}{\sin \angle LCB}, \quad CL = \frac{LB \cdot \sin \angle B}{\sin \angle LCB} = \frac{\frac{30}{7} \cdot 0,8}{\sin 45^\circ} = \frac{24\sqrt{2}}{7}.$$

Параллелограмм

Задание 4. Разность углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма равна 100° . Найдите углы параллелограмма.



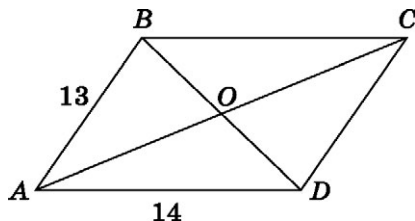
Решение.

1) Пусть меньший угол параллелограмма равен x , тогда больший угол равен $100^\circ + x$. Так как сумма углов, прилежащих к одной стороне, в параллелограмме равна 180° , то $x + 100^\circ + x = 180^\circ$ и $x = 40^\circ$.

2) Больший угол параллелограмма равен 140° .

Ответ: 40° и 140° .

Задание 5. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O и $AB = 13$, $AD = 14$, $BD = 15$.



Найдите:

- 1) площадь параллелограмма;
- 2) площадь треугольника ABO ;
- 3) высоты параллелограмма.

Решение.

1) Параллелограмм разбивается диагональю BD на два треугольника, равных по площади. Площадь треугольника ABD можно найти по формуле Герона или следующим образом. Рассмотрим треугольник ABD . Опустим высоту BT к стороне AD . Введем обозначения $AT = x$, $TD = 14 - x$. С помощью теоремы Пифагора выразим высоту BT из двух полученных прямоугольных треугольников:

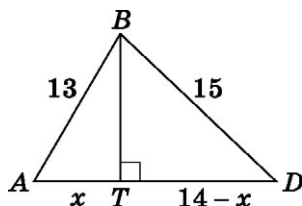
$$BT^2 = 169 - x^2 \text{ и } BT^2 = 225 - (14 - x)^2.$$

Составив равенство, найдем x , а затем и высоту BT .

$$169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2,$$

$$28x = 140, x = AT = 5.$$

Из треугольника ABT найдем BT : $BT^2 = 169 - 25$, $BT = 12$.



Найдем площадь треугольника ABD :

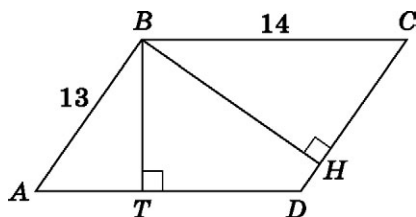
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14 = 84.$$

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 168.

2) Диагонали параллелограмма $ABCD$ разбивают его на четыре равновеликих треугольника, поэтому площадь треугольника ABO в четыре раза меньше площади параллелограмма: $S_{ABO} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = 42$.

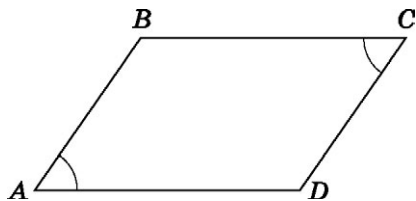
3) Одна высота параллелограмма уже найдена: $BT = 12$.

Для нахождения другой высоты параллелограмма BH , воспользуемся формулой площади параллелограмма, связанной с высотами.



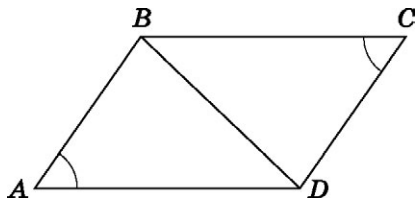
$$S_{ABCD} = BH \cdot DC, \quad 168 = BH \cdot 13, \quad BH = 12\frac{12}{13}.$$

Задание 6. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $\angle A = \angle C$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.



Доказательство

1) Докажем, что $BC \parallel AD$. Проведем диагональ BD и докажем равенство углов ADB и DBC .



2) Из треугольника ADB :

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle BAD - \angle ABD \quad (1)$$

3) Из треугольника DBC :

$$\angle DBC = 180^\circ - \angle BCD - \angle BDC \quad (2)$$

4) $\angle BAD = \angle BCD$ по условию, а $\angle ABD = \angle BDC$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и DC и секущей BD .

5) Из (1) и (2) следует, что $\angle ADB = \angle DBC$, поэтому $BC \parallel AD$ (по признаку параллельности прямых).

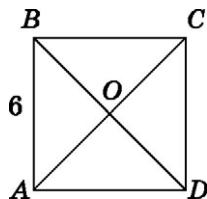
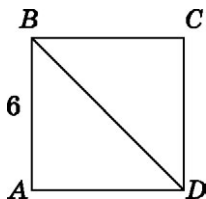
6) Имеем: $AB \parallel CD$ (по условию) и $BC \parallel AD$ (по доказанному), значит, $ABCD$ — параллелограмм по определению.

Квадрат

Задание 7. В квадрате со стороной 6 найдите: 1) диагональ; 2) радиус описанной окружности; 3) площадь описанного круга; 4) радиус вписанной окружности; 5) длину вписанной окружности.

Решение.

1) Диагональ квадрата найдем из треугольника ABD по теореме Пифагора: $BD^2 = AB^2 + AD^2$, $BD^2 = AB^2 + AD^2$, $BD = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.



2) В квадрате центры описанной и вписанной окружностей совпадают с точкой пересечения диагоналей. Радиус описанной окружности R равен половине диагонали:

$$R = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

3) Найдем площадь описанного круга:

$$S = \pi R^2 = \pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = 18\pi.$$

4) Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата:

$$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

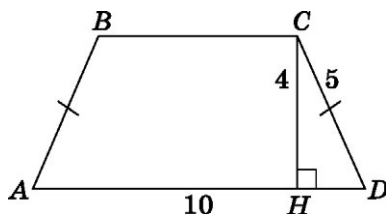
5) Найдем длину вписанной окружности

$$C = 2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi.$$

Трапеция

Задание 8. Боковые стороны равнобедренной трапеции равны 5. Высота трапеции равна 4, а большее основание равно 10. Найдите:

- 1) среднюю линию трапеции;
- 2) площадь трапеции.



Решение.

1) Средняя линия трапеции (L) равна полусумме оснований, значит, требуется найти меньшее основание BC . Для этого выполним дополнительное построение — опустим высоту трапеции из вершины B .

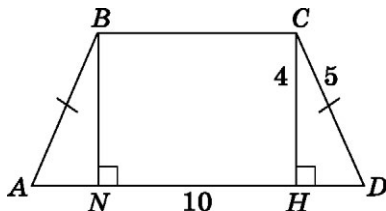
Две высоты равнобедренной трапеции разбивают трапецию на три фигуры: два равных прямоугольных треугольника и прямоугольник $BNHC$. Меньшее основание трапеции $BC = 10 - 2 \cdot HD$. Найдем HD по теореме Пифагора из треугольника CHD : $HD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Получим, что $BC = 10 - 2 \cdot 3 = 4$.

Найдем среднюю линию трапеции

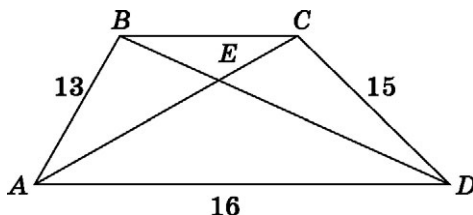
$$L = \frac{BC + AD}{2} = \frac{4 + 10}{2} = 7.$$

2) Площадь трапеции равна

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CH = \frac{4 + 10}{2} \cdot 4 = 28.$$



Задание 9. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 16, BC = 2$. Боковые стороны трапеции равны 13 и 15. Диагонали трапеции пересекаются в точке E . Найдите: 1) среднюю линию трапеции; 2) высоту; 3) площадь; 4) площади треугольников BEC и AED ; 5) площади треугольников ABE и CDE .



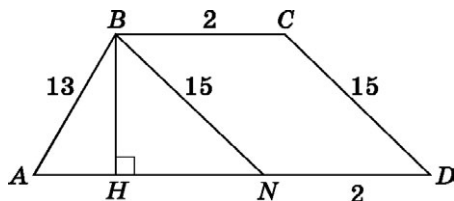
Решение.

1) Средняя линия трапеции (L) равна полусумме оснований трапеции:

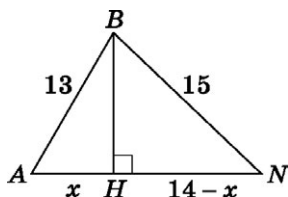
$$L = \frac{BC + AD}{2} = \frac{2 + 16}{2} = 9.$$

2) Чтобы найти высоту исходной неравносторонней трапеции, используем дополнительное построение: проведем отрезок BN , параллельный CD . Отрезок BN разбивает трапецию на две части: параллелограмм $BCDN$ и треугольник ABN .

Высота треугольника ABN , опущенная из вершины B , равна высоте исходной трапеции.



Найдем высоту треугольника ABN .



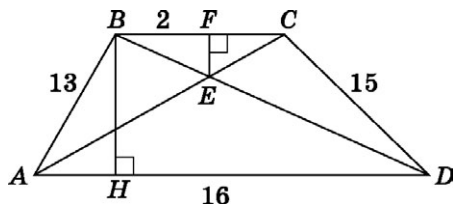
Из треугольника ABH по теореме Пифагора $BH^2 = 13^2 - x^2$.

Из треугольника BHN по теореме Пифагора $BH^2 = 15^2 - (14 - x)^2$.

$$15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2, \quad x = 5 \text{ и } BH = 12.$$

3) Найдем площадь трапеции:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = 9 \cdot 12 = 108.$$



4) Треугольники BEC и AED подобны с коэффициентом

подобия $k = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, поэтому $S_{BEC} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 S_{AED}$.

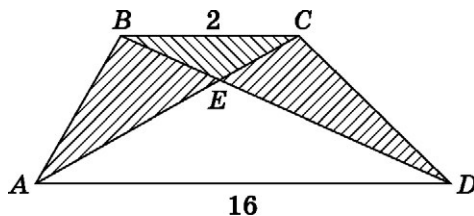
Чтобы найти площадь треугольника BEC достаточно найти высоту, проведенную из вершины E . Так как коэффициент подобия треугольников BEC и AED равен $\frac{1}{8}$, то высота EF треугольника BEC составляет $\frac{1}{8}$ от высоты треугольника AED и $\frac{1}{9}$ от высоты трапеции BH .

$$FE = \frac{1}{9} \cdot 12 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \text{ значит, } S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Получим: } S_{AED} = \left(\frac{8}{1}\right)^2 \cdot S_{BEC} = 64 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{3} = 85\frac{1}{3}.$$

5) Треугольники ABE и CDE равновелики. Треугольники ABE и BEC имеют общую высоту, проведенную из вершины B , значит, их площади относятся как соответствующие основания, т.е.

$$\frac{S_{ABE}}{S_{BEC}} = \frac{AE}{EC} = \frac{16}{2} = 8.$$



Так как $S_{BEC} = \frac{4}{3}$, то

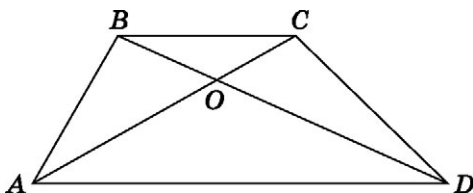
$$S_{ABE} = \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \text{ и } S_{CDE} = 10\frac{2}{3}.$$

Задание 10. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O .

Докажите:

1) треугольники BOC и DOA подобны;

2) $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{AD}$.

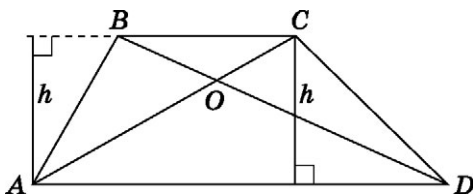


Доказательство:

1) Для доказательства подобия треугольников найдем пары равных углов.

$\angle BOC = \angle AOD$ (как вертикальные),

$\angle CBO = \angle ADO$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD), поэтому треугольники BOC и DOA подобны по первому признаку подобия треугольников.

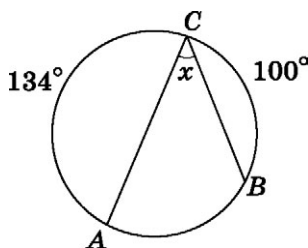


2) Треугольники ABC и ACD имеют равные высоты

(h), поэтому $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{0,5 \cdot BC \cdot h}{0,5 \cdot AD \cdot h} = \frac{BC}{AD}$.

Центральные и вписанные углы

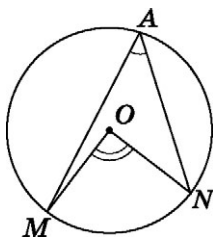
Задание 11. По данным рисунка найдите угол x .



Решение.

Угол ABC является вписанным, поэтому его градусная мера равна половине градусной меры дуги AB , на которую он опирается. Градусная мера дуги AB равна $360^\circ - (134^\circ + 100^\circ) = 360^\circ - 234^\circ = 126^\circ$, поэтому $x = 63^\circ$.

Задание 12. Центральный угол MON на 50° больше вписанного угла, опирающегося на дугу MN . Найдите каждый из этих углов.



Решение.

Вписанный угол $\angle MAN$ и центральный $\angle MON$ угол опираются на одну и ту же дугу MN , поэтому

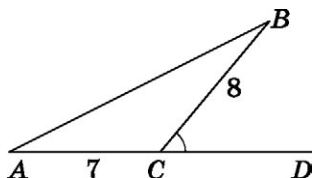
$$\angle MAN = \frac{1}{2} \angle MON. \text{ По условию } \angle MON = \angle MAN + 50^\circ.$$

Получим, что $\angle MON = \frac{1}{2} \angle MON + 50^\circ$, значит, $\angle MON = 100^\circ$ и $\angle MAN = 50^\circ$.

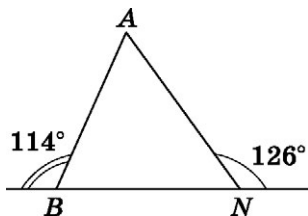
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЧАСТЬ I

1. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 7$, $BC = 8$, $\angle DCB = 30^\circ$.



2. Найдите площадь треугольника ABN , если $AB = 7$, $AN = 8$.



3. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 64° .

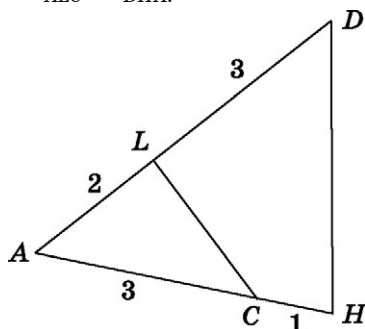
4. Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 64° .

5. Две стороны треугольника равны 5 и 10. Высота, проведенная к большей из них, равна 4. Найдите площадь треугольника.

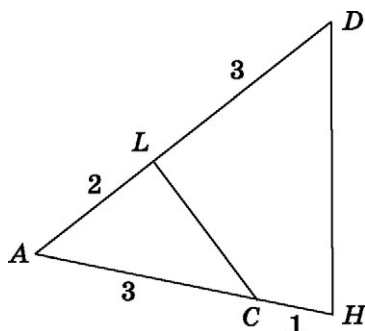
6. Две стороны треугольника равны 6 и 12. Высота, проведенная к меньшей из них, равна 4. Найдите площадь треугольника.

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) CD — биссектриса угла C , $AC = 2\sqrt{3}$, $\angle CAD = 15^\circ$. Найдите длину AD .

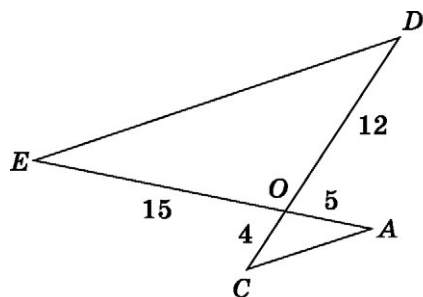
8. На сторонах треугольника ADH взяты точки L и C так, что $AL = 2$, $LD = 3$, $AC = 3$, $CH = 1$. Найдите отношение площадей $S_{ALC} : S_{DHA}$.



9. На сторонах треугольника ADH взяты точки L и C так, что $AL = 2$, $LD = 3$, $AC = 3$, $CH = 1$. Найдите отношение площадей $S_{ALC} : S_{DLCH}$.



10. На двух пересекающихся прямых взяты четыре точки так, что $EO = 15$, $OD = 12$, $OC = 4$, $OA = 5$. Найдите отношение площадей $S_{EDO} : S_{ACO}$.



11. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 90° , боковая сторона равна 4. Найдите длину медианы, проведенной к этой стороне.

12. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 60° , боковая сторона равна 4. Найдите длину высоты, проведенной к этой стороне.

13. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120° , боковая сторона равна 4. Найдите длину высоты, проведенной к этой стороне.

14. Найдите высоту правильного треугольника со стороной 12.

15. Найдите площадь правильного треугольника со стороной 12.

16. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 12.

17. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 12.

18. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 12.

19. Найдите меньшую высоту равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 12.

20. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 12.

21. Найдите периметр прямоугольного треугольника с катетами 12 и 16.

22. Дан прямоугольный треугольник с катетами 12 и 16. Найдите косинус меньшего угла треугольника.

23. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 12 и 16.

24. В равнобедренном треугольнике с основанием 16 и боковой стороной 10 найдите высоту, проведенную к основанию.

25. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 16 и боковой стороной 10.

26. В равнобедренном треугольнике с основанием 16 и боковой стороной 10 найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

27. В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 20, а косинус угла при основании треугольника равен 0,8. Найдите основание треугольника.

28. Середины сторон правильного треугольника последовательно соединены отрезками. Найдите сторону исходного треугольника, если сторона полученного треугольника равна 4.

29. Середины сторон правильного треугольника последовательно соединены отрезками. Найдите биссектрису исходного треугольника, если сторона полученного треугольника равна 3.

30. Середины сторон правильного четырехугольника последовательно соединены отрезками. Найдите сторону нового четырехугольника, если сторона данного четырехугольника равна $2\sqrt{2}$.

31. Середины сторон правильного четырехугольника последовательно соединены отрезками. Найдите площадь нового четырехугольника, если сторона данного четырехугольника равна 2.

32. Дан ромб с диагоналями 16 и 30. Найдите сторону ромба.

33. Дан ромб с диагоналями 16 и 30. Найдите площадь ромба.

34. Дан ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите высоту ромба.

35. Дан ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

36. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ BD . Найдите сторону AD параллелограмма, если $AB = 6\sqrt{2}$, $\angle ADB = 30^\circ$, $\angle BDC = 45^\circ$.

37. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 10 и 14.

38. Большая высота параллелограмма равна 6. Найдите площадь параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 10 и 14.

39. Найдите длину меньшей диагонали параллелограмма со сторонами $3\sqrt{3}$ и 2 и углом 30° .

40. Найдите длину большей диагонали параллелограмма со сторонами $3\sqrt{3}$ и 2 и углом 30° .

41. Дана равнобедренная трапеция, боковые стороны которой равны 10. Высота трапеции равна 6, а большее основание равно 20. Найдите меньшее основание трапеции.

42. В равнобедренной трапеции, боковые стороны равны 10, высота трапеции равна 6, а большее основание равно 20. Найдите среднюю линию трапеции.

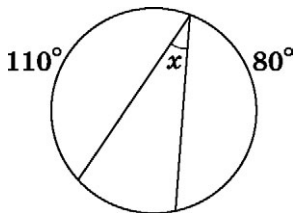
43. Найдите сумму всех внутренних углов правильного шестиугольника.

44. Найдите сумму всех внешних углов правильного шестиугольника.

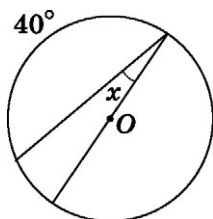
45. Найдите градусную меру внутреннего угла правильного шестиугольника.

46. Найдите градусную меру внешнего угла правильного шестиугольника.

47. По данным рисунка найдите угол x .



48. По данным рисунка найдите угол x (т. O — центр окружности).



49. Центральный угол KOC на 60° больше вписанного угла, опирающегося на дугу KC . Найдите угол KOC .

50. Центральный угол LON на 70° больше вписанного угла, опирающегося на дугу LN . Найдите этот вписанный угол.

51. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\sphericalangle MA = 12^\circ$, $\sphericalangle NB = 40^\circ$. Найдите $\sphericalangle AB$.

52. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\sphericalangle MA = 100^\circ$, $\sphericalangle NB = 100^\circ$. Найдите $\sphericalangle AB$.

53. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\sphericalangle MA = 72^\circ$, $\sphericalangle NB = 40^\circ$. Найдите хорду AB , если радиус окружности равен 12.

54. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\sphericalangle MA = 42^\circ$, $\sphericalangle NB = 18^\circ$. Найдите хорду AB , если радиус окружности равен 12.

55. На полуокружности MN взяты точки A и B так, что $\sphericalangle MA = 72^\circ$, $\sphericalangle NB = 18^\circ$. Найдите хорду AB , если радиус окружности равен 12.

56. Хорда NT стягивает дугу, равную 120° , а хорда NA — дугу в 110° . Найдите угол ANN .

57. Хорды MN и AB окружности пересекаются в точке C . Найдите угол BCN , если $\sphericalangle MA = 72^\circ$, $\sphericalangle NB = 18^\circ$.

58. Укажите номера **неверных** утверждений:

1) Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

2) Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

3) Если углы вертикальные, то они равны;

4) Если углы равны, то они являются вертикальными.

59. Укажите номера неверных утверждений:

1) Котангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

2) Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

3) Любой равнобедренный треугольник является равносторонним;

4) Любой равносторонний треугольник является равнобедренным;

60. Укажите номера верных утверждений:

1) Любой прямоугольник является квадратом;

2) Любой квадрат является прямоугольником;

3) Если треугольники имеют равные площади, то треугольники равны;

4) Если треугольники равны, то они имеют равные площади.

61. Укажите номера неверных утверждений:

1) Любой параллелограмм является прямоугольником;

2) Любой прямоугольник является параллелограммом;

3) Если сумма двух углов равна 180° , то они являются смежными;

4) Если углы смежные, то их сумма равна 180° .

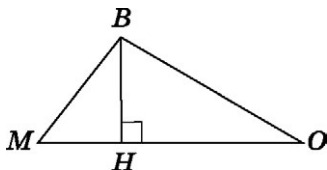
ЧАСТЬ II

Задания на 4 балла

62. В треугольнике со сторонами 7, 9 и 14 найдите длину медианы, проведенной к большей стороне.

63. Найдите длину окружности, вписанной в треугольник со сторонами 20, 20, 24.

64. В треугольнике MBO $BO = 5$, $OH = 4$, радиус окружности, описанной около треугольника MBO равен 10. Найдите MB .



65. В треугольнике MNP сторона MN не длиннее 12, сторона NP не длиннее 5, а его площадь не меньше 30. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника MNP .

66. Сторона правильного шестиугольника равна 8. Найдите меньшую диагональ шестиугольника.

67. В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность. $BC = 12$, $AD = 16$. Найдите диаметр окружности, если $CD = 15$.

68. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 11$, $BC = 4$. Боковые стороны трапеции равны 20 и 15. Найдите площадь трапеции.

69. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 11$, $BC = 4$. Боковые стороны трапеции равны 20 и 15. Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника BOC .

70. Даны координаты двух вершин треугольника MXN : $M(0; 4)$ и $N(4; 6)$. Найдите координаты третьей вершины X , если известно, что точка X лежит на прямой b , заданной уравнением $y = x$, и треугольник MXN имеет наименьший периметр.

71. Найдите площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна $8\sqrt{2}$ и составляет с основанием угол 45° .

72. Одна из диагоналей прямоугольной трапеции делит эту трапецию на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Найдите площадь этой трапеции, если меньшая боковая сторона трапеции равна 2.

Задания на 3 балла

73. Отрезки KE и OP пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle KOE = \triangle EPK$.

74. Отрезки KE и OP пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $S_{KOE} = S_{PEO}$.

75. В четырехугольнике $ABCD$ $BC \parallel AD$ и $\angle B = \angle D$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

76. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle BDC$ и $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

77. Докажите, что если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник — равнобедренный.

78. Докажите, что если биссектриса треугольника совпадает с его высотой, то треугольник равнобедренный.

79. Хорды AB и CK — диаметры окружности. Докажите, что хорды AK и BC равны.

80. Хорды AB и CK — диаметры окружности. Докажите, что $\angle BAK = \angle BCK$.

81. Отрезки OB и CK пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые OC и BK параллельны.

82. Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что биссектрисы соответственных углов параллельны.

83. Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

84. В разностороннем треугольнике ABC (AC — большая сторона) проведены высота AH и биссектриса AD . Докажите, что угол между высотой и биссектрисой равен полуразности углов B и C .

85. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

УКАЗАНИЯ

Тема 1. Числа и выражения. Преобразование выражений

1.1. ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

17. Представьте каждое слагаемое суммы в виде степени 2. Смотрите также решение типового задания № 3.

18. Преобразуйте выражение к виду $3^7 - 3^4 - 3^6$. Смотрите также решение типового задания № 3.

19. Произведение делится и на 2, и на 5. См. решение типового задания № 6.

20. См. решение типового задания № 11.

21. См. решение типового задания № 11.

22. Разложите числа 180 и 270 на простые множители. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. См. также решение типового задания № 13.

23. Разложите числа 180 и 270 на простые множители. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. См. также решение типового задания № 12.

24. Разложите числа 168 и 450 на простые множители. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. См. также решение типового задания № 13.

25. Разложите числа 168 и 450 на простые множители. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. См. также решение типового задания № 12.

26. Найдите наибольший общий делитель чисел 660 и 924, для этого разложите эти числа на простые множители. $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. См. также решение типового задания № 12.

27. Найдите наибольший общий делитель чисел 462 и 990, для этого разложите эти числа на простые множители. $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. См. также решение типового задания № 12.

28. **Простым числом** называется такое натуральное число, которое имеет только два натуральных делителя: 1 и само это число.

29. $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

30. Рассмотрите последовательные натуральные степени числа 3, попробуйте выяснить закономерность. См. также решение типового задания № 8.

31. Так как остаток от деления некоторого натурального числа x на 16 равен 9, то его можно записать в виде $x = 16n + 9$, где n — некоторое натуральное число. Далее число x можно представить следующим образом $x = 4(4n + 2) + 1$. См. также решение типового задания № 9.

32. Так как остаток от деления некоторого натурального числа x на 4 равен 1, то его можно записать в виде $x = 4n + 1$, где n — некоторое натуральное число. Далее число n можно представить в виде $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$, где k — некоторое натуральное число. См. также решение типового задания № 10.

33. Так как остаток от деления некоторого натурального числа a на 12 равен 7, то его можно записать в виде $a = 12n + 7$, где n — некоторое натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned} a^2 - 2a + 5 &= (12n + 7)^2 - 2(12n + 7) + 5 = \\ &= 144n^2 + 144n + 36 + 4. \end{aligned}$$

34. Так как остаток от деления некоторого натурального числа a на 5 равен 2, а другого натурального числа — равен 4, то эти числа можно записать в виде $x = 5n + 2$, $y = 5m + 4$, где n и m — некоторые натуральные числа. Тогда $x + y = 5n + 5m + 5 + 1$.

35. Так как остаток от деления некоторого натурального числа a на 5 равен 2, а другого натурального числа — равен 4, то эти числа можно записать в виде

$x = 5n + 2$, $y = 5m + 4$, где n и m — некоторые натуральные числа. Тогда

$$x \cdot y = (5n + 2) \cdot (5m + 4) = 25mn + 10m + 20n + 5 + 3.$$

36. Представьте выражение в виде $5^4 \cdot 29$.

37. Так как число делится на 2, то последняя цифра в записи этого числа равна 2. Теперь надо учесть признак делимости на 3.

38. Приписав справа и слева одинаковую цифру к числу 14, мы должны получить число, сумма цифр которого делится на 3.

39. Найдите наименьшее общее кратное чисел 48 и 60.

40. $220 = 19,5 \cdot 11 + 5,5$.

41. Найдите наибольший общий делитель чисел 120, 280, 320.

42. Любое натуральное число можно представить в следующем виде: $4n$, или $4n + 1$, или $4n + 2$, или $4n + 3$, где n — некоторое натуральное число. В первом случае при возведении в квадрат получаем остаток 0, во втором — 1, в третьем — 0, в четвертом — 1.

43. Рассмотрите делимость на 2 левой и правой частей уравнения.

44. Так как остаток от деления некоторого натурального числа x на 6 равен 3, то его можно записать в виде $x = 6n + 3$, где n — некоторое натуральное число. Так как остаток от деления некоторого натурального числа x на 15 равен 6, то его можно записать в виде $x = 15k + 6$, где k — некоторое натуральное число.

Имеем систему:

$$\begin{cases} x = 6n + 3 & \left| \begin{array}{l} \times, 5 \\ \times, 4 \end{array} \right| \\ x = 15k + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 30n + 15, \\ 4x = 60k + 24. \end{cases}$$

Почленно вычтем из первого уравнение второе:

$$x = 30(n - 2k) + 11.$$

45. Представьте уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 7$. Так как 7 — простое число, то уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

46. Представьте уравнение в виде $xy + 3x = y + 3 + 5$. Далее $(x - 1)(y + 3) = 5$, и учтите, что 5 — простое число.

47. Стоимость всех шоколадок должна быть кратной 3, но число 2009 не кратно 3.

48. Учитывая неравенство треугольника, получите, что длина искомой стороны удовлетворяет неравенству $8 < x < 10$.

49. Рассмотрите выражение $\frac{x + 5}{x + 1}$. Выделите целую часть $\frac{x + 5}{x + 1} = 1 + \frac{4}{x + 1}$. Получите, что выражение $x + 1$ должно делиться на 4.

50. При нумерации страниц от 1 до 10 цифра 3 встречается один раз; от 11 до 20 — один раз (13); от 21 до 30 — два раза (23 и 30) и т.д.

1.3. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

38. Подставьте значения x и a в выражение $\frac{x - a}{xa}$.

39. Подставьте значения x и y в выражение $\frac{5^4 x^{12}}{5^4 y^4}$.

40. Подставьте значения x и y в выражение $\frac{81y^4}{16x^2}$.

1.4. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ. КОРЕНЬ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

33. Рассмотрите квадрат выражения $3 - \sqrt{2}$.

34. Представьте выражение в виде $\sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{3^9} \cdot \sqrt[3]{5^3}$.

35. Вынесите общий множитель $\sqrt{3}$.

36. См. решение типового задания № 3, № 4.

37. При вычислении значения выражения $\sqrt{62,5^2 - 58,5^2}$ примените формулу разности квадратов.

38. При вычислении значения выражения $\sqrt{484 - 2 \cdot 22 \cdot 13 + 169}$ примените формулу квадрата разности.

39. Представьте каждое число в виде арифметического квадратного корня, или числа ему противоположного. И сравните подкоренные выражения.

40. Представьте каждое число в виде корня третьей степени. И сравните подкоренные выражения.

41. Представьте выражение $6 - 2\sqrt{5}$ в виде квадрата разности, т.е. $6 - 2\sqrt{5} = (1 - \sqrt{5})^2$, и извлеките корень, не ошибаясь при использовании свойства (4).

42. Используйте следующее равенство:
 $(2 + \sqrt{6})^2 = 10 + 2\sqrt{6}$.

43. Представьте каждое число в виде арифметического квадратного корня или числа, ему противоположного. И сравните подкоренные выражения.

44. Возведите выражение в квадрат.

45. Приведите дроби к общему знаменателю. В числителе используйте формулы квадрата разности и квадрата суммы, а в знаменателе — формулу разности квадратов.

46. Приведите дроби к общему знаменателю. В числителе используйте формулы квадрата разности и квадрата суммы, а в знаменателе — формулу разности квадратов. См. также решение типового задания № 12.

47. Используйте свойство (4). См. решение типового задания № 9.

48. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе, для этого и числитель, и знаменатель дроби умножьте на $\sqrt{3} + 1$.

49. В знаменателе дроби вынесите общий множитель $\sqrt{30}$ и сократите дробь на $\sqrt{30}$. Далее избавьтесь от иррациональности в знаменателе, умножив и числитель, и знаменатель на $\sqrt{3} + \sqrt{10}$.

50. В числителе сгруппируйте слагаемые по два. См. также решение типового задания № 11.

51. И числитель, и знаменатель дроби умножьте на $\sqrt{8 - \sqrt{63}}$. См. также решение типового задания № 8.

52. И числитель, и знаменатель дроби умножьте на $\sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}$. См. также решение типового задания № 8.

53. Представьте каждое подкоренное выражение виде квадрата и не ошибайтесь в применении свойства (4). См. также решение типового задания № 13.

54. Представьте подкоренное выражение $4 + 2\sqrt{3}$ в виде квадрата суммы, т.е. $4 + 2\sqrt{3} = (? + \sqrt{3})^2$.

55. Представьте подкоренное выражение $34 - 24\sqrt{2}$ в виде квадрата разности. Для этого возведите выражение $4 - 3\sqrt{2}$ в квадрат.

56. Возведите $2\sqrt{6} - 5$ в квадрат и обратите внимание на подкоренное выражение. Представьте подкоренное выражение в виде квадрата разности и, не забывая свойства (4), закончите решение.

57. Рассмотрите выражение $(\sqrt{3} + 1)^3$.

58. Возведите выражение $\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ сначала в квадрат.

59. Избавьтесь от иррациональности в каждой дроби.

60. Действуйте последовательно. Сначала выражение $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ приведите к общему знаменателю, затем приведите

к общему знаменателю выражение $1 - \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ и т. д.

61. Действуйте последовательно. Сначала рассмотрите выражение $\frac{1}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$. Выделите в знаменателе квадрат

суммы. Далее избавьтесь от иррациональности в знаменателе и, наконец, возведите выражение $2 - \sqrt{3}$ в куб.

62. В первых скобках приведите выражения к общему знаменателю. В числителе приведите подобные слагаемые и выделите полный квадрат. Аналогично преобразуйте выражение во вторых скобках.

1.5. ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

33. Сгруппируйте слагаемые в выражении следующим образом $(x^3 + y^3) - (xy^2 + x^2y)$. В первых скобках примените формулу суммы кубов, во вторых — вынесите общий множитель xy .

34. Сгруппируйте слагаемые в выражении следующим образом: $(9x^2 - 12xy + 4y^2) + (3x - 2y)$. В первых скобках примените формулу квадрата суммы.

35. Сгруппируйте слагаемые в выражении следующим образом: $(2p + 3m) + (4p^2 - 9m^2)$. Во вторых скобках примените формулу разности квадратов.

36. В числителе используйте формулу разложения на множители квадратного трехчлена (см. решение типового задания № 8). В знаменателе вынесите общий множитель.

37. В числителе используйте формулу квадрата суммы, а в знаменателе сгруппируйте слагаемые следующим образом: $(6ax + 2x) - (3a + 1)$ и вынесите за скобки общий множитель $(3a + 1)$.

38. В числителе используйте группировку и вынесите за скобки общий множитель $(y - 1)$. См. также решение типового задания № 5.

39. В числителе примените формулу разности кубов. В знаменателе — квадрата суммы.

40. Сначала разложите на множители числитель и знаменатель каждой дроби. В числителе первой дроби примените формулу квадрата суммы. В числителе второй дроби — разности квадратов.

41. Сначала разложите на множители числитель и знаменатель каждой дроби. В числителе первой дроби обратите внимание на число слагаемых. Это подскажет вам

прием разложения на множители. В знаменателе второй дроби примените формулу разложения квадратного трехчлена на множители. В случае затруднения смотрите решение типового задания № 10.

42. Приведите дроби к общему знаменателю, учтите, что $(m - 1)^3 = -(1 - m)^3$.

43. Разложите на множители числитель дроби, применив формулу разности кубов, и сократите дробь на общий множитель $(4 + 2 \cdot 3^n + 9^n)$.

44. В числителе первой дроби используйте формулу разности квадратов, а в знаменателе второй дроби — суммы кубов.

45. В первых скобках приведите к общему знаменателю. Получите $\frac{9}{3 - \sqrt{x}}$. Во вторых скобках примените формулу квадрата разности.

46. *1-й способ.* Введите новую переменную $a = x^2$ и разложите квадратный трехчлен $a^2 + a - 2$ на множители. *2-й способ.* Представьте выражение в виде $x^4 + x^2 - 1 - 1$ и используйте группировку.

47. Выражение состоит из шести слагаемых. Сгруппируйте их по три и вынесите общий множитель (например, в первых скобках сгруппируйте все слагаемые, содержащие p^2).

48. Выражение состоит из шести слагаемых. Сгруппируйте их по три и вынесите общий множитель (например, в первых скобках сгруппируйте все слагаемые, содержащие m^2).

49. Выполняйте действия последовательно и аккуратно. В первых скобках сначала разложите на множители и числитель, и знаменатель первой дроби, а затем приведите дроби к общему знаменателю $x + 3$.

50. Сначала преобразуйте множитель $\frac{5}{1 + 4x^{-1}}$, заменив отрицательный показатель степени на положительный. Далее избавьтесь от двухэтажности в знаменателе. В слу-

чае затруднений смотрите решение типового задания № 11. В скобках, прежде чем приводить дроби к общему знаменателю, разложите на множители знаменатели каждой дроби.

51. В первой дроби и в числителе, и в знаменателе раскройте скобки и примените группировку. Во второй дроби примените формулу разности квадратов.

52. В числителе выделите степени чисел 5 и 3. Получите: $9 \cdot 75^n = 3^{n+2} \cdot 5^{2n}$.

53. В числителе вынесите общий множитель 2^{n-1} . Получите: $2^{n+2} - 2^{n-1} = 2^{n-1}(8 - 1)$.

54. Введите новую переменную $a = \sqrt{n}$ и сократите дробь $\frac{a^2 + a - 12}{3 - a}$.

55. Введите новую переменную $a = \sqrt{x}$. В числителе первой дроби используйте формулу разности квадратов, а в знаменателе второй дроби — разности кубов.

56. В первых скобках разложите на множители знаменатели каждой дроби, для этого вынесите множитель \sqrt{y} . Выражение в скобках тождественно выражению $\frac{2\sqrt{7}}{y-7}$, $y > 0$. В выражении $\frac{49 - 14y + y^2}{2\sqrt{7}y}$ выделите в числителе квадрат разности.

57. Не торопитесь с решением. Внимательно посмотрите на выражение в скобках и сравните его с выражением $a^2 - 4a + 4$, которое представляет собой квадрат разности.

58. Используйте следующее свойство: для любого действительного числа x : $\sqrt{x^2} = |x|$. Смотрите также решение типового задания № 12.

59. Выполните следующую замену: $a = \sqrt{x-9}$. Выразите переменную x через переменную a и подставьте в исходное выражение. Смотрите также решение типового задания № 13.

60. Примените в знаменателе первой дроби формулу $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, а в знаменателе второй дроби примените формулу суммы кубов.

61. Примените в знаменателе первой дроби формулу для любых a и b и произвольного нечетного натурального числа n :

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

где $a = m, b = 1$, а в знаменателе второй дроби примените формулу разности кубов.

62. Сначала выразите x через y из соотношения

$$\left(\frac{2x - y}{3x + y}\right)^{-1} = 0,25, \text{ т.е. } \left(\frac{2x - y}{3x + y}\right)^{-1} = 0,25 \Leftrightarrow \left(\frac{3x + y}{2x - y}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{и } x = y.$$

Подставьте $x = y$ в выражение $\frac{x^3 - 4x^2y + 5xy^2 - y^3}{x^3 - 6y^3}$.

63. Рассмотрите произведение

$$(\sqrt{19 - a} + \sqrt{10 - a}) \cdot (\sqrt{19 - a} - \sqrt{10 - a})$$

и примените формулу разности квадратов.

64. Рассмотрите произведение

$$(\sqrt{74 - a^4} - \sqrt{10 - a^4}) \cdot (\sqrt{74 - a^4} + \sqrt{10 - a^4}).$$

65. Рассмотрите квадрат выражения

$$\sqrt{6 + a^2} + \sqrt{10 - a^2}.$$

66. Попробуйте представить каждое подкоренное выражение в виде квадрата, для этого введите новую переменную $b = \sqrt{a}$. В случае затруднений смотрите решение типового задания № 13.

67. Разложите на множители числитель дроби, дополнив его до квадрата суммы. Далее примените в числителе формулу разности квадратов.

68. Преобразуйте выражение $\frac{1}{a} + \frac{a+1}{2}$. Получите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{2} = 3. \text{ Далее рассмотрите } \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{2}\right)^2.$$

69. Разложите на множители числитель дроби. Для этого преобразуйте выражение $(x + 10)(x + 20)(x + 30)(x + 40)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} & (x + 10)(x + 20)(x + 30)(x + 40) = \\ & = (x + 10)(x + 40)(x + 20)(x + 30) = \\ & = (x^2 + 50x + 400)(x^2 + 50x + 600). \end{aligned}$$

И введите новую переменную $t = x^2 + 50x + 500$.

70. Преобразуйте числитель дроби, сгруппировав первое и последнее слагаемые и применив формулу разности квадратов. Далее получите:

$$\frac{(x^4 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} - x^{16} + 1)}{x^{64} + x^{32} + 1}.$$

Теперь уже сгруппируйте первые два слагаемых и т.д.

71. Примените формулу

$$x^{12} - 1 = (x - 1)(x^{11} + x^{10} + \dots + x + 1).$$

Эта формула непосредственно следует из формулы

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Тема 2. Уравнения

25. 1-й способ. Решите каждое уравнение в отдельности. Корнями первого уравнения будут числа $\frac{2}{3}$ и 8. Второго —

8 и 2. **2-й способ.** Решите сначала одно уравнение, а затем его корни подставьте в другое уравнение.

26. См. решение типового задания № 13.

27. См. решение типового задания № 13.

28. См. решение типового задания № 11.

29. Вычислите дискриминант уравнения.

30. Приведите дробные выражения к общему знаменателю и перенесите число 3 в левую часть.

31. См. решение типового задания № 10.

32. См. решение типового задания № 10.

33. См. решение типового задания № 12.

34. Уравнение имеет один корень, если $D = 0$.

35. Примените теорему Виета и найдите другой корень уравнения. Он равен (-3) .

36. Введите новую переменную $a = x^2 + 3x$ и решите уравнение $a^2 - a - 12 = 0$. Корни исходного уравнения 1; -4 .

37. См. замечание к решению типового задания № 11.

38. Выражение $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$ разложите на множители и примените теорему Виета. Не забудьте, что теорема Виета применяется для приведенного квадратного уравнения.

39. В выражении $x_1^2 + x_2^2$ выделите полный квадрат, т.е. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ и примените теорему Виета. См. решение типового задания № 6.

40. См. решение типового задания № 14.

41. Уравнение $x^2 - b = 0$ имеет единственное решение $x = 0$ при $b = 0$. Уравнение $\frac{x^2 - b}{x - 6} = 0$ имеет единственное решение еще в одном случае: корень знаменателя является корнем числителя, т.е. при $b = 36$.

42. Уравнение $x^2 - 36 = 0$ имеет два корня 6 и (-6) , поэтому исходное уравнение имеет единственное решение только в одном случае: корни числителя являются корнями знаменателя.

43. Уравнение $x^2 - bx + 4 = 0$ имеет единственное решение при $D = 0$. Уравнение $\frac{x^2 - bx + 4}{x - 6} = 0$ имеет единственное решение еще в одном случае: корень знаменателя является корнем числителя.

44. Уравнение имеет различные корни, если $D > 0$. Уравнение имеет отрицательные корни, если

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a < 0, \\ x_1 x_2 = 2a + 24 > 0. \end{cases}$$

Окончательно имеем промежуток $(-12; -4)$.

45. Функция $f(x) = x^2 - (a + 7)|x| + a^2 - 5a$ является четной, поэтому, чтобы уравнение имело нечетное число корней (в данном случае — три), необходимо, чтобы один из корней был равен 0. Получаем, что $a = 0$ или $a = 5$. Проверкой убеждаемся, что оба эти значения a подходят.

46. Функция $f(x) = x^4 - 745x^2 + 97344 = 0$ является четной, поэтому уравнение имеет корни $\pm 13; \pm 24$.

47. Вынесите общий множитель. Уравнение

$$x^2 - 2ax - (2a - 3) = 0$$

имеет два различных корня при $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. Чтобы исходное уравнение имело три различных корня, надо, чтобы нуль не был корнем уравнения $x^2 - 2ax - (2a - 3) = 0$, т.е.

$$0^2 - 2a \cdot 0 - (2a - 3) \neq 0.$$

48. Введите новую переменную $a = x^2 + 5x$.

49. Сгруппируйте первое и четвертое, второе и третье слагаемые. Приведите их к общему знаменателю и получите один из корней — $(-2, 5)$.

50. Введите новую переменную $m = \frac{x-2}{2x^2-x}$.

51. Рассмотрите первый множитель $x^2 - 2x + 7$. Докажите, что он принимает значения большие или равные 6. Рассмотрите второй множитель $x^2 + 6x + 11$. Докажите, что он принимает значения большие или равные 2. Из этого следует, что левая часть уравнения больше или равна 12.

52. См. решение типового задания № 15.

Тема 3. Системы уравнений

14. Умножьте и первое, и второе уравнение на 12 и приведите подобные слагаемые.

15. *1-й способ.* Метод подстановки. Выразите из первого уравнения x или y и подставьте во второе уравнение. *2-й способ.* Рассмотрите второе уравнение и попробуйте «увидеть» формулу квадрата суммы. Только не забудьте, что уравнение $a^2 = 25$ имеет два решения.

16. Преобразуйте второе уравнение системы. Перенесите все слагаемые в левую часть и примените формулу квадрата разности.

17. Удобнее решать систему методом сложения. Получаем, что $x^2 = 25$, $y^2 = 4$ и исходная система распадается на четыре системы.

18. При сложении уравнений получите, что $x^2 = 25$. Далее исходная система распадается на четыре системы.

19. Сложите уравнения и получите, что $x^2 = 25$. Система имеет четыре решения.

20. Решите систему методом сложения, при этом получите квадратное уравнение $x^2 + x - 6 = 0$.

21. См. решение типового задания № 5.

22. См. решение типового задания № 4.

23. Рассмотрите первое уравнение системы. Получите возможное решение системы $(5; -2)$. Проверьте, удовлетворяет ли эта пара чисел второму уравнению системы.

24. Во втором уравнении примените формулу разности квадратов и замените выражение $x^2 + y^2$ числом 13.

25. См. решение типового задания № 8.

26. См. решение типового задания № 8.

27. Умножьте второе уравнение на 3 и сложите с первым уравнением. Далее примените формулу куба суммы. Получите, что $x + y = 1$.

28. Сумма квадратов двух выражений равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из выражений равно нулю. Учитывая это утверждение, получите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$$

29. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$

30. Сложите все три уравнения системы и получите $x + y + z = 6$. Теперь из этого уравнения последовательно вычитайте каждое уравнение исходной системы.

31. Перемножьте все три уравнения системы и получите $(xyz)^2 = 36$.

32. Рассмотрите первое уравнение системы. Попробуйте «увидеть» сумму квадратов двух выражений.

33. См. решение типового задания № 9.

34. Сложите уравнения системы. Получите уравнение $x^2 + x - b - 1 = 0$. Квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю.

Тема 4. Неравенства

20. Раскройте скобки и получите неравенство $-0,5n > 5$.

21. Решите двойное неравенство $0 < 3 - 2t < 2$.

22. Из первого неравенства системы получите $x > -1,4$. Из второго неравенства: $x > 1$.

23. Решением первого неравенства является промежуток $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. Решением второго неравенства — отрезок $[-3; 3]$.

24. Корни уравнения — (-1) и (-3) . Решение неравенства — промежуток $(-\infty; -1)$. Произведите отбор корней, принадлежащих этому промежутку.

25. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые. Получите $2 \geq -2$.

26. См. решение типового задания № 7.

27. См. решение типового задания № 7.

28. Уравнение имеет корни 1 и 2. Решением неравенства является промежуток $(-\infty; 1,5)$.

29. Решением линейного неравенства при $a \neq 0$ является луч. А если $a = 0$?

30. Вынесите общий множитель. Исходное неравенство равносильно неравенству $(2x - 1)(2x - 4) < 0$, которое можно решить методом интервалов. См. решение типового задания № 8.

31. Рассмотрите первый множитель. Приведите слагаемые к общему знаменателю. Определите знак множителя $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - 4}{2}$. Для этого сравните числа $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ и 4. Или $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ и 4^2 .

32. Решение первого неравенства $(2\sqrt{3}; +\infty)$. Решение второго — $(-\infty; 4\sqrt{2}]$.

33. См. решение типового задания № 8.

34. Так как $(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geq 0$, то исходное неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} x - 4 \geq 0, \\ x - 4 < 7. \end{cases}$$

35. Так как $(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geq 0$, то исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x + 4 \geq 0, \\ x + 4 < \frac{x}{2}. \end{cases}$$

36. См. решение типового задания № 7.

37. Область определения можно найти из системы

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0; \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

38. Решите неравенство методом интервалов. Для этого решите уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. Отметьте корни на координатной прямой и используйте правило чередования знаков.

39. См. решение типового задания № 9.

40. Решите неравенство методом интервалов. Для этого решите уравнение $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$. Отметьте корни на координатной прямой, один из них будет корнем двойной кратности. См. решение типового задания № 9.

41. Разделите на коэффициент при x и освободитесь от иррациональности в знаменателе. Получите: $x \leq 3 + 2\sqrt{2}$.

42. Введите новую переменную $a = \sqrt{x}$. Решите квадратное неравенство $a^2 - 5a + 4 > 0$. Вернитесь к переменной x . Осталось решить неравенства $\sqrt{x} < 1, \sqrt{x} > 4$.

43. См. решение типового задания № 10.

44. См. решение типового задания № 10.

45. См. решение типового задания № 11.

Тема 5. Прямоугольная система координат на плоскости

5.1. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ, ПАРАБОЛЫ И ГИПЕРБОЛЫ

20. Смотрите решение типового задания № 3.

21. Смотрите решение типового задания № 3.

22. Ветви параболы направлены вниз ($a < 0$), ордината точки пересечения с Oy отрицательна ($c < 0$). Абсцисса вершины отрицательна, значит $-\frac{b}{2a} < 0$. Определите знак коэффициента b .

23. Смотрите решение задачи № 22.

24. Смотрите решение типового задания № 5.

25. Смотрите решение типового задания № 5.

26. Смотрите решение типового задания № 5.

27. Найдите ординаты точек пересечения графиков функций.

28. Запишите уравнение прямой, проходящей через две точки. Проверьте, принадлежит ли третья точка этой прямой.

29. Уравнение прямой имеет вид $y = 3x + b$. Найдите b .

30. Уравнение прямой имеет вид $y = 2x + b$. Найдите b .

31. Найдите коэффициенты k и b . Для этого подставьте координаты каждой точки в общее уравнение.

32. Смотрите решение типового задания № 4.

33. Смотрите решение типового задания № 4.

34. Смотрите решение типового задания № 6.

35. Смотрите решение типового задания № 6.

36. Смотрите решение типового задания № 8. Заметим, что коэффициент c задан в условии, и коэффициент a должен быть положительным.

37. Смотрите решение типового задания № 8. Выражение $a - b + c > 0$ можно прочитать как $y(-1) > 0$. Во всяком случае коэффициент $c > 0$.

38. Смотрите решение типового задания № 10.

39. Смотрите решение типового задания № 9.

40. Смотрите решение типового задания № 9.

41. Смотрите решение типового задания № 9.

42. Смотрите решение типового задания № 9. Ветви параболы направлены вниз, значит $a < 0$.

43. Смотрите типовое задание № 7.

44. Смотрите типовое задание № 7. Обратите внимание на область определения уравнения.

45. Смотрите типовое задание № 7. Разложите на множители левую часть уравнения, применив формулы сокращенного умножения.

46. Смотрите типовое задание № 7. Замените уравнение двумя следующими уравнениями: $x^2 + y^2 - 6 = 2$ и $x^2 + y^2 - 6 = -2$.

5.2. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

13. Преобразуйте уравнение к виду $x^2 + y^2 = 121$.

14. См. решение типового задания № 4. Уравнение окружности имеет вид $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

15. См. решение типового задания № 4. Уравнение окружности имеет вид $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 1$.

16. См. решение типового задания № 4.

17. График первого из уравнений постройте в каждой из четырех координатных четвертей — это квадрат с диагональю, равной $4\sqrt{2}$. График второго уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $2\sqrt{2}$.

18. График первого из уравнений постройте в каждой из четырех координатных четвертей — это квадрат с диагональю, равной $4\sqrt{2}$. График второго уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2.

19. График первого из уравнений постройте в каждой из четырех координатных четвертей — это квадрат с диагональю, равной 16. График второго уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 7.

20. Графиками уравнений являются парабола с вершиной в точке $(-1; 1)$, пересекающая ось Oy в двух точках, и окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3.

21. Графиками уравнений являются парабола с вершиной в точке $(0; 6)$, ветви которой направлены вправо, и окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2.

22. Графиками уравнений являются парабола с вершиной в точке $(-16; 0)$, пересекающая ось Oy в точках $(0; 2)$ и $(0; -2)$, и окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 10.

23. Подставим координаты точек в общее уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Получим три уравнения с тремя неизвестными: a , b , R . Найдем эти неизвестные, решив систему из трех уравнений.

24. См. решение типового задания № 5.

25. Подставьте координаты точек в общее уравнение окружности и найдите координаты центра окружности. Обратите внимание на то, что через две произвольные точки можно провести две различные окружности данного радиуса.

26. См. указание к решению предыдущего задания.

27. Перенесите все члены уравнения в одну часть и используйте формулу разности квадратов.

28. Используйте замену $a^3 = 64$, значит $a = 4$.

29. Используйте условие равенства нулю произведения и постройте множества точек, которые задает каждый множитель.

30. Используйте условие равенства нулю дроби. Постройте множество точек, задаваемых числителем, и исключите из него множество точек, задаваемых знаменателем.

Тема 6. Функции

8. Смотрите решение типового задания № 4.

9. Смотрите решение типового задания № 4.

10. Смотрите решение типового задания № 4.

11. Смотрите решение типового задания № 4.

12. Смотрите решение типового задания № 5.

13. После преобразования выражения $y = \frac{x^2 + x}{x}$ получим $y = x + 1$, $x \neq 0$.

14. Смотрите решение типового задания № 5.

15. Смотрите решение типового задания № 5.

16. Смотрите решение типового задания № 5.

17. Преобразуйте выражение к виду квадратного трехчлена.

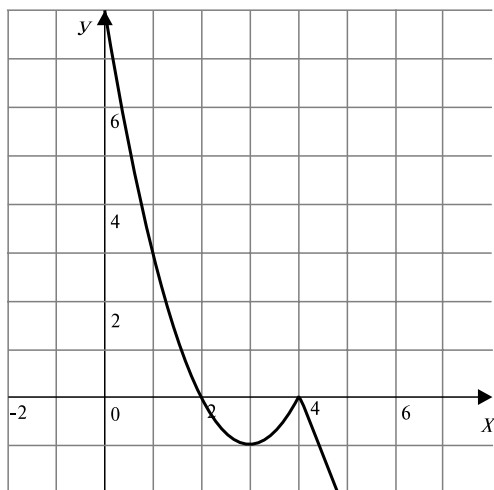
18. Смотрите решение типового задания № 6.

19. Смотрите решение типового задания № 6.

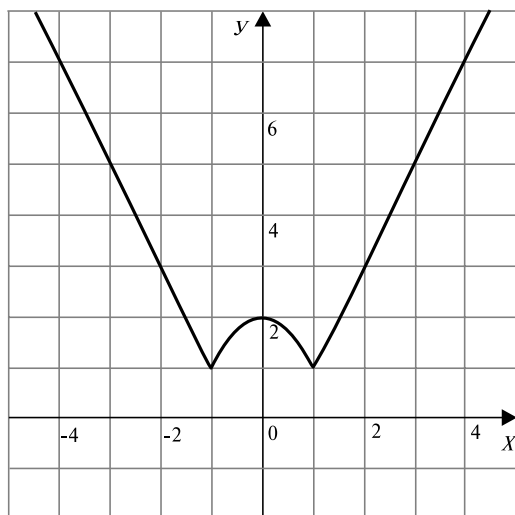
20. Функцию можно задать формулой $y = x + 3$, где $x \neq 3$. Графиком функции является прямая $y = x + 3$ без точки с абсциссой, равной 3.

21. Функцию можно задать формулой $y = x - 2$, где $x \neq 2,5$. Графиком функции является прямая $y = x - 2$ без точки с абсциссой, равной $-2,5$.

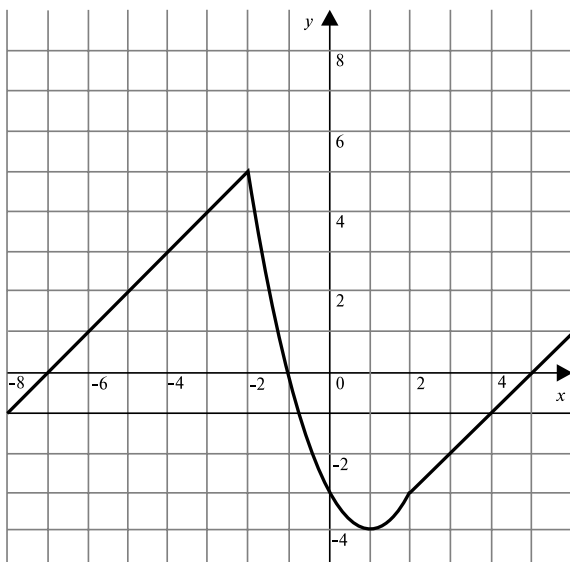
22. Смотрите решение типового задания № 7.



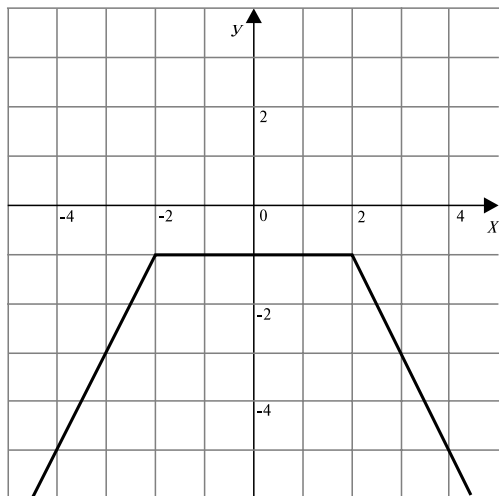
23. Смотрите решение типового задания № 7.



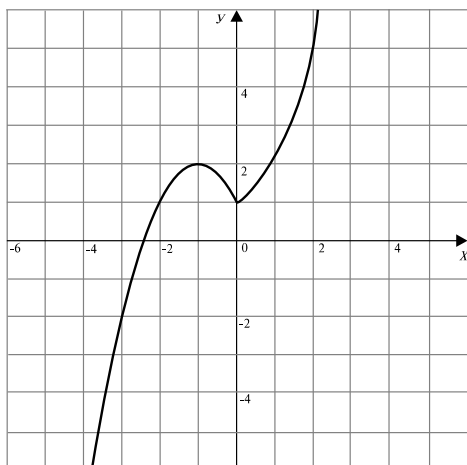
24. Смотрите решение типового задания № 7.



25. Смотрите решение типового задания № 7.



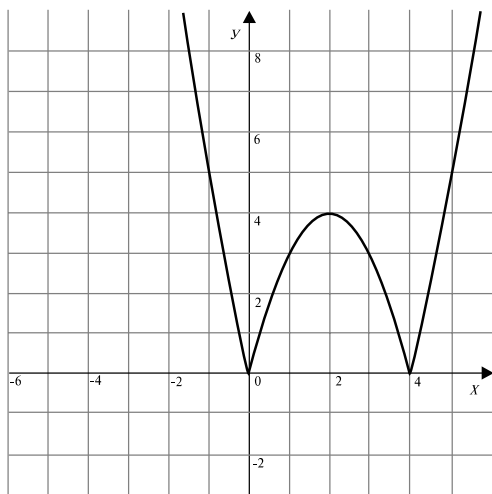
26. Смотрите решение типового задания № 7.



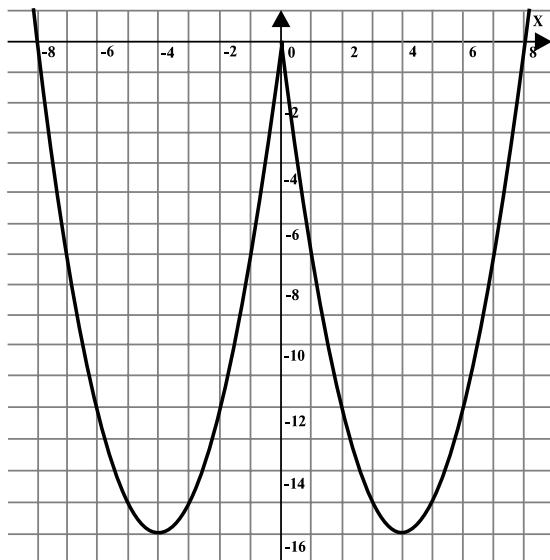
27. Смотрите решение типового задания № 9.

28. Смотрите решение типового задания № 9. Графику функции принадлежат, например, точки $(1; 2)$, $(0; -1)$, $(-3; 0)$, $(-2; -2)$ и т. д.

29. Смотрите решение типового задания № 8. При $m > 4$ и $m = 0$ — две общих точки, при $m = 4$ — три общих точки, при $m < 0$ — нет общих точек.



30. Смотрите решение типового задания № 8.



Тема 7. Арифметическая и геометрическая прогрессии

15. Пусть $AB = a_1$, тогда $AC = a_1 + d$ и $BC = a_1 + 2d$. Периметр треугольника ABC равен $AB + AC + BC = 3a_1 + 3d$ или 36, поэтому $a_1 + d = 12$.

16. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, найдите a_4 , а затем по формуле n -ого члена и a_1 , и d .

17. $b_3 = b_1 q^2$, значит, $q^2 = 3$. Выразите b_5 через b_3 .

18. Используйте характеристическое свойство арифметической прогрессии или см. решение типового задания № 9.

19. См. решение типового задания № 4. $a_{41} = 0$ не является отрицательным членом прогрессии.

20. Запишите формулу n -ого члена. Получите неравенство $a_n < 0$, $n < 41$.

21. Найдите a_4 , используя характеристическое свойство арифметической прогрессии. Далее найдите разность прогрессии.

22. Имеем: $a_1 = 3$ и $a_5 = 48$. Используйте формулу n -ого члена.

23. См. решение типового задания № 10.

24. См. решение типового задания № 7.

25. Запишите формулу n -ого члена для a_2, a_8, a_{11} . Получите: $a_1 + 6d = 23$.

26. Используйте формулу n -ого члена. Найдите член прогрессии, наиболее близкий к нулю. Для этого определите последний отрицательный и первый положительный член прогрессии. См. также решение типового задания № 4.

27. См. решение типового задания № 4.

28. Используйте формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии. Получите: $b_1 \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^7 - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = 85$.

29. Получите систему уравнений:
$$\begin{cases} a_1 + d = -2, \\ (a_1 + 3d)(a_1 + 4d) = 8. \end{cases}$$

Систему можно решить методом подстановки. См. также решение типового задания № 5.

30. Найдите последний отрицательный член прогрессии, для этого решите неравенство $a_n < 0$. Получите, что $n < 51$.

31. Используйте свойство средней линии треугольника и средней линии трапеции. Получите арифметическую прогрессию: 10; 20; ... 60.

32. Используйте формулу n -ого члена для b_3 и для b_2 . Получите уравнение на q : $q^2 - q - 2 = 0$. Почему один из корней уравнения является посторонним?

33. Используя характеристическое свойство геометрической прогрессии, найдите b_4 . Получите два значения b_4 , и, соответственно, два значения d . Задача имеет два решения.

34. Выразите b_{14} через b_{12} . Далее выразите b_{16} через b_{14} .

35. Используйте характеристическое свойство арифметической прогрессии для нахождения a_{35} . Затем найдите разность прогрессии.

36. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} b_1 + b_4 = 27, \\ b_2 \cdot b_3 = 72. \end{cases}$$

Преобразуйте второе уравнение и получите, что $b_1 \cdot b_4 = 72$. Система имеет два решения, но одно из них является посторонним.

37. См. решение типового задания № 12.

38. 1-й способ. Найдите S_{28} и S_{19} . Искомая сумма равна $S_{28} - S_{19}$.

2-й способ. Найдите a_{20} и a_{28} . Получите конечную арифметическую прогрессию: 83; ...; 115 и найдите сумму ее членов.

39. Рассмотрите арифметическую прогрессию (a_n) :
2; 4; 6 ...

Запишите формулу n -го члена и решите неравенство $a_n < 110$.

40. Представьте и числитель, и знаменатель в виде степени с натуральным показателем. В числителе — $x^{1+2+\dots+17}$. В знаменателе — $x^{1+3+\dots+17}$. Найдите сумму членов конечных арифметических прогрессий: 1; 2; ...; 17 и 1; 3; ...; 17. Далее разделите степень на степень.

41. В числителе и в знаменателе представлены суммы конечных геометрических прогрессий со знаменателем 3. Найдите их.

Получите: $\frac{3^{14}-1}{3^7-1}$.

42. Пусть члены геометрической прогрессии имеют вид $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3$. Используйте характеристическое свойство арифметической прогрессии и получите систему уравнений

$$\begin{cases} 2(b_1q + 5) = b_1 + 2 + b_1q^2 + 7, \\ 2(b_1q^2 + 7) = b_1q + 5 + b_1q^3 + 7. \end{cases}$$

Раскройте скобки, приведите подобные слагаемые и сгруппируйте слагаемые, содержащие b_1 . См. также решение типового задания № 13.

43. Из первого условия получите: $a_1 = 3 - 1,5d$. Исследуйте квадратичную функцию $f(d) = (3 + 0,5d)(3 + 2,5d)$ на наименьшее значение. Для этого найдите координаты вершины параболы.

44. Примените формулу разности квадратов. Получите сумму конечной арифметической прогрессии $85 + 81 + \dots + 3$.

45. Формула n -ого члена для первой прогрессии имеет вид: $a_n = 2n + 1$; для второй — $a_m = 7m + 1$. Члены прогрессий совпадают, если $a_n = a_m$, $2n = 7m$. Так как m и n — натуральные числа, то по свойствам делимости m делится на 2, а n делится на 7. Итак, m может быть равно 2; 4; ... 10. Получаем арифметическую прогрессию с первым членом 15 и разностью 14.

46. Двухзначные натуральные числа, которые делятся на 3, таковы: 12; 15; ... 99. Их 30. Двухзначные натуральные числа, которые делятся на 4 таковы: 12; 16; ...; 96. Их 22. Двухзначные натуральные числа, которые делятся и на 3 и на 4, таковы: 12; 24; ...; 96. Их 8. Имеем: $30 + 22 - 8 \cdot 2 = 36$.

47. Все четные числа, кратные 3, имеют вид $6n$, где n — натуральное число. Сумма двухзначных чисел такого вида равна 810. Четных двухзначных чисел, кратных 3 и кратных 7, всего два: 42 и 84. Имеем:

$$810 - 42 - 84 = 684.$$

48. Любое натуральное число, которое дает при делении на 4 остаток 1, можно записать в виде $4n + 1$, где n — натуральное число. Сколько таких натуральных чисел не превосходят 150? Решите неравенство $4n + 1 < 150$. Их 37. Остается найти сумму тридцати семи членов арифметической прогрессии $a_n = 4n + 1$.

49. Запишите формулу n -ого члена для каждого, кроме первого, члена геометрической прогрессии. Получите $b_1^5 \cdot q^{10} = 243$, значит, $b_1 \cdot q^2 = 3$.

Тема 8. Текстовые задачи

24. См. решение типового задания № 5.

25. См. решение типового задания № 6.

26. См. решение типового задания № 5.

27. См. решение типового задания № 8.

28. См. решение типового задания № 4. Пусть x — объем продукции, выпущенной в январе.

29. См. решение типового задания № 4.

30. См. решение типового задания № 4.

31. Если собственная скорость лодки — x км/ч, то выразить время движения по озеру и по реке, а затем составить уравнение.

32. См. решение задачи № 31.

33. Если скорость первого пешехода — x км/ч, то скорость второго пешехода $(x + 2)$ км/ч. Движение навстречу друг другу характеризуется соотношением $\frac{S}{x + (x + 2)} = t$,

где t — время до их встречи, а S — путь сближения.

34. См. решение задачи № 33.

35. Кроме способа, описанного в указании к задаче № 33, задачу можно решить и другим способом. Пусть x км — путь, пройденный до встречи первым туристом, тогда $(44 - x)$ — путь второго до их встречи. Можно составить уравнение $\frac{44 - x}{4} = \frac{x}{4} + 1$.

36. Если x ч — время движения первого катера, то $(x - 5)$ — время второго. Скорость первого $\frac{300}{x}$, скорость второго $\frac{300}{x - 5}$.

37. См. решение задачи № 36.

38. См. решение задачи № 36.

39. Если x — производительность первой машины, тогда $(x - 4)$ — производительность второй. Найдем объем работы, выполненный первой машиной, объем работы, выполненный второй машиной, и их сумму.

40. Пусть A — объем работы, тогда производительность работы первого $\frac{A}{6}$, производительность работы второго $\frac{A}{4}$. Известна их разность.

41. Если x — время работы первого, тогда $(x - 5)$ — время работы второго. Производительность первого $\frac{1}{x}$, производительность второго $\frac{1}{x-5}$. Если учесть, что первый работал 9 дней, а второй 4, можно составить уравнение.

42. Пусть x автомобилей — норма выпуска в час, а t ч — время для производства всех автомобилей по плану. Получим первое уравнение, $x \cdot t = 90$. Завод перевыполнил план: за 3 часа произвел $3x$ автомобилей, а за оставшиеся $(t - 4)$ часов — $(t + 1)(x + 1)$ автомобилей. Так как в действительности завод выпустил 95 автомобилей, составим второе уравнение. Решим систему из двух уравнений.

43. См. решение типового задания № 17.

44. Если x — время работы первой бригады, тогда $(x - 9)$ — время работы второй. Производительность первой бригады $\frac{1}{x}$, производительность второй $\frac{1}{x-9}$. Найдем двумя способами их общую производительность: $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-9}$. Составим уравнение.

45. См. решение типового задания № 13.

46. См. решение типового задания № 9.

47. См. решение типового задания № 9.

48. См. решение типового задания № 10.

49. См. решение типового задания № 10.

50. См. решение типового задания № 9.

51. Выручка театра получается умножением числа зрителей на цену билета. Ее нужно считать дважды — до и после повышения цены билета.

52. Уравняйте цены товаров после повышения цены.

53. Пусть p — процент повышения зарплаты, тогда после первого повышения зарплата стала $(p + 100)$, а после второго: $\frac{(p+100)^2}{100}$.

54. Найдем производительность каждой швеи и их общую производительность. Зная общий объем работы (57 фартуков), можно найти время совместной работы, а затем, в соответствии с производительностью каждой швеи, найдем вклад каждой в общий объем работы.

55. См. решение задачи № 54.

56. См. решение типового задания № 14.

57. См. решение типового задания № 14. *2-й способ.* Пусть время совместной работы мастера и его ученика x ч, тогда мастер работал $(x + 9)$ ч, а ученик $(x + 25)$ ч. Можно составить уравнение относительно их производительности:

$$\left(\frac{1}{x+9} + \frac{1}{x+25} \right) = \frac{1}{x}.$$

58. См. решение типового задания № 14. *2-й способ.* Пусть время совместной работы кранов x ч, тогда первый кран работал $(x + 16)$ ч, а второй — $(x + 9)$ ч. Можно составить уравнение относительно их производительности:

$$\frac{1}{x+16} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x}.$$

59. Используйте при решении типовые задания № 10 и 16. Обозначьте массу первого сплава — x кг, а массу второго — y кг. Найдите количество двух видов чистого металла в первом и втором сплавах. Запишите общие количества первого и второго металлов и найдите их отношение. Отношение $\frac{15}{22}$ показывает, что в полученном сплаве 15 частей первого металла и 22 части второго.

Тема 11. Уравнения и неравенства с модулем

10. См. решение типового задания № 1.
11. Сравните число $4 - \sqrt{17}$ с нулем.
12. См. решение типового задания № 2.
13. См. решение типового задания № 3.
14. Решите неравенство. См. решение типового задания № 2. Решение неравенства — промежуток $(-8; 6)$. Сколько целых чисел входит в этот промежуток?
15. Решением неравенства является объединение промежутков $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
16. См. решение типового задания № 2.
17. См. решение типового задания № 3.
18. См. решение типового задания № 4.
19. См. решение типового задания № 4.
20. См. решение типового задания № 4.
21. Примените следующее свойство модуля: для любого действительного числа a $|a| \geq 0$.
22. Используйте следующее свойство модуля: для любого действительного числа a $|a| \geq 0$.
23. Примените следующее свойство модуля: для любого действительного числа a $|a| \geq 0$, причем $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.
24. См. решение типового задания № 1.
25. См. решение типового задания № 4.
26. См. решение типового задания № 4. Корни уравнения: (-1) и (-9) .
27. Решите отдельно каждое неравенство системы. Решение первого неравенства — $(-7; 5)$; второго неравенства — $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.
28. Решите отдельно каждое неравенство системы. Решение первого неравенства — $(-4; 6)$; второго неравенства — $(-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

29. См. решение типового задания № 8. Решением неравенства является отрезок $[-3; 2]$.

30. См. решение типового задания № 8.

31. См. решение типового задания № 7.

32. См. решение типового задания № 4.

33. См. решение типового задания № 5.

34. См. решение типового задания № 5.

35. См. решение типового задания № 5.

36. См. решение типового задания № 5. Решение неравенства — отрезок $[-2; 2]$.

37. 1) Если $x \geq 5$, то получите неравенство $(x - 5)(x - 3) \geq 0$, которое можно решить методом интервалов (смотрите тему «Неравенства»). Решением в случае 1) является промежуток $[5; +\infty)$. 2) Если $x < 5$, то получите неравенство $(-x + 5)(x - 3) \geq 0$. Решением в случае 2) является промежуток $[3; 5)$.

38. 1) Если $x \leq 5$, то получите неравенство $(x + 5)(x - 3) \geq 0$, которое можно решить методом интервалов (смотрите решение неравенств методом интервалов в теме «Неравенства»). Решение в случае 1) $\{-5\} \cup [3; +\infty)$. 2) Если $x < -5$, то получите неравенство $(-x - 5)(x - 3) \geq 0$. Решений в случае 2) нет.

39. См. решение типового задания № 10.

40. См. решение типового задания № 10.

41. См. решение типового задания № 9.

42. См. решение типового задания № 9.

43. См. решение типового задания № 9.

44. См. решение типового задания № 12.

45. См. замечание к решению типового задания № 12.

46. См. решение типового задания № 12.

47. Введите новую переменную $a = |x|$. Решите квадратное неравенство $a^2 + 6a - 7 \geq 0$ (смотрите решение квадратных неравенств в теме «Неравенства»). Получите, что $a \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$. Учтите, что $a \geq 0$. Вернитесь к переменной x и решите неравенство $|x| \geq 1$.

48. См. замечание к решению типового задания № 12.

49. Решите отдельно каждое неравенство системы. Решением первого неравенства являются все действительные числа. Решением второго — промежуток $(0,5; 3,5)$, значит, решением системы является промежуток $(0,5; 3,5)$.

50. Решите отдельно каждое неравенство системы. Решением первого неравенства является промежуток $(-\infty; 5,25]$. Решением второго — промежуток $(-4; 6)$, значит, решением системы является промежуток $(-4; 5,25]$.

51. Используйте следующее свойство модулей: $|a| + |b| = |a + b|$ тогда и только тогда, когда или a и b одного знака, или одно из них равно нулю, или каждое из них равно нулю, т.е. $ab \geq 0$. Получите систему неравенств

$$\begin{cases} 7 - 21x \geq 0, \\ 9 + 21x \geq 0. \end{cases}$$

Или решите уравнение методом, рассмотренным в решении задания № 9.

52. Используйте следующее свойство модулей: $|a| + |b| = |a + b|$ тогда и только тогда, когда $ab \geq 0$. Или решите уравнение методом, рассмотренным в решении задания № 9.

53. Так как $5x - 15 \geq 0, x \geq 3$, то все выражения, стоящие под знаком модуля, неотрицательны. Решение исходного неравенства сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x \geq 3; \\ x > 15. \end{cases}$$

54. Так как $6x - 18 \geq 0$, $x \geq 3$, то все выражения, стоящие под знаком модуля, неотрицательны. Решение исходного неравенства сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} x \geq 3; \\ 4x \leq 6x - 18. \end{cases}$$

55. Так как при любых значениях x $(x^2 - 9x + 8)^2 \geq 0$ и $5|x - 1| \geq 0$, то уравнение имеет решение, если слагаемые $(x^2 - 9x + 8)^2$ и $5|x - 1|$ обращаются в нуль одновременно. То есть исходное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} (x^2 - 9x + 8)^2 = 0; \\ 5|x - 1| = 0. \end{cases}$$

56. Учтите, что при любых значениях x $|x^2 - 4| \geq 0$ и $|x - 2| \geq 0$.

57. См. решение типового задания № 11.

58. См. решение типового задания № 11.

Тема 12. Уравнения и неравенства с параметром

8. См. решение типового задания № 1.

9. См. замечание к решению типового задания № 1.

10. Контрольное значение параметра $a = 0$. При $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение.

11. Контрольное значение параметра $a = 0$. При $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение.

12. См. решение типового задания № 2.

13. См. решение типового задания № 2.

14. Дробь сократима, если $x = a$ — корень числителя.

15. Дробь сократима, если $x = 5$ — корень числителя.
16. Дробь сократима, если $x = a$ — корень числителя.
17. См. решение типового задания № 3.
18. См. решение типового задания № 3.
19. См. решение типового задания № 3.
20. Коэффициент при x равен $(a - 2)(a + 2)$. Имеем два контрольных значения параметра: $a = 2$ и $a = -2$. Подставьте их в исходное уравнение.
21. Коэффициент при x равен $(a - 2)(a + 2)$. Имеем два контрольных значения параметра: $a = 2$ и $a = -2$. Подставьте их в исходное уравнение.
22. См. решение типового задания № 1 и замечание к нему. Контрольное значение параметра: $a = -0,5$.
23. См. решение типового задания № 1 и замечание к нему. Контрольные значения параметра: $a = 1$ и $a = -1$.
24. См. решение типового задания № 1 и замечание к нему. Контрольные значения параметра: $a = 1$ и $a = -1$.
25. Коэффициент при x равен $2a(a - 2)$, поэтому контрольные значения параметра $a = 0$ и $a = 2$. Подставьте их в исходное уравнение.
26. Коэффициент при x равен $2a(a - 2)$, поэтому контрольные значения параметра $a = 0$ и $a = 2$. Подставьте их в исходное уравнение.
27. Коэффициент при x равен $2a(a - 2)$, поэтому контрольные значения параметра $a = 0$ и $a = 2$. Подставьте их в исходное неравенство.
28. Коэффициент при x равен $2a(a - 2)$, поэтому контрольные значения параметра $a = 0$ и $a = 2$. Подставьте их в исходное неравенство.
29. Коэффициент при x равен $2a(a - 2)$, поэтому контрольные значения параметра $a = 0$ и $a = 2$. Подставьте их в исходное неравенство.

30. Дискриминант исходного уравнения равен $(2b - 4)^2$ при $b \neq 2,5$. См. решение типового задания № 4.

31. Дискриминант исходного уравнения равен $(2b - 4)^2$ при $b \neq 2,5$. См. решение типового задания № 4.

32. См. решение типового задания № 5. $D \leq 0$.

33. См. решение типового задания № 5. $D > 0$.

34. См. решение типового задания № 5. $D = 0$.

35. См. решение типового задания № 5. $D < 0$.

36. Решением исходного неравенства может быть либо вся координатная прямая ($D \leq 0$), либо одна точка ($D = 0$), либо отрезок ($D > 0$).

37. См. решение типового задания № 6.

38. См. решение типового задания № 6.

39. Теорема Виета применяется для приведенного квадратного уравнения. Получите систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0,5p, \\ x_1 \cdot x_2 = 0,5. \end{cases}$$

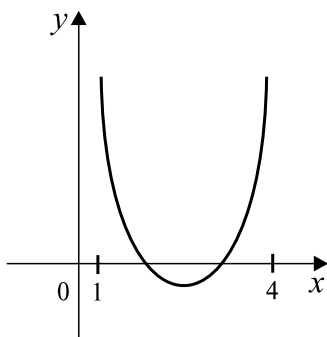
См. решение типового задания № 7.

40. Получите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = 2, \\ x_1 \cdot x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = -p. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений найдите корни уравнения.

41. Рассмотрите функцию $f(x) = x^2 - ax + 4$. Графиком данной функции является парабола. Изобразите параболу с указанными свойствами.



Запишите условия, соответствующие этому расположению параболы.

$$\begin{cases} f(1) > 0, & 1) \\ f(4) > 0, & 2) \\ 1 < x_{\text{вершины}} < 4, & 3) \\ D \geq 0. & 4) \end{cases}$$

Решите каждое из этих неравенств.

42. См. решение типового задания № 9.

43. См. решение типового задания № 8.

Получите систему неравенств

$$\begin{cases} f(4) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_{\text{вершины}} > 4. \end{cases}$$

44. См. решение типового задания № 6.

45. См. решение типового задания № 7.

46. Получите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 \\ x_1 \cdot x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = a. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений найдите корни уравнения.

47. См. решение типового задания № 10.

48. См. решение типового задания № 10.

49. См. решение типового задания № 10.

50. Получите систему неравенств:

$$\begin{cases} a < 0, \\ D \leq 0. \end{cases}$$

См. решение типового задания № 5.

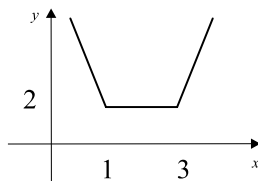
51. Получите систему неравенств:

$$\begin{cases} a < 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

См. решение типового задания № 5.

52. Рассмотрите два случая: 1) $a > 0$; 2) $a < 0$. Изобразите параболу, соответствующую условию задания в каждом из случаев. См. также решение типового задания № 9.

53. Изобразите график функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$.



При $a = 2$ решением уравнения будет отрезок $[1; 3]$.

54. См. указание к решению № 53. При $a < 2$ прямая $y = a$ не пересекает график функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$.

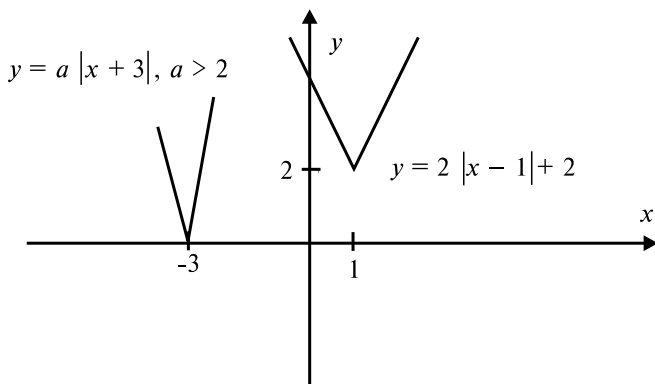
55. См. указание к решению № 53. При $a > 2$ прямая $y = a$ пересекает график функции $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ ровно в двух точках.

56. См. решение типового задания № 11. Постройте в одной системе координат графики функций $y = 2|x - 1| + 2$ и $y = a|x + 3|$.

Рассмотрите четыре случая:

- 1) $a > 2$;
- 2) $a = 2$;
- 3) $0,5 < a < 2$;
- 4) $0 < a < 0,5$.

Например, в первом случае графики выглядят следующим образом.



При $a > 2$ графики пересекаются в двух точках.

Тема 13. Планиметрия

62. Достройте исходный треугольник до параллелограмма, удвоив искомую медиану. Примените свойство диагоналей и сторон параллелограмма (или смотрите решение задания 2.6).

63. Найдите радиус вписанной окружности, используя формулу для площади треугольника через радиус вписанной окружности (или смотрите решение задания 2.3).

64. Для нахождения радиуса описанной окружности используйте следствие из теоремы синусов, т.е.

$$\frac{MB}{\sin \angle MOB} = 2R_{MOB}; \sin \angle MOB \text{ можно найти из треугольника } BOH.$$

ка BOH .

65. Используйте формулу площади треугольника через две стороны и синус угла между ними. Покажите, что из

условия задачи следует, что $\sin MNP = 1$ и треугольник MNP — прямоугольный.

66. Внутренний угол правильного шестиугольника равен 120° . Используйте теорему косинусов для треугольника со сторонами 8 и 8, и углом 120° между ними.

67. Используйте свойство описанного четырехугольника. Найдите, что $AB = 13$. Далее смотрите решение задания 9.2.

68. Смотрите решение задания 9.

69. Смотрите решение задания 9.

70. Используйте осевую симметрию относительно прямой $y = x$. Рассмотрите образ точки M (точку M_1). Треугольник MXN имеет наименьший периметр, если точка X является точкой пересечения прямых $y = x$ и прямой MM_1 .

71. Проведите высоту равнобедренной трапеции и рассмотрите прямоугольный треугольник, гипотенуза которого является диагональю трапеции. Докажите, что в получившемся треугольнике один из катетов является высотой трапеции, а другой катет равен средней линии трапеции.

72. Сначала найдите площадь прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами, равными 2, а затем — с катетами равными $2\sqrt{2}$.

73. Докажите, что полученный четырехугольник является параллелограммом.

74. Треугольники KOE и PEO имеют общее основание и равные высоты.

75. Проведите диагональ BD и докажите равенство треугольников по второму признаку равенства треугольников.

76. Получите, что сумма односторонних углов при прямых AD и BC и секущей CD равна 1800.

77. Докажите равенство соответствующих прямоугольных треугольников по двум катетам.

78. Докажите равенство соответствующих прямоугольных треугольников по катету и острому углу.

79. Докажите равенство соответствующих треугольников по первому признаку равенства треугольников.

80. Докажите, что углы $\angle BAK$ и $\angle BCK$ опираются на одну дугу.

81. Докажите равенство треугольников и используйте признак параллельности прямых.

82. Используйте признак параллельности прямых.

83. Используйте свойство параллельных прямых и докажите, что получившийся треугольник — прямоугольный.

84. Выразите $\angle HAD$ из треугольника ADC через внешний угол ADC .

85. Продлите искомый отрезок до пересечения с боковыми сторонами трапеции и используйте свойство средней линии треугольника.

ОТВЕТЫ

ТЕМА 1. ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

1.1. Делимость натуральных чисел

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	2	3	6	4
8	9	10	11	12	13	14
0, 2, 4, 6, 8	1, 4, 7	0,5	4	5	1	3
15	16	17	18	19	20	21
4	4	верно	верно	0	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$
22	23	24	25	26	27	28
540	90	12 600	6	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{15}$	19,23
29	30	31	32	33	34	35
3	1	1	1, 5, 9, 13	4	1	3
36	37	38	39	40	41	42
10	1212, 1122, 2112	5,8	240 м	11	40	нет
43	44	45	46	47	48	49
верно	11	(4; 3)	(2; 2)	нет	19 см	(3; 2), (1; 3)
50						
15						

1.2. Приближенные значения

1	2	3	4	5	6
больше 4·10 кг	0,91 м	0,7 см	3,8 м	300 000 км/с	в 4,4 раза
7	8	9	10	11	12
1,41	4	3	183 см	0,62	0,143
13	14	15	16	17	18
0,71	0,27	384 тыс. км	2	4	3
19	20	21	22	23	24
2	3	4	1	3	1
25	26	27	28	29	30
2	1	2	2	1	3
31	32	33	34		
3	3	4	$970 \leq p \leq 1030$		

1.3. Степень с целым показателем

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	4	1	3	4	1–B, 2–B, 3–A	2
9	10	11	12	13	14	15	16
4	$\frac{1}{16}$	25	27	1	690	–60	30
17	18	19	20	21	22	23	24
81	5200	113	$10 > 9$	$135 > 100$	4	3	3
25	26	27	28	29	30	31	32
2	4	2	3	4	4	1	3
33	34	35	36	37	38	39	40
1	3	2	3	2	1	81	4

1.4. Квадратный корень. Корень третьей степени

1	2	3	4	5	6	7	8
7,3	-1	0,5	4,8	8	4	4	
8	9	10	11	12	13	14	18
	3	8	2	0,5	3	-16	
	16	17	18	19	20	21	
2	3	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$a < b$	$a > b$	1	2	
22	23	24	25	26	27	28	29
3	1	24	4	12	0,25	$\sqrt{159} < 13$	4,8
30	31	32	33	34	35	36	37
1,5	6	1	верно	540	0	62	19
38	39	40	41	42	43	44	45
9,7	$-8; -3\sqrt{7};$ $2\sqrt{2}; 3$	$2; 2\sqrt[3]{2}; -2;$ $-2\sqrt[3]{3}; -4$	4	2	$-3\sqrt{10}; -4\sqrt{5}; 3\sqrt{7};$ $3\sqrt{11}; 5\sqrt{5}$	6	4
46	47	48	49	50	51	52	53
12	1	3	0	1	2015	4	2
54	55	56	57	58	59	60	61
-1	0	-1	1	216	1	1	Равны
62							
-25							

1.5. Выражения и преобразования

1	2	3	4	5	6
6	-7	3	1	x^5	x^{12}
7	8	9	10	11	12
4	2	3	$-3x^2 + 49$	3	3
13	14	15	16	17	18
4	$5p^2 - 36$	1	$\frac{4b}{b+3}, b \neq 3$	1	3
19	20	21	22	23	24
$\frac{3x-y}{x}, y \neq -3x;$ 0,01	$\frac{3x}{2x-1}$	2	4	$\frac{ab}{a-b}, a \neq -b$	$\frac{b^2}{a+b}, a \neq b$
25	26	27	28	29	30
$\frac{x}{12}, x \neq 0$	2	$\frac{2y-x}{4xy}, x \neq -2y,$ $y \neq 0$	$\frac{4ab}{b^2-a^2}, a \neq \pm b$	2	4
31	32	33	34	35	36
2	$-\sqrt{3a}$	$(x+y)(x-y)^2$	$(3x-2y) \times$ $\times (3x-2y+1)$	$(2p+3m) \times$ $\times (2p-3m+1)$	$0,5(x-1), x \neq -\frac{1}{3}$

$\frac{3a+1}{2x-1}, a \neq -\frac{1}{3}$	$y-1, x \neq 1, 2009$	$4x-3$	$\frac{x^2}{x-5},$ $x \neq 0, x \neq -5$	$x-1,$ $x \neq -1, -2, -3$	$\frac{1}{1-m}, 4$
43	44	45	46	47	48
2009	$12, x \neq -2$	$9(3-\sqrt{x}), x \neq 9,$ -90	$(x^2-1)(x^2+2)$	$(x+y-1)(p^2-n)$	$(m-1)(m+1) \times$ $\times (x+1)(x-4)$
49	50	51	52	53	54
$x-3, x \neq \pm 3$	$\frac{5}{x-4} \quad x \neq 0, \pm 4$	$x-2b$	15	0,5	$-\sqrt{n}-4, n \neq 9$
55	56	57	58	59	60
$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1),$ $x \neq 1; 0, 21.$	$-\frac{7}{y}, y \geq 0, y \neq 7,$ -700	200	24	-13	$\frac{2}{n^2-1}$
61	62	63	64	65	66
$\frac{2}{1-m^2}$	$\frac{37}{49}$	9	4	10	6
67	68	69	70	71	
a^2+2a+2	$\frac{1}{32}$	500	1	$x^2+x+1, x \neq -1$	

ТЕМА 2. УРАВНЕНИЯ

1	2	3	4	5
1,5	2	1	-30	-6; 5
6	7	8	9	10
3	4	± 4	0; 16	2
11	12	13	14	15
4	1	1 — в, 2 — б, 3 — а	4	-6
16	17	18	19	20
-7	Решений нет	-9; 7	-9	-32
21	22	23	24	25
3,5	3,5	1	28	8
26	27	28	29	30
5; $\pm\sqrt{10}$	-2; $\pm 3\sqrt{2}$	± 3	нет	0,5
31	32	33	34	35
$3\frac{2}{3}$	0,5	-1; 5	4	2
36	37	38	39	40
-4	324	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	0
41	42	43	44	45
0; 36	± 6	$\pm 4; \frac{20}{3}$	-5	5
46	47	48	49	50
24	$(-\infty; -3)(1; 1,5)$ $(1,5; +\infty)$	$\frac{-2; -3 - 5 \pm \sqrt{29}}{2}$	$\frac{-2,5; -5 \pm \sqrt{13}}{2}$	± 1
51	52			
Решений нет	$(2\sqrt{2}; 3)$			

ТЕМА 3. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1	2	3	4
(1; 4)	(-3; 2), (4; -1,5)	(-1; 2)	(2; -3)
5	6	7	8
(1; -3)	1	3	2
9	10	11	12
2	1	1	4
13	14	15	16
(1; 0), (4; 3)	(1; 12)	(6; -1), (1; -6)	(1; 5), (5; 1)
17	18	19	20
4	(5; 6), (5; -6), (-5; 6), (-5; -6)	-7	4
21	22	23	24
(24; 12), (16; 4)	(2,5; -0,5)	(5; 2), (-5; -2), (1; -2)	4
25	26	27	28
(2; -1)	-10	(2; -1), (-1; 2)	2
29	30	31	32
4	(1; 2; 3)	(1; 2; 3), (-1; -2; -3)	(2; -1)
33	34		
$(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$	-1,25		

ТЕМА 4. НЕРАВЕНСТВА

1	2	3	4
1	2	$(-\infty; -4)$	$(-\infty; 1]$
5	6	7	8
4	3	1	2
9	10	11	12
4	3	2	$[1; 3]$
13	14	15	16
$[-2; 8]$	$[-8; -1)$	$[-5; 0]$	$[-\frac{1}{3}; 3]$
17	18	19	20
$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	5	Решений нет	-11
21	22	23	24
$(0, 5; 1, 5)$	5	-1	-3
25	26	27	28
$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	$(-\infty; -5) \cup (-5; 1]$	1
29	30	31	32
0	1	$(-\infty; -2]$	4; 5
33	34	35	
$(-7; 0) \cup (1; +\infty)$	$[4; 11)$	Решений нет	
36		37	38
$[-6; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 6]$		5	$(-\infty; -3],$ $[-1; 1],$ $[3; +\infty)$
39	40	41	42
$(-\infty; -\sqrt{10}]$ $\{0\}, [\sqrt{10}; +\infty)$	$(-\infty; 0] \cup \{3\}$	5	$[0; 1) \cup$ $\cup (16; +\infty)$
43	44	45	
$a < 3$	$(-3; -2]$	8	

ТЕМА 5. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

5.1. Уравнения прямой, параболы и гиперболы

1	2	3	4	5	6	7
$a-2, b-1, c-3$	4	3	3	2	3	3
8	9	10	11	12	13	14
1	3	2	1	1-Б, 2-А, 3-Б, 4-Г	2	3
15	16	17	18	19	20	21
2	3	1	3	4	$y = 3x + 6$, да	$y = 0,25x - 1$, II четв.
22	23	24	25	26	27	28
$a < 0, b < 0,$ $c < 0$	$a > 0,$ $b < 0, c > 0$	$1\frac{1}{8}$	2	-0,8; (0,4; 0)	$B(1; -9)$	да; (2; 4)
29	30	31	32	33	34	35
$y = 3x - 8$	$y = 2x + 9$	$y = x + 1,$ (0; 1), (-1; 0)	$y = -\frac{1}{3}(x^2 - 2x - 5)$	$y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$	$A(-1; 0),$ $B(0; -1),$ $C(1; 0)$	$A(-\sqrt{3}; 0)$ $B(-1; 0)$ $C(\sqrt{3}; 0)$ $D(0; -3)$
36	37	38	39	40	41	
$a > 0, b < 0,$ $c > 0$	$a > 0, b < 0,$ $c > 0$ или $a < 0,$ $b > 0, c > 0$	(2; 7)	(3; -7)	$a = 2;$ (1; 0).	$a = -2;$ (2; 10)	

42. При $a = -2$ $y = -2x^2 - 4x + 2$, $(-1; 4)$ — координаты вершины параболы.

43. Объединение гиперболы $y = \frac{2}{x}$ и прямой $y = -2x$.

44. Гипербола $y = \frac{1}{x}$ без двух точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$, принадлежащих двум параллельным прямым $x = 1$ и $x = -1$.

45. Две параллельные прямые $y = 1 - 2x$ и $y = -1 - 2x$.

46. Две концентрические окружности с центром в начале координат и радиусами 2 и $2\sqrt{2}$.

5.2. Уравнение окружности

1. $(0; 0)$

2. 2

3. 3

4. 4

5. 1

6. 4

7. 3

8. 4

9. 3

10. 2

11. $x^2 + (y - 2)^2 = 9$

12. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

13. Окружность с центром в начале координат $(0; 0)$ и радиусом 11.

14. Окружность с центром в точке $(1; -1)$ и радиусом 3.

15. Окружность с центром в точке $(-2; 4)$ и радиусом 1.

16. Окружность с центром в точке $(0; 3)$ и радиусом 2.

17. Четыре.

18. Решений нет.

19. Восемь.
20. Два.
21. Решений нет.
22. Четыре.
23. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.
24. $x^2 + (y-1)^2 = 25$.
25. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ или $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$.
26. $(x+1)^2 + y^2 = 25$ или $(x-2)^2 + (y-9)^2 = 25$.
27. Две концентрические окружности с центром в начале координат и радиусами 3 и 1.
28. Окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 3.
29. Окружность $x^2 + (y-3)^2 = 4$, которую пересекает прямая $y = x + 5$.
30. Окружность $x^2 + (y-3)^2 = 4$, без двух точек (0; 5) и (-2; 3), лежащих на прямой $y = x + 5$.

ТЕМА 6. ФУНКЦИИ

1. а) 1; б) 3.
2. а) 3; б) 1.
3. 1)
4. 2)
5. 1) на высоте пятого этажа; 2) на пять этажей; 3) $\frac{1}{3}$ этажа в секунду или 1 м/с; 4) между пятым и шестым.
6. 1) 75 км/ч и 50 км/ч; 2) на 20 минут; 3) 50 км.
7. 1) 20°C; 2) в 15 ч; 3) с 12 ч до 21 ч; 4) в 6 ч.
8. Если $0 \leq x \leq 6$, то $2 \leq y \leq 4$.
9. Если $2 \leq x \leq 5$, то $-2 \leq y \leq -1,4$.
10. Если $-2 \leq x \leq 1$, то $1 \leq y \leq 7$.
11. Если $-1 \leq x \leq 4$, то $0,5 \leq y \leq 3$.
12. Область значений — промежуток $[-2; +\infty)$.
13. Область значений — множество всех чисел, кроме 1.
14. Если $1 \leq x \leq 2$, то $7 \leq y \leq 15$.

15. Если $2 \leq x \leq 3$, то $-29 \leq y \leq -14$.
16. Если $0 \leq x \leq 4$, то $-1 \leq y \leq 8$.
17. Область значений — промежуток $[8; +\infty)$.
18. $y > 0$, если x — любое число, кроме $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$.
19. $[2; 4)$ и $(4; +\infty)$.
20. $y > 3$, если $x > 0$, кроме $x = 3$.
21. Область значений — множество всех чисел, кроме $-4, 5$.
22. $y \geq 0$, если $x \leq 2$ и $x = 4$.
23. Функция возрастает на промежутке $[-1; 0]$ и на промежутке $[1; +\infty)$.
24. Функция убывает на промежутке $[-2; 1]$.
25. $y(10) = -17$.
26. $y \geq 1$ при $x \geq -2$.
27. $y = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 3 \\ 3, & x > 3 \\ x+6, & x < -3 \end{cases}$
28. $y = \begin{cases} 3x-1, & x \geq -1 \\ -2x-6, & x < -1 \end{cases}$
29. Прямая имеет с графиком функции четыре общие точки при $0 < m < 4$.
30. При $m > 0$ и $m = -16$ — две общих точки, при $-16 < m < 0$ — четыре общих точки, при $m = 0$ — три общих точки, при $m < -16$ — нет общих точек.

ТЕМА 7. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

1	2	3	4	5
3	1	-23	3	2
6	7	8	9	10
162	2	2	A-3; B-1; B-2	1,3
11	12	13	14	15
4800	2	4	4	12
16	17	18	19	20
24,5	72	10	40	9
21	22	23	24	25
12,7	14,25; 25,5; 36,75	5	3; 6; 12; 24; 48 и 3; -6; 12; -24; 48	23
26	27	28	29	30
-0,1	+0,2	128	$-\frac{5}{3}$; -4	-255
31	32	33	34	35
210	2	$40\frac{1}{3}$ или $20\frac{1}{3}$	64	13
36	37	38	39	40
24	1998	891	9	x^n
41	42	43	44	45
2188	1; 2; 4; 8	-3,6	860	780
46	47	48	49	
36	684	2849	3	

ТЕМА 8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. 1
2. 2
3. 2
4. 3
5. 4
6. 2
7. 4
8. 2
9. 1
10. 1
11. 2
12. 56 м
13. 3
14. 64 м
15. 1
16. 2100 человек
17. 3
18. 3
19. 1
20. 2
21. 2
22. 306,04 р
23. 10,25%
24. 660 р
25. 16%
26. 32%
27. 12 500 р
28. 2000 пар
29. 3000 машин
30. 200 кг
31. 15 км/ч
32. 16 км/ч
33. 4 км/ч, 6 км/ч
34. 20 км/ч, 30 км/ч
35. 5 км/ч, 6 км/ч
36. 15 ч, 10 ч

- 37. 9 ч, 10 ч
- 38. 12 км/ч, 15 км/ч
- 39. 19 страниц в минуту
- 40. 168 деталей
- 41. 15 дней
- 42. 6 автомобилей
- 43. 3,25 м
- 44. 9 дн., 18 дн.
- 45. 40 м/мин, 30 м/мин
- 46. 100 г
- 47. 2 л
- 48. 20 г, 30 г
- 49. 3 : 2
- 50. 0,25 л
- 51. уменьшилась на 2,5%
- 52. на 9,2%
- 53. 12%
- 54. 15, 18, 24
- 55. 27, 36, 27
- 56. 15 дней
- 57. 40 ч
- 58. 28 ч
- 59. 30 частей первого и 7 частей второго

ТЕМА 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1	2
0,5	$\frac{1}{6}$
3	4
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
5	6
$\frac{1}{24}$	0,3; 0,7
7	8
0,25; 0,75	0,4
9	10
$\frac{1}{3}; \frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}$
11	12
0,2	$\frac{2}{9}$

ТЕМА 10. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

- а) 4; б) 3,6; в) 4; г) 5
- а) 7; б) 4,5; в) 4,5; г) 2
- а) 500; б) 650 и 750; в) 17500; г) 2000
- 3
- 1,2
- а) увеличится на 0,8; б) увеличится на 8
- а) уменьшится на 0,5; б) уменьшится на 5
- 3
- 14 и 2
- 17,5

ТЕМА 11. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

1. 12
2. $2 - \sqrt{3}$
3. $x - 13$
4. $-x - 1$
5. 6
6. $-2x + 6$
7. $2x - 6$
8. ± 5
9. Решений нет
10. $-\frac{2}{3}; 2$
11. Решений нет
12. $(-1; 7)$
13. $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$
14. 13
15. 4
16. $\left(-\frac{2}{3}; 2\right)$
17. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$
18. 0,25
19. $\frac{2}{3}$
20. 1; 3
21. 5
22. $(-\infty; +\infty)$
23. $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$
24. $\pm\sqrt{21}$
25. 1; 9
26. -10
27. $(-7; -1] \cup [3; 5)$
28. 8
29. 5

30. $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$

31. $\pm 1; \pm 9$

32. $[-2007; +\infty)$

33. $(-\infty; +\infty)$

34. $[-2007; +\infty)$

35. Решений нет

36. 0

37. $[3; +\infty)$

38. $\{-5\} \cup [3; +\infty)$

39. ± 3

40. ± 4

41. $-7,5; 8,5$

42. $-7; 6$

43. $[-6; 5]$

44. ± 2

45. 2

46. ± 1

47. $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

48. 1

49. 1; 2; 3

50. -3 и 5

51. $\left[-\frac{3}{7}; \frac{1}{3}\right]$

52. $\left[\frac{1}{5}; \frac{9}{14}\right]$

53. $(15; +\infty)$

54. $[9; +\infty)$

55. 1

56. 2

57. $(2; 1), (0,5; -3,5)$

58. $(4; 1), \left(\frac{22}{7}; \frac{43}{7}\right)$

ТЕМА 12. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

1	2	3	4	5
4	20	8	$a < 0$	$a = 0$
6	7	8	9	10
$a \neq 0$	2	0	-1	0
11	12	13	14	15
0	$a \neq 0$	0	± 5	25
16	17	18	19	20
-1; 2	$(-\infty; -8) \cup$ $\cup (8; +\infty)$	$(-\infty; -8] \cup$ $\cup [8; +\infty)$	$(-8; 8)$	2
21	22	23	24	25
-2	-0,5	-1	1	2
26	27	28	29	30
0	0; 2	0; 2	0; 2	2,5; 4
31	32	33	34	35
$b \neq 2,5; 4$	$[-1; 1]$	$(-\infty; -1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$	± 1	$(0; 28)$
36	37	38	39	40
Не существует	$(-6; -2]$	$(-\infty; -6)$	$\pm 2\sqrt{3}$	± 3
41	42	43	44	45
$[4; 5)$	$(5; +\infty)$	Не существует	$(-\infty; -4]$	$\pm 4\sqrt{2}$
46	47	48	49	50
± 5	-4	4	$a \neq \pm 4$	$[-0,75; 0]$
51	52	53	54	55
$(-\infty; -\frac{9}{16})$	$(-0,75; 0)$	2	$a < 2$	$a > 2$

56. При $a > 2$ и $0,5 < a < 2$ два решения; при $a = 0,5$; 2 одно решение; при $0 < a < 0,5$ решений нет.

Тема 13. ПЛАНИМЕТРИЯ

1	2	3	4
14	$14\sqrt{3}$	32; 148	58; 122
5	6	7	8
20	12	$2\sqrt{2}$	3:10
9	10	11	12
$\frac{3}{7}$	9:1	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$
13	14	15	16
$2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$36\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
17	18	19	20
$4\sqrt{3}$	72; 36	$6\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$
21	22	23	24
48	0,6	10	6
25	26	27	28
48	9,6	32	8
29	30	31	32
$3\sqrt{3}$	4	2	17
33	34	35	36
240	4,8	2,4	12
37	38	39	40
68; 76	60; 84	$\sqrt{13}$	7
41	42	43	44
4	12	720°	360°
45	46	47	48
120°	60°	85°	25°

49	50	51	52
120°	70°	128°	20°
53	54	55	56
12	$12\sqrt{3}$	$12\sqrt{2}$	$65^\circ; 5^\circ$
57	58	59	60
45°	1,4	2,3	2,4
61	62	63	64
1,3	4	12π	12
65	66	67	68
13	$8\sqrt{3}$	12	90
69	70	71	72
6,4	(4; 4)	64	6

Издание для дополнительного образования

Для среднего школьного возраста

ГОСУДАРСТВЕННАЯ (ИТОГОВАЯ) АТТЕСТАЦИЯ (В НОВОЙ ФОРМЕ): 9 КЛАСС
СБОРНИК ЗАДАНИЙ

**Кочагин Вадим Витальевич
Кочагина Мария Николаевна**

**ГИА 2013
МАТЕМАТИКА**

Сборник заданий

9 класс

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*
Технический редактор *Л. Зотова*
Компьютерная верстка *Г. Ражикова*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Подписано в печать 05.07.2012.
Формат 60·90¹/₁₆. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,0.
Тираж 25 000 экз. Заказ №

ISBN 978-5-699-57705-7



9 785699 577057 >

Оптовая торговля книгами «Эксмо»:

ООО «ТД «Эксмо». 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное,
Белокаменное ш., д. 1, многоканальный тел. 411-50-74.

E-mail: reception@eksmo-sale.ru

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»

E-mail: international@eksmo-sale.ru

International Sales: International wholesale customers should contact
Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.
international@eksmo-sale.ru

**По вопросам заказа книг корпоративным клиентам,
в том числе в специальном оформлении,**
обращаться по тел. 411-68-59, доб. 2299, 2205, 2239, 1251.
E-mail: vipzakaz@eksmo.ru

Оптовая торговля бумажно-беловыми

и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»:

Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное, 2,
Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).

e-mail: kanc@eksmo-sale.ru, сайт: www.kanc-eksmo.ru

Полный ассортимент книг издательства «Эксмо» для оптовых покупателей:

В Санкт-Петербурге: ООО СЗКО, пр-т Обуховской Обороны, д. 84Е.

Тел. (812) 365-46-03/04.

В Нижнем Новгороде: ООО ТД «Эксмо НН», ул. Маршала Воронова, д. 3.

Тел. (8312) 72-36-70.

В Казани: Филиал ООО «РДЦ-Самара», ул. Фрезерная, д. 5.

Тел. (843) 570-40-45/46.

В Ростове-на-Дону: ООО «РДЦ-Ростов», пр. Стачки, д. 243А.

Тел. (863) 220-19-34.

В Самаре: ООО «РДЦ-Самара», пр-т Кирова, д. 75/1, литера «Е».

Тел. (846) 269-66-70.

В Екатеринбурге: ООО «РДЦ-Екатеринбург», ул. Прибалтийская, д. 24а.

Тел. +7 (343) 272-72-01/02/03/04/05/06/07/08.

В Новосибирске: ООО «РДЦ-Новосибирск», Комбинатский пер., д. 3.

Тел. +7 (383) 289-91-42. E-mail: eksmo-nsk@yandex.ru

В Киеве: ООО «РДЦ Эксмо-Украина», Московский пр-т, д. 6.

Тел./факс: (044) 498-15-70/71.

В Донецке: ул. Артема, д. 160. Тел. +38 (062) 381-81-05.

В Харькове: ул. Гвардейцев Железнодорожников, д. 8. Тел. +38 (057) 724-11-56.

Во Львове: ул. Бузкова, д. 2. Тел. +38 (032) 245-01-71.

Интернет-магазин: www.knigka.ua. Тел. +38 (044) 228-78-24.

В Казахстане: ТОО «РДЦ-Алматы», ул. Домбровского, д. 3а.

Тел./факс (727) 251-59-90/91. RDC-Almaty@eksmo.kz

Полный ассортимент продукции издательства «Эксмо»

можно приобрести в магазинах «Новый книжный» и «Читай-город».

Телефон единой справочной: 8 (800) 444-8-444.

Звонок по России бесплатный.

В Санкт-Петербурге в сети магазинов «Буквоед»:

«Парк культуры и чтения», Невский пр-т, д. 46. Тел. (812) 601-0-601

www.bookvoed.ru

**По вопросам размещения рекламы в книгах издательства «Эксмо»
обращаться в рекламный отдел. Тел. 411-68-74.**

ПОДГОТОВКА К ГИА ВЫСШИЙ УРОВЕНЬ КАЧЕСТВА

9

класс

ГИА

2013



Успех на ГИА гарантирован!

Для комплексной подготовки к ГИА издательство «Эксмо» предлагает учебные пособия по всем предметам, которые выносятся на экзамен в 2013 году: русскому языку, математике, истории, обществознанию, биологии, географии, физике, химии и информатике.

Авторы пособий – ведущие специалисты и разработчики заданий ГИА и ЕГЭ. Все книги прошли строгий контроль качества.

Комплект пособий поможет получить высший балл на ГИА по математике!



Аналогичные комплекты для подготовки к ГИА выпускаются по всем предметам